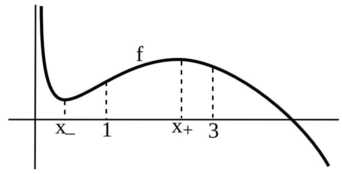
Soluciones del examen de Febrero de 2006 de Cálculo I (A,C,E)

1. Sea $f(x)=\arctan x-\frac{1}{3}\log x$. Estudiar cuántas veces se anulan f' y f en el intervalo $[1,\infty)$. Probar que f es inyectiva en $[3,\infty)$.

$$f'(x)=-\frac{x^2-3x+1}{3x(1+x^2)}=-\frac{(x-x_-)(x-x_+)}{3x(1+x^2)}\ ,\ \text{siendo}\ x_\pm=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\,.$$

Puesto que $2<\sqrt{5}<3$, **en** $[1,\infty)$ **sólo es** $f'=0$ **para** $x_+\in(\frac{5}{2},3)$ $\big[x_-\in(0,\frac{1}{2})$ está a la izquierda de $1\big]$.

Como $f(1)=\frac{\pi}{4}$, f crece en $[x_-,x_+]\supset[1,x_+]$ y decrece en $[x_+,\infty)$, tendiendo hacia $-\infty$ cuando $x\to\infty$, la función continua f **cortará una única vez el eje** x en un $c>x_+>1$. Y ya que f es estrictamente decreciente en $[3,\infty)$, es inyectiva en ese intervalo.



$\big[$Además $f(x)\overset{x\to 0^+}{\to}\infty$, f decrece en $(0,x_-]$ y $f(x_-)>0$ (en $(0,1)$ son $\arctan x$ y $-\log x$ positivos) $\Rightarrow f=0$ sólo una vez en todo su dominio $(0,\infty)$. Sin hallar los ceros de $f'(x)=-\frac{x(x-3)+1}{3x(1+x^2)}$ podemos ver que $f'<0$ en $[3,\infty)\,\big]$.

2. Estudiar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, siendo $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n/2}a_n$ y $a_1=1$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/2}=\frac{\sqrt{e}}{2}<1\ ,\ \text{ya que}\ e<4\,.$$

Por tanto, por el criterio del cociente, **la serie converge** (absolutamente).

3. Determinar todos los reales x para los que converge la serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+\log n}$.

Aplicando el criterio de la raíz [o del cociente], suponiendo conocido que $\frac{\log n}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$ y que $n^{1/n}\underset{n\to\infty}{\to}1$:

$$\frac{(|x|^n)^{1/n}}{(n+\log n)^{1/n}}=\frac{|x|}{n^{1/n}\,(1+\frac{\log n}{n})^{1/n}}\underset{n\to\infty}{\to}|x| \qquad \left[\text{ó}\ \ \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}\frac{n+\log n}{n+1+\log(n+1)}=|x|\frac{1+\frac{\log n}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{\log(n+1)}{n}}\underset{n\to\infty}{\to}|x|\right]$$

deducimos que la serie de potencias converge si $|x|<1$ y que diverge si $|x|>1$. Además:

Si $x=1$: $\sum\frac{1}{n+\log n}$ diverge, pues $\frac{1/(n+\log n)}{1/n}=\frac{1}{1+\frac{\log n}{n}}\to 1$ y $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Si $x=-1$: $\sum\frac{(-1)^n}{n+\log n}$ converge por Leibniz, pues $\frac{1}{n+\log n}\to 0$ y es decreciente por crecer n y $\log n$.

En resumen, **la serie de potencias converge para los** $x\in[-1,1)$.

4. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-\operatorname{sen}^2x}{\log(1+x^4)}$. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

Cuando $x\to 0$:

$$\operatorname{sen}^2x=\left[x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right]^2=x^2-\frac{x^4}{3}+\cdots\ ,\ \log(1+x^4)=x^4+\cdots\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+\cdots}{x^4+\cdots}=\boxed{\frac{1}{3}}\,.$$

$\big[$Por L'Hôpital, aún simplificando, sería bastante más largo:

$$\lim_{x\to 0}f(x)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\operatorname{sen}x\cos x}{4x^3/(1+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen}2x}{4x^3}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}=\frac{1}{3}\ \big].$$

Cuando $x\to\infty$, por estar sen^2x acotado:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\log(1+x^4)}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x^3/(1+x^4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^4}{2x^2}=\boxed{\infty}\,.$$

5. Calcular la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\arctan x\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} x\arctan x\,dx \underset{\text{par}}{=} \int_0^1 2x\arctan x\,dx \underset{\text{partes}}{=} x^2\arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = 2\arctan 1 - 1 = \frac{\pi}{2}-1$$

6. Determinar si converge la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{2x}-1}dx$.

Integrando positivo $\forall x>0$. Hay impropiedades en 0 y en ∞ . Debemos analizar dos integrales:

Como $e^{2x}=1+2x+o(x)$, $\int_{0^+}$ converge, pues lo hace $\int_{0^+}\frac{dx}{x^{1/2}}$ y $\dfrac{x^{1/2}/(e^{2x}-1)}{1/x^{1/2}}=\dfrac{x}{e^{2x}-1}\underset{x\to 0^+}{\to}\dfrac{1}{2}$.

Para ver que converge $\int^{\infty}$ podemos compararla con diferentes impropias convergentes, por ejemplo:

$$\frac{x^{1/2}/(e^{2x}-1)}{1/x^2}=\frac{x^{5/2}e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\underset{x\to\infty}{\to}0\ , \text{ o bien, } \quad \frac{x^{1/2}/(e^{2x}-1)}{e^{-x}}=\frac{x^{1/2}e^{-x}}{1-e^{-2x}}\underset{x\to\infty}{\to}0\,.$$

Como $\int^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ ó $\int^{\infty}e^{-x}dx$ convergen $\Rightarrow$ nuestra $\int^{\infty}$ también converge.

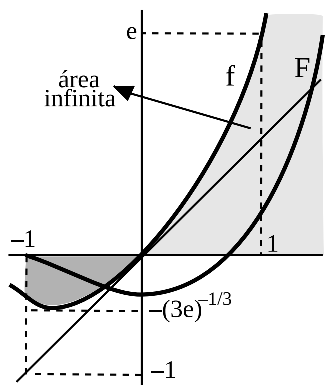
Por converger ambas impropias, la inicial $\displaystyle\int_0^{\infty}$ también es **convergente**.

7. Sea $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} t\,e^{t^3}dt$, con $x\in[-1,\infty)$. i) Hallar, si existen, los x del intervalo en los que F alcanza sus valores máximo y mínimo. ii) Probar que $F(0)>-\frac{1}{2}$.

i) Como el integrando es continuo en todo $[-1,\infty)$ podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x)=x\,e^{x^3}\Rightarrow F$ decrece en $[-1,0]$, crece en $[0,\infty)$ y **el valor mínimo de** F **se alcanza en** $x=0$.

[Esto se podía afirmar simplemente viendo el signo del integrando: hasta $x=0$ vamos añadiendo áreas negativas y luego positivas].



Además es $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$, puesto que f es positiva en $[0,\infty)$ y claramente la integral impropia $\int_0^{\infty}f$ es divergente, por tender su integrando hacia ∞ (o, de otra forma, porque $t\,e^{t^3}dt>t$ si $t>0$ e $\int^{\infty}t\,dt$ diverge). Por tanto, **el valor máximo de** F **no existe.**

ii) Se puede hacer de varias formas (la primitiva no es calculable):

Como en $[-1,0]$ es $e^{t^3}\le 1$ y $t\le 0\ \Rightarrow\ t\,e^{t^3}\ge t\ \Rightarrow\ F(0)=\int_{-1}^{0}t\,e^{t^3}dt>\int_{-1}^{0}t\,dt=-\frac{1}{2}$.

