Examen de Febrero de 2005 de Cálculo I. Soluciones.

1. Sea la función $f(x)=\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}+x$ con dominio $\mathbb{R}$.
a) Hallar los tres primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en $x=0$.
b) Probar que existe su función inversa f^{-1} y calcular $(f^{-1})'(1)$.

a) Como f no es una función cuyo desarrollo podemos escribir inmediatamente, usamos la definición:

$$f(0)=1\,;\; f'(x)=\operatorname{ch} x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}+1 \Rightarrow f'(0)=2\,;\; f''(x)=\operatorname{sh} x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}+\operatorname{ch}^2 x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} \Rightarrow f''(0)=1\,.$$

Por tanto: $\boxed{f(x)=1+2x+\frac{1}{2}x^2+\cdots}$

[También podríamos componer series:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}+x &= 1+\operatorname{sh} x+\tfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2 x+\tfrac{1}{6}\operatorname{sh}^3 x+\cdots+x\\ &= 1+\big[x+\tfrac{1}{6}x^3+\cdots\big]+\tfrac{1}{2}\big[x+\cdots\big]^2+\tfrac{1}{6}\big[x+\cdots\big]^3+\cdots+x=1+2x+\tfrac{1}{2}x^2+\cdots\,,\end{aligned}$$

pues los demás términos son potencias al menos x^3].

b) Como tanto $\operatorname{ch} x$ como $\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x}$ son positivos $\forall x$, es $f'(x)>0\ \forall x$. Por tanto, f es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, con lo que es inyectiva en todo su dominio y existe su función inversa. Al ser f derivable, f^{-1} también lo es. Y se tiene que:

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(1))}\underset{f(0)=1}{=}\frac{1}{f'(0)}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

2. Determinar si converge la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n\,\operatorname{sen}^2 n}{\sqrt{2n^5+1}}+\frac{(-1)^n}{\log n}\right)$.

Es **convergente** por ser la suma de dos series convergentes:

Comparando con desigualdades: $0\le\sum\frac{n\,\operatorname{sen}^2 n}{\sqrt{2n^5+1}}\le\sum\frac{n}{\sqrt{2n^5+1}}$ serie convergente,

$$\text{ya que }\frac{n/\sqrt{2n^5+1}}{1/n^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{2+n^{-5/2}}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(\text{o ya que }\frac{n}{\sqrt{2n^5+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n^3}}\right)\text{ y }\sum\frac{1}{n^{3/2}}\text{ converge.}$$

La serie alternada $\sum\frac{(-1)^n}{\log n}$ converge por Leibniz ya que $\frac{1}{\log n}\to 0$ y es decreciente por crecer $\log n$.

3. Hallar, si existe, el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Por Taylor:

$$\log(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}+\cdots\,,\ \operatorname{sen} x=x-\tfrac{x^3}{6}+\cdots\Rightarrow\frac{\log(1+x)-x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}\underset{x\to 0}{\to}\boxed{-\frac{1}{2}}$$

Por L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2\operatorname{sen} x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)\cos x}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

4. Calcular la integral $\displaystyle\int_1^{e} x\log x\,dx$.

Por partes:

$$\int_1^{e} x\log x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^{e}-\frac{1}{2}\int_1^{e} x\,dx=\frac{e^2}{2}-0-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^{e}=\boxed{\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}}$$

5. Sea $\displaystyle F(x)=\int_{-2}^{3x-x^2} te^{t^4}dt\,,$ con $x\in[0,2]$.
Determinar en qué x del intervalo alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

El integrando es continuo $\forall t$ y el límite superior de integración es derivable $\forall x$. El teorema fundamental del cálculo nos asegura entonces que F es derivable $\forall x$ y que su derivada es:

