Soluciones del examen de Febrero de 2007 de Cálculo I (C)

1. Precisar si converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\arctan n}$ para: a) $x=0$, b) $x=1$, c) $x=\mathrm{e}$.

Es una serie de potencias. $\frac{|x-2|^{n+1}}{|x-2|^n}\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}|x-2|\frac{\pi/2}{\pi/2}=|x-2|$ ó $\frac{|x-2|}{(\arctan n)^{1/n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{|x-2|}{(\pi/2)^0}=|x-2|$.

Por tanto, converge si $|x-2|<1\Leftrightarrow 1<x<3$, diverge si $|x-2|>1$ y no sabemos aún si $x=1$ ó $x=3$.

Así, para $x=0$ diverge y para $x=\mathrm{e}$ converge. Y si $x=1$, $\sum\frac{(-1)^n}{\arctan n}$ diverge, pues el término general $\not\to 0$.

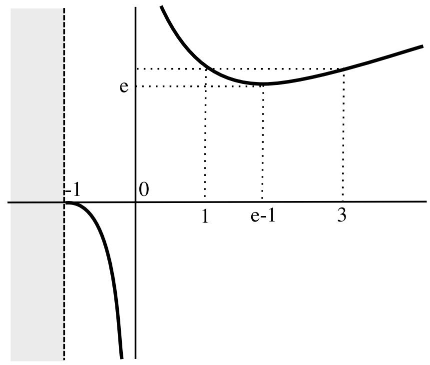
2. Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de $f(x)=\dfrac{1+x}{\log(1+x)}$ en el intervalo $[1,3]$.
Determinar el dominio y la imagen de f .

En $[1,3]$ la f es continua y los valores extremos han de existir.

$f'(x)=\frac{\log(1+x)-1}{[\log(1+x)]^2}=0\to x=\mathrm{e}-1$. Candidatos a extremos:

$f(1)=\frac{2}{\log 2}$, $f(3)=\frac{4}{\log 4}=\frac{2}{\log 2}$, $f(\mathrm{e}-1)=\frac{\mathrm{e}}{\log\mathrm{e}}=\mathrm{e}$.

Como f decrece en $[1,\mathrm{e}-1]$ y crece en $[\mathrm{e}-1,3]$, el valor mínimo es e y el máximo es $\frac{2}{\log 2}$ (que se toma en dos puntos distintos).



$\boxed{\mathrm{dom} f=(-1,0)\cup(0,\infty)}$ [$\log(1+x)$ definido en $(-1,\infty)$ y se anula si y sólo si $x=0$].

Para la imagen, completamos la gráfica. f decrece en $(-1,0)$ y en $(0,\mathrm{e}-1]$ y crece en $[\mathrm{e}-1,\infty)$.

$\lim_{x\to-1^+} f=\frac{0}{-\infty}=0$, $\lim_{x\to 0^{\pm}} f=\frac{1}{0\pm}=\pm\infty$, $\lim_{x\to\infty} f=\infty$. $\boxed{\mathrm{im} f=(-\infty,0)\cup[\mathrm{e},\infty)}$

3. Hallar $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$, si $f(x)=\dfrac{1+2x-\mathrm{e}^{2x-2x^2}}{x^3+\mathrm{sen}\,x^3}$.

Taylor: $\mathrm{e}^{2x-2x^2}=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x^2}=\left[1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots\right]\left[1-2x^2+2x^4+\cdots\right]=1+2x-\frac{8}{3}x^3+\cdots$,

O bien: $\mathrm{e}^{2x-2x^2}=1+[2x-2x^2]+\frac{1}{2}[2x-2x^2]^2+\frac{1}{6}[2x-2x^2]^3+\cdots=1+2x-\frac{8}{3}x^3+\cdots$.

Además: $\log(1+x^3)=x^3+\cdots$. Por tanto: $\dfrac{1+2x-\mathrm{e}^{2x-2x^2}}{x^3+\mathrm{sen}\,x^3}=\dfrac{\frac{8}{3}x^3+\cdots}{2x^3+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{\dfrac{4}{3}}$.