Como para el integrando $f(t)=t\,e^{t^3}$ es $f'(t)=(1+3t^3)\,e^{t^3}$, f tiene su mínimo en $t=-3^{-1/3}\ \Rightarrow$

$f(t)\ge f(-3^{-1/3})=-(3e)^{-1/3}$ en $[-1,0]\ \Rightarrow\ F(0)>\int_{-1}^{0}-(3e)^{-1/3}dt=-(3e)^{-1/3}$

y se cumple que $-(3e)^{-1/3}>-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ (3e)^{-1/3}<\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ e>\frac{8}{3}=2{,}666\ldots$

Para dar valores aproximados de $F(0)$ lo más mecánico es desarrollar por Taylor el integrando:

$F(0)=\int_{-1}^{0}\left[t+t^4+\frac{t^7}{2}+\frac{t^{10}}{6}+\cdots\right]dt=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{16}+\frac{1}{66}+\cdots$ (serie de Leibniz) $\Rightarrow F(0)>-\frac{1}{2}$.

Soluciones del examen de Septiembre de 2006 de Cálculo I (A, C, E, F)

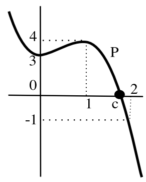
1. Sea $f(x)=(x^2+1)\,e^{3x-x^2}$. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
Probar que f' se anula en un punto del intervalo $(1,2)$ y que no lo hace más veces en su dominio.
Estudiar cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x)=1$.

Cuando $x\to\infty$ y cuando $x\to-\infty$ el exponente $x(3-x)$ tiende a $-\infty$ y aparece indeterminación $\infty\times 0$. Comprobemos por L'Hôpital que, como era previsible, la exponencial 'puede' con el polinomio:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{e^{x^2-3x}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{(2x-3)e^{x^2-3x}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2-\frac{3}{x}}\cdot\lim_{x\to\pm\infty} e^{3x-x^2} = 1\cdot 0 = \boxed{0}$$

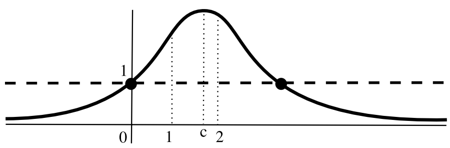
$f'(x)=(3+3x^2-2x^3)\,e^{3x-x^2}$. Como $\begin{array}{l} f'(1)=4e^2 \\ f'(2)=-e^2\end{array}$, Bolzano asegura que $f'=0$ en algún $c\in(1,2)$.

Como $e^{3x-x^2}>0$, para precisar exactamente cuántas veces se anula f' vemos cuántas lo hace el polinomio $P(x)=3+3x^2-2x^3$: $P'(x)=6x(x-1)\to P$ crece en $[0,1]$ y decrece en el resto de $\mathbf{R}$; y como $P(0)=3$, $P(1)=4$, $P(2)=-1$, comprobamos que P se anula en el único c de antes.



[Bastaría conocer el criterio de Descartes de los signos: $-++$ (1 raíz positiva), $+++$ (ninguna negativa)].

Como $f(0)=1$, y utilizando los cálculos anteriores, podemos asegurar que la gráfica de f es más o menos la de la derecha, con lo que $f(x)=1$ exactamente en **dos** puntos (en $x=0$ y en otro positivo a la derecha de c no calculable exactamente).



2a. Sea $f_n(x)=(\operatorname{sen} x)^n$. Hallar el límite puntual de $\{f_n(x)\}$ en $[0,\pi]$.
Discutir si la convergencia es uniforme.

Como en $[0,\pi]$ es $\operatorname{sen} x=1$ sólo si $x=\frac{\pi}{2}$ y $0\le\operatorname{sen} x<1$ en el resto del intervalo, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\boxed{\begin{cases} 1 & \text{si } x=\pi/2 \\ 0 & \text{si } x\neq\pi/2\end{cases}}\,.$$

Como cada una de las f_n es continua en $[0,\pi]$ y la función límite puntual f es discontinua en $\frac{\pi}{2}$, **la convergencia no es uniforme**.