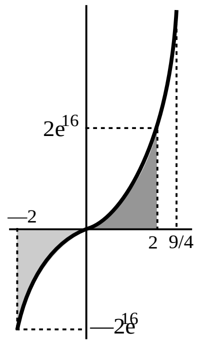
$F'(x)=(3-2x)x(3-x)\,e^{(3x-x^2)^4}$, derivada que se anula en $x=0\,,\ x=\frac{3}{2}$ y $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} F'>0 \text{ en } [0,\frac{3}{2})\Rightarrow F \text{ crece en } \left[0,\frac{3}{2}\right] \\ F'<0 \text{ en } (\frac{3}{2},2]\Rightarrow F \text{ decrece en } \left[\frac{3}{2},2\right] \end{array}\right\}\Rightarrow \text{El } \textbf{valor máximo} \ (\textstyle\int_{-2}^{9/4}) \text{ se alcanza en } \boxed{x=\frac{3}{2}}\,.$$

El mínimo (que ha de existir por ser F continua en el $[0,2]$ cerrado) se tomará en uno de los extremos. Debemos determinar cuál de las dos siguientes integrales es menor:

$$F(0)=\int_{-2}^{0} te^{t^4}dt \quad \text{ó} \quad F(2)=\int_{-2}^{2} te^{t^4}dt$$

(La primitiva no es calculable exactamente, pues con $t^2=u$ se obtiene $\int e^{u^2}du$ que es sabido que no lo es).



El integrando $f(t)=te^{t^4}$ es una función positiva para $t>0$ y negativa para $t<0$ (y f es impar). Según esto, la primera de las dos integrales $\int_{-2}^{0}<0$, y la segunda $\int_{-2}^{2}=\int_{-2}^{0}+\int_{0}^{2}$ es mayor que ella, por ser $\int_{0}^{2}>0$ (de hecho es $\int_{-2}^{2}=0$, ya que f es impar). Así pues, el **valor mínimo** se toma en $\boxed{x=0}$.

6a. i) Determinar los puntos donde converge la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
ii) Analizar si converge uniformemente en $\mathbb{R}$ la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\arctan(nx)}{5^n}$.

i) $\frac{|x+1|^{n+1}}{|x+1|^n}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to\infty}{\to}|x+1|\Rightarrow$ la serie converge si $|x+1|<1\Leftrightarrow -1<x+1<1\Leftrightarrow -2<x<0$,
diverge si $|x+1|>1$ y aún no sabemos si $x=-2$ ó $x=0$.

Para $x=-2$ es $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, serie que converge por Leibniz, pues claramente $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ decrece y $\to 0$.

Si $x=0$ nos queda $\sum\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, serie divergente como $\sum\frac{1}{n^{1/2}}$ con la que es inmediato compararla.

Así pues, la serie converge exactamente para $\boxed{-2\le x<0}$.

ii) Como $\left|\frac{\arctan(nx)}{5^n}\right|\le\frac{\pi/2}{5^n}\ \forall x$ y la serie $\frac{\pi}{2}\sum\left(\frac{1}{5}\right)^n$ es geométrica convergente, el criterio de Weierstrass asegura que la serie de funciones converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$.

6b. Calcular la primitiva $\int \frac{x+2}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$.

$$\frac{x+2}{x^3-8}=\frac{x+2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{x^3-8}$$

$$x=2\to 4=12A,\ A=\tfrac{1}{3}\ ;\quad x^2: A+B=0,\ B=-\tfrac{1}{3}\ ;\quad x^0: 4A-2C=2,,\ C=-\tfrac{1}{3}\ .$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-8}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{x-2}-\frac{x+1}{x^2+2x+4}\right]\mathrm{d}x=\boxed{\frac{1}{3}\log|x-2|-\frac{1}{6}\log(x^2+2x+4)}+K$$

6c. Determinar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Integrando positivo $\forall x>0$. Hay impropiedades en 0 y en ∞ . Debemos analizar dos integrales:

$\int_1^{\infty}$ converge: el integrando se comporta como $\frac{1}{x^{3/2}}$ $\left(\frac{\arctan x/x^{3/2}}{1/x^{3/2}}\underset{x\to\infty}{\to}\frac{\pi}{2}\right)$ e $\int^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ converge.

Como $\arctan x = x+o(x)$, $\int_{0^+}^{1}$ converge, pues lo hace $\int_{0^+}\frac{dx}{x^{1/2}}$: $\frac{\arctan x/x^{3/2}}{1/x^{1/2}}=\frac{\arctan x}{x}\underset{x\to 0^+}{\to}1$.