[Por L'Hôpital, como casi siempre, es más largo:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-(2-4x)\mathrm{e}^{2x-2x^2}}{3x^2+3x^2\cos x^3}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[4-(2-4x)^2]\mathrm{e}^{2x-2x^2}}{6x+6x\cos x^3-9x^4\sin x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{16x[1-x]\mathrm{e}^{2x-2x^2}}{x[6+6\cos x^3-9x^3\sin x^3]}=\frac{4}{3}\ ]$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+2+\frac{\mathrm{e}^{2x(1-x)}}{x}}{x^2+\frac{\mathrm{sen}\,x^3}{x}}=\boxed{0}$$ [pues la exponencial tiende a 0 y el seno está acotado].

4. Calcular la integral $\int_0^{1/2} \frac{2x^3-x^2}{2x^2-x-1}\,dx$.

$$\int_0^{1/2} \frac{2x^3-x^2}{2x^2-x-1}\,dx = \int_0^{1/2}\Big[x+\frac{x}{(2x+1)(x-1)}\Big]dx = \Big[\frac{x^2}{2}+\frac{\log|2x+1|}{6}+\frac{\log|x-1|}{3}\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{8}+\frac{\log 2}{6}+\frac{\log\frac{1}{2}}{3} = \boxed{\frac{1}{8}-\frac{\log 2}{6}} .$$

$$\frac{x}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-1)} \qquad \begin{array}{l} x=1 \to B=\frac{1}{3} \\ x=-\frac{1}{2} \to A=\frac{1}{3} \end{array}$$

5. Sea $F(x)=\int_0^{x^3} \frac{2\,e^s}{1+s}\,ds-1$. Hallar $F'(2)$. Estudiar cuántas veces se anula F en el intervalo $[0,1]$.

Por ser el integrando continuo si $s>-1$ y ser x^3 derivable, el teorema fundamental del cálculo asegura:

$$F'(x) = \frac{2\,e^{x^3}}{1+x^3}\,3x^2 , \text{ para } x>-1 \;\to\; \boxed{F'(2)=\tfrac{8}{3}\,e^8} .$$

Como $\frac{6x^2 e^{x^3}}{1+x^3}>0$ en $(0,1]$, la F es estrictamente creciente en $[0,1]$. Además, es $F(0)=-1$.

Veamos que $F(1)>0$ con lo que la F **se anulará una vez** (si fuese negativo, ninguna):

En $[0,1]$ es $e^s\geq 1$ y $1+s\leq 2 \Rightarrow \frac{2\,e^s}{1+s}>\frac{2\cdot 1}{2}=1 \Rightarrow F(1)=\int_0^1\frac{2\,e^s}{1+s}\,ds-1>\int_0^1 1\,ds-1=0$.

O bien: si $f(s)=\frac{2e^s}{1+s}$, es $f'(s)=\frac{2se^s}{(1+s)^2}$ $\Rightarrow$ en $[0,1]$ crece f $\Rightarrow f(s)\geq f(0)=2 \Rightarrow F(1)>1$.

Mas formas: $f(s)=\frac{2\,[1+s+\frac{1}{2}s^2+\cdots]}{1+s}>2$, si $s>0$ ...

[Podríamos aproximar $F(1)$ integrando el desarrollo $f(s)=\big[1+s+\frac{1}{2}s^2+\cdots\big]\big[1-s+s^2+\cdots\big]$; pues estamos justo dentro de intervalo de convergencia].

6. Analizar la convergencia de $\int_0^\infty \frac{\log(1+e^{ax})}{1+x^2}dx$ para: i) $a=0$, ii) $a=-1$, iii) $a=1$.

i) $\int_0^\infty \frac{\log 2}{1+x^2}dx = \log 2\,\arctan x\Big]_0^\infty = \frac{\pi\log 2}{2}$ **converge** [o comparando con la convergente $\int^\infty \frac{dx}{x^2}$].

ii) $e^{-x}\leq 1$ en $[0,\infty) \Rightarrow \frac{\log(1+e^{-x})}{1+x^2}\leq\frac{\log 2}{1+x^2}$, la impropia es menor que una convergente y **converge**.