2b. Hallar el desarrollo de Taylor en torno a $x=0$ hasta x^4 de $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+x^2}$.

$$\cos x = 1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4+\cdots \quad (\forall x)\,,\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots \quad (\text{para } |x|<1) \;\Rightarrow$$

$$\cos 2x = 1-2x^2+\tfrac{2}{3}x^4+\cdots \quad (\forall x)\,,\quad \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots \quad (\text{para } |x|<1) \;\Rightarrow\; \text{Para } |x|<1\,,$$

$$f(x)=\big[1-2x^2+\cdots\big]\big[1-x^2+\cdots\big]=1+(-2-1)x^2+(1+2+\tfrac{2}{3})x^4+\cdots=\boxed{1-3x^2+\tfrac{11}{3}x^4-\cdots}$$

[Alternativamente (más largo) podría desarrollarse la fracción así: $(1+x^2)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\cdots$

O efecuar un cociente de series:

$$\frac{1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\cdots}{1+x^2} \underset{f\text{ es par}}{=} c_0+c_2x^2+c_4x^4+\cdots \Leftrightarrow 1-2x^2+\tfrac{2}{3}x^4+\cdots=c_0+(c_0+c_2)x^2+(c_3+c_4)x^4+\cdots$$

$$x^0:\ 1=c_0\,;\quad x^2:\ -2=c_0+c_2\Rightarrow c_2=-3\,;\quad x^4:\ \tfrac{2}{3}=c_2+c_4\Rightarrow c_4=\tfrac{2}{3}+3=\tfrac{11}{3}\,;\ \ \ldots$$

Lo que, desde luego, no conviene nada es calcularse las cuatro primeras derivadas de la función].

3. Determinar si converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{n!\,n!}\,\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1 \,.$$

Por el criterio del cociente, la serie **converge**.

4. Calcular la integral $\int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos x \, dx$.

Como $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, se tiene que:

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \left[\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x\right] dx = \left[\operatorname{sen} x - \tfrac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x\right]_0^{\pi/2} = 1 - \tfrac{2}{3} = \boxed{\tfrac{1}{3}} \,.$$

O bien, como $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$, es:

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [\cos x + \cos 3x]\, dx = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}[1 - \tfrac{1}{3}] = \boxed{\tfrac{1}{3}} \,.$$

[También se puede hacer iterando la integración por partes].

5. Sea $f(x) = x - \int_1^x \cos(\operatorname{sen} t)\, dt$. Hallar, si existen, los puntos del intervalo $[1,4]$ donde f alcanza sus valores máximo y mínimo.

Como el integrando es continuo en todo $\mathbf{R}$, f es continua (y derivable) y los valores extremos deben existir. Se alcanzarán en los extremos del intervalo o en los posibles puntos con $f' = 0$.

Por el TFC: $f'(x) = 1 - \cos(\operatorname{sen} x) \ge 0$. Sólo se anula en el intervalo si $x = \pi$. La f es creciente en $[1,4]$, con lo que el valor **mínimo** se alcanza en $x = 1$ (y vale $f(1) = 1$) y el **máximo** (no calculable) en $x = 4$.

[$x = \pi$ es un punto de inflexión con tangente horizontal].

6. Determinar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}\, dx$.

Hay impropiedades en 0 y en ∞. Para que converja deben converger las dos integrales: $\int_{0^+}^1$ e $\int_1^{\infty}$.

En $(0,1]$ el integrando es positivo y tenemos que $\operatorname{sen}\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{6} + \cdots$, $e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{6} + \cdots$.

$\int_{0^+}^1$ **es divergente**, pues lo es $\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ y $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}\,/\,(e^{x^2}-1)}{1/x^{3/2}} = \frac{x^2 - \frac{x^3}{6} + \cdots}{x^2 + \frac{x^4}{6} + \cdots} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

Podemos ya asegurar, por tanto, que la integral dada $\int_0^{\infty}$ **es divergente**.

Veamos de todas formas si converge $\int_1^{\infty}$, cuyo integrando cambia de signo. ¿Lo hará absolutamente?

$\left|\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}\right| \le \frac{1}{e^{x^2}-1} \Rightarrow$ si $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^{x^2}-1}$ converge, nuestra $\int_1^{\infty}$ también lo hará (absolutamente).

Para ver que lo hace podemos compararla con diferentes impropias convergentes, por ejemplo:

Como $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ es convergente y $\frac{1/(e^{x^2}-1)}{1/x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\Big(\overset{\text{L'Hôp}}{\to} \frac{2x}{2xe^{x^2}} \to 0$, si no estaba claro$\Big)$,

la $\int_1^{\infty}$ **converge** también. Pero vimos que $\int_{0^+}^1$ divergía, y ya dijimos que la $\int_0^{\infty}$ es **divergente**.