Por converger ambas impropias, la inicial $\int_0^{\infty}$ también es **convergente**.

Examen de Septiembre de 2005 de Cálculo I. Soluciones.

1. Sea $f(x)=\arctan(\log x^2)$, si $x\neq 0$; $f(0)=-\pi/2$. **Preguntas de varios grupos:**
a) Hallar $f'(x)$ para $x\neq 0$. b) Estudiar si f es continua y derivable en $x=0$.
c) Demostrar que existe la función inversa de $f(x)$ en $(0,\infty)$ y es derivable. d) Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

a) $f'(x)=\dfrac{2x/x^2}{1+(\log x^2)^2}=\boxed{\dfrac{2}{x+x(\log x^2)^2}}$, si $x\neq 0$.

b) Como $\log x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ y $\arctan x \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$, es $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \Rightarrow f$ **es continua** en $x{=}0$.

$$x(2\log x)^2=\frac{4(\log x)^2}{1/x} \underset{(\frac{\infty}{\infty})\text{L'H}}{\longrightarrow} \frac{8\log x}{-1/x} \underset{(\frac{\infty}{\infty})\text{L'H}}{\longrightarrow} \frac{8/x}{1/x^2}=8x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+\frac{\pi}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\infty\,,$$

pues además $f'(x)>0$ si $x>0$. Por tanto, f **no es derivable** en $x{=}0$.

[Análogamente $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-\infty$. Se simplificarían algo los cálculos usando que $f(x)=\arctan(2\log|x|)$].

c) $f'(x)>0$ si $x>0 \Rightarrow f$ estrictamente creciente en $(0,\infty) \Rightarrow f$ inyectiva en $(0,\infty) \Rightarrow$ existe f^{-1}.
Y como f es derivable y estrictamente creciente, f^{-1} también es derivable.

d) $\log x^2 \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y $\arctan x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}}$.

2. Determinar cuántas veces se anula la función $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}-x-1$ en $[\frac{\pi}{2},\pi]$.

Como $f(\frac{\pi}{2})=e-\frac{\pi}{2}-1>0$ (pues $e{>}2.7$ y $\frac{\pi}{2}{<}1.6$) y $f(\pi)=-\pi<0$, el teorema de Bolzano asegura que la f , claramente continua, se anula al menos una vez en ese intervalo.
Como además $f'(x)=\cos x\, e^{\operatorname{sen} x}-1<0$ en $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ($\cos x$ es negativo y la exponencial es positiva), f es estrictamente decreciente en $[\frac{\pi}{2},\pi]$ y, por tanto, **se anula exactamente una vez**.

3. Sea $F(x)=\displaystyle\int_{1-2x}^{x} te^{-t^4}dt$. Hallar $F(1)$, $F'(1)$ y $(F\circ F)'(1)$.
Razonar si $F(0)$ es mayor o menor que $F(1)$.

$F(1)=\int_{-1}^{1} te^{-t^4}dt=\boxed{0}$, por ser el integrando una función impar.

El TFC (integrando continuo y límites de integración derivables) asegura que F' existe $\forall x$ y que:

$$F'(x)=x\,e^{-x^4}-(-2)(1-2x)\,e^{-(1-2x)^4} \Rightarrow F'(1)=e^{-1}-2e^{-1}=\boxed{-e^{-1}}\,.$$

Por la regla de la cadena: $(F\circ F)'(1)=F'(F(1))\,F'(1)=F'(0)\,F'(1)=(2e^{-1})(-e^{-1})=\boxed{-2e^{-2}}$.

$F(0)=\int_{1}^{0} te^{-t^4}dt=-\int_{0}^{1} te^{-t^4}dt<0$ [el integrando es positivo en $(0,1)$] $\Rightarrow \boxed{F(0)<F(1)}$.

(La primitiva no es calculable, pues con $t^2=u$ aparece $\int e^{-u^2}du$).