$\big[$¿A quién se parece en el infinito el integrando? Como e^{-x} es pequeño, será $\log(1+e^{-x})\sim e^{-x}$ (calculando el límite se comprueba que es así). Por tanto, la impropia se comporta como $\int^\infty \frac{dx}{x^2e^x}$, que comparando casi con cualquier impropia convergente se ve que converge$\big]$.

iii) $\log(1+e^x)$ se parecerá en el infinito a $\log(e^x)=x$, y el integrando se comportará como $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)/(1+x^2)}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,\frac{\log(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(e^x)+\log(e^{-x}+1)}{x} = 1 \quad \text{[o usando L'H].}$$

Como $\int^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, la nuestra también **diverge**.

Soluciones del examen de Septiembre de 2007 de Cálculo I (C)

1. Sea $f(x)=(x^2+\cos x)\arctan\frac{1}{x^2}$. Hallar, si existen, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

$\frac{1}{x^2}\to+\infty$ cuando $x\to 0$ (tanto por la derecha como por la izquierda) $\Rightarrow \arctan\frac{1}{x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$.

Además $(x^2+\cos x)$ es función continua en 0 . Por tanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=(0^2+\cos 0)\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$.

Cuando $x\to\infty$, se tiene que $x^2\to\infty$, $\cos x$ no tiene límite (pero está acotado) y $\arctan\frac{1}{x^2}\to 0$.

Se tiene: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\arctan\frac{1}{x^2}+\cos x\arctan\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\arctan t^2}{t^2}+0=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t^2+o(t^2)}{t^2}=\boxed{1}$.

[Más largo sería usar L'Hôpital para calcular $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\arctan t^2}{t^2}$, o directamente $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan(1/x^2)}{1/x^2}$].

2. Sea $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$. **a]** Determinar su dominio. **b]** Hallar, si existe, $f'(0)$.
c] Probar que f es decreciente en todo su dominio. **d]** ¿Cuántas soluciones tiene $f(x)=-1$?
Si $I=\int_3^8 f$, **e]** calcular I , **f]** probar que $I<\frac{5}{3}$ (no se necesita **e]**).

a] El dominio D lo constituyen los x para los que la raíz existe: $\boxed{D=[-1,\infty)}$ (en 0 se ha definido).

b] Lo más corto es utilizar el desarrollo de Taylor de la función:

$$f(x)=\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2+\cdots-1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x+\cdots\Rightarrow f \text{ continua en } 0 \text{ y } \boxed{f'(0)=-\frac{1}{8}}.$$

También se puede escribir f de una forma en que queda claro que es continua y derivable en $x=0$:

$$f(x)=\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}\Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{8}.$$

[Directamente: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2}=\cdots=-\frac{1}{8}$, por L'Hôpital o Taylor].

c] Con la expresión de arriba está claro que $f'(x)<0\ \forall x\in D\ \Rightarrow\ f$ estrictamente decreciente en D.

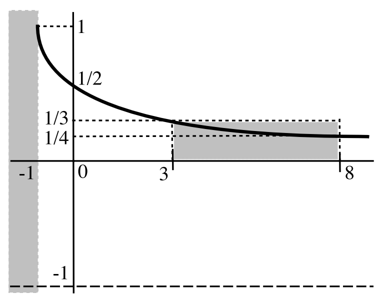
[Directamente: $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{2\sqrt{1+x}}-\sqrt{1+x}+1}{x^2}=\dfrac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2\sqrt{1+x}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}\left(2\sqrt{1+x}+2+x\right)}<0$].

d] f decreciente y $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ [o bien $\sqrt{1+x}\gtrless 1$ si $x\gtrless 0$] $\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow$ **nunca puede ser** $f(x)=-1$.

[Ojo: $\sqrt{1+x}-1=-x$, $1+x=(1-x)^2$, $x^2-3x=0$, $x=0,3$ soluciones falsas].

Con lo anterior y algunos valores podemos dibujar la gráfica:

$f(-1)=1$, $f'(-1^+)=-\infty$, $f(3)=\frac{1}{3}$, $f(8)=\frac{1}{4}$ $\longrightarrow$



e] $I\underset{\uparrow}{=}\displaystyle\int_2^3\frac{(t-1)2t\,dt}{t^2-1}=\int_2^3\frac{2t\,dt}{t+1}=2-\Big[2\log|t+1|\Big]_2^3=\boxed{2-2\log\frac{4}{3}}$

$\sqrt{1+x}=t$, $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$, $\sqrt{1+8}=3$, $\sqrt{1+3}=2$

f] Como f es decreciente, en $(3,8]$ es $f(x)<f(3)=\frac{1}{3}\Rightarrow I<\int_3^8\frac{dx}{3}=\frac{5}{3}$ (claro en la gráfica).

O usando el valor exacto: $\log(1+\frac{1}{3})=\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\cdots\Rightarrow\log\frac{4}{3}>\frac{5}{18}\Rightarrow I<2-\frac{5}{9}=\frac{13}{9}<\frac{5}{3}$.

3. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^n x^n$, según los valores de x.

La serie pide a gritos la utilización del criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left(\tfrac{n-1}{2n}\right)^n |x|^n}=\frac{n-1}{2n}|x| \underset{n\to\infty}{\to} \frac{|x|}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\text{converge si } |x|<2\\ \text{diverge si } |x|>2\end{cases} \quad \text{y si } |x|=2 \text{ aún no sabemos.}$$

Para $x=2$ queda la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, que diverge, pues su término general $\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}\to e^{-1}\neq 0$.

Y para $x=-2$, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ también diverge, ya que tampoco tiende a 0 su término general [no tiene límite, los términos pares $\to e^{-1}$ y los impares $\to -e^{-1}$].

En resumen, la serie de potencias converge exactamente en el intervalo $\boxed{(-2,2)}$.

4. Sea $F(x)=\int_{-1}^{x} t\left[e^t-e^{t^4}\right]dt$. **a]** Hallar $F'(-1)$. **b]** Calcular $F(1)$.
c] Determinar los valores máximo y mínimo de F en $[-1,1]$, si existen.

a] El teorema fundamental del cálculo (integrando continuo) nos asegura que $F'(x)=x\left[e^x-e^{x^4}\right]\ \forall x$.

Por tanto, $\boxed{F'(-1)=e-e^{-1}}$.

b] $$F(1)=\int_{-1}^{1}\left[te^t-te^{t^4}\right]dt \underset{\substack{\uparrow\\ t\,e^{t^4}\text{ impar}}}{=} \int_{-1}^{1}te^t\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{partes}}}{=} (t-1)e^t\Big]_{-1}^{1}=\boxed{\frac{2}{e}}.$$

c] Valores máximo y mínimo (existen por ser F continua) se dan o en -1 o en 1 o en los x con

$$F'(x)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ó } e^x=e^{x^4}\Leftrightarrow x=x^4\Leftrightarrow x=0,\ x=1.$$

Como F es estrictamente creciente en $[-1,1]$ (si $x<0$ es $e^x<e^{x^4}$ y si $0<x<1$ es $e^x>e^{x^4}$),

el valor mínimo es $\boxed{F(-1)=0}$ y el valor máximo $\boxed{F(1)=\frac{2}{e}}$.

[En $x=0$ lo que hay es un punto de inflexión con tangente horizontal].

5. Analizar si converge la integral $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$.

Sólo hay impropiedad en el infinito. Como el integrando no tiene signo fijo consideramos $\int_1^{\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}dx$.

Como $0\le\frac{|\cos x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ y la impropia $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge, el criterio de comparación por desigualdades asegura que la integral del valor absoluto converge y, por tanto, también **converge** la integral inicial.

[En otros grupos se preguntaba además **'... y deducir que converge** $\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{x}$**'**.

Para verlo no bastan los criterios, pues que $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ diverge no implica que lo haga $\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{x}$.

Pero integrando por partes: $\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x\,dx}{x}=-\left[\frac{\cos x}{x}\right]_1^{\infty}-\int_1^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2}=\cos 1-\int_1^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2}$,

con lo que la primera impropia converge, ya que hemos visto que lo hace la última].