4. Calcular: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

$$\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx=\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen} x-2\operatorname{sen} x\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos^4 x)\,dx$$
$$=\Big[-\cos x+\frac{2\cos^3 x}{3}-\frac{\cos^5 x}{5}\Big]_0^{\pi/2}=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\boxed{\frac{8}{15}}$$

5. Determinar los puntos donde converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^3+1}}\,(x-1)^n$.

Cociente: $\displaystyle\frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{|x-1|^{n+1}}{|x-1|^n}\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{(n+1)^3+1}}\underset{n\to\infty}{\to} 2|x-1| \Rightarrow \begin{cases}\text{converge si } |x-1|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ \text{aún no sabemos si } x=\frac{1}{2} \text{ ó } x=\frac{3}{2}\\ \text{diverge si } |x-1|>\frac{1}{2}\end{cases}$

Si $x=\frac{3}{2}$ queda $\sum\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$, serie convergente como $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ con la que es inmediato compararla:

$$0\le\sum\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\le\sum\frac{1}{n^{3/2}}\ \text{, o bien, }\ \frac{1/\sqrt{n^3+1}}{1/n^{3/2}}\to 1\ .$$

Para $x=\frac{1}{2}$ es $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+1}}$, serie absolutamente convergente según lo que acabamos de ver (o que converge por Leibniz, pues claramente $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ decrece y $\to 0$).

Así pues, la serie converge exactamente para $\boxed{\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}}$.

6. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{x^4}$.

$(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{(1/2)(-1/2)}{2!}x^2+\cdots$, $\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\cdots$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{x^4}=\frac{-\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4}\underset{x\to 0}{\to}\boxed{-\frac{1}{6}}$$

[Por L'Hôpital las cosas se complican y hay que derivar 4 veces:

$$\frac{(1-x^2)^{1/2}-\cos x}{x^4}\underset{\text{L'H}(0/0)}{\to}\frac{-x(1-x^2)^{-1/2}+\operatorname{sen}x}{4x^3}\underset{\text{L'H}(0/0)}{\to}\frac{-(1-x^2)^{-1/2}-x^2(1-x^2)^{-3/2}+\cos x}{12x^2}\underset{\text{L'H}(0/0)}{\to}\cdots]$$

7a. Sea $f_n(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. i) Calcular los valores máximo y mínimo en $[0,\infty)$ de cada $f_n(x)$.
ii) Determinar si converge uniformemente en $[0,\infty)$ la serie de funciones $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$.

i) $f_n(0)=0$, $f_n(x)>0$ si $x>0\Rightarrow$ el valor mínimo en $[0,\infty)$ es $\boxed{0}$.

$f_n'(x)=(\frac{1}{n}-x)\,\mathrm{e}^{-nx}\Rightarrow f_n$ crece hasta $x=\frac{1}{n}$ y luego decrece $\Rightarrow$ valor máximo $=f_n(\frac{1}{n})=\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n^2}}$.

ii) Como $|f_n(x)|\le\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n^2}$ si $x\in(0,\infty)$ y sabemos que la serie $\mathrm{e}^{-1}\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, el criterio de Weierstrass asegura que la serie de funciones **converge uniformemente** en $(0,\infty)$.

7b. Determinar si converge la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log(1+x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Integrando positivo $\forall x>0$. Hay impropiedades en 0 y en ∞ . Debemos analizar dos integrales:

$\int^{\infty}$: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)/x^{3/2}}{1/x^{5/4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x^{1/4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/(1+x)}{x^{-3/4}/4}=0$, $\int^{\infty}\frac{dx}{x^{5/4}}$ converge $\Rightarrow$ la dada converge.

Como $\log(1+x)=x+o(x)$, $\int_{0^+}$ converge, pues lo hace $\int_{0^+}\frac{dx}{x^{1/2}}$ y $\displaystyle\frac{\log(1+x)/x^{3/2}}{1/x^{1/2}}=\frac{\log(1+x)}{x}\underset{x\to 0^+}{\to}1$.

Por converger ambas impropias, la inicial $\displaystyle\int_0^{\infty}$ también es **convergente**.