Matemáticas (grupos C, D y E) **Primer parcial** (22 de noviembre de 2010)
Matemáticas (grupo B) **Primer parcial** (22 de noviembre de 2010)

1. Hallar el dominio de la función $f(x)=\frac{1}{1-x+\sqrt{5-x^2}}$. [1.5 puntos]

2. Hallar (si existe) el límite de las sucesiones: **a]** $a_n=2n\operatorname{sen}n-\sqrt{n^3+\cos n}$, **b]** $b_n=\frac{5+(-2)^{n+1}}{3^n\cos\frac{\pi}{n+2}}$. [2 puntos]

3. Sea $f(x)=x\arctan\big(\log|x|\big)$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$. **a]** Estudiar si es continua y derivable en $x=0$.
b] Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$. [2 puntos]

4. Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de $f(x)=\operatorname{sen}x+2|x|$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$. [1.5 puntos]

5. Sea $g(x)=x^2+\frac{8}{1-x}$. **i]** Hallar $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)$. **ii]** Estudiar crecimiento y decrecimiento.
iii] Resolver $g''(x)=0$. **iv]** Precisar cuántas veces se anula g en su dominio. [3 puntos]

5. Sea $g(x)=x^2+\frac{8}{1-x}$. **i]** Hallar $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)$. **ii]** Estudiar crecimiento y decrecimiento.
iii] Hallar las soluciones reales y complejas de $g''(x)=0$. **iv]** Dibujar la gráfica de g. [3 puntos]

Soluciones

1. f definida si $5\geq x^2\Leftrightarrow |x|\leq\sqrt{5}$ y si además no se anula el denominador, que lo hace cuando:

$$\sqrt{5-x^2}=x-1\Rightarrow 5-x^2=(x-1)^2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow \begin{array}{l} x=2 \text{ (lo cumple)}\\ x=-1 \text{ (inventada con el cuadrado)}\end{array}$$

$$\boxed{\operatorname{dom}f=\left[-\sqrt{5},2\right)\cup\left(2,\sqrt{5}\right]}$$

2. $a_n=n\left(2\operatorname{sen}n-\sqrt{n+\frac{\cos n}{n^2}}\right)\to\boxed{-\infty}$ [“∞(acotada$-\infty$)”]. $b_n=\frac{5/3^n-2(-1)^n(2/3)^n}{\cos\frac{\pi}{n+2}}\to\boxed{0}$ [“$\underset{\text{cos continua}}{\frac{0-ac\times 0}{1}}$”].

3. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f(0)\Rightarrow f$ **continua**. $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h\arctan(\log|h|)-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\arctan(\log|h|)=\boxed{-\frac{\pi}{2}}$.
Si $x\neq 0$, $f'(x)=\arctan(\log|x|)+\frac{1}{1+(\log|x|)^2}$ $\left[\to -\frac{\pi}{2}+0=f'(0)\text{, de otra forma}\right]\Rightarrow f'(1)=\arctan 0+1=1$.

Además $f(1)=0\Rightarrow$ recta tangente: $\boxed{y=x-1}$.

4. $f(x)=\begin{cases}\sin x+2x, & x\geq 0\\ \sin x-2x, & x\leq 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\cos x+2, & x>0\ (f\text{ crece})\\ \cos x-2, & x<0\ (f\text{ decrece})\end{cases}\neq 0$.

Valor **mínimo** en el punto sin derivada: $f(0)=\boxed{0}$.
El máximo en uno de los extremos. $f(-\frac{\pi}{2})=\pi-1>f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$ $\left[\Leftrightarrow\pi>\frac{9}{4}\right]$. Valor **máximo** $=\boxed{\pi-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=-\infty$ $\left[0+\frac{1}{-0}\right]$. $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\infty$ $\left[0+\frac{1}{+0}\right]$.

$g'(x)=2x+\frac{8}{(1-x)^2}=\frac{2(x^3-2x^2+x+4)}{(1-x)^2}=\frac{2(x+1)\overset{>0}{(x^2-3x+4)}}{(1-x)^2}\Rightarrow$

g decrece en $(-\infty,-1]$ y crece en $[-1,1)$ y en $(1,\infty)$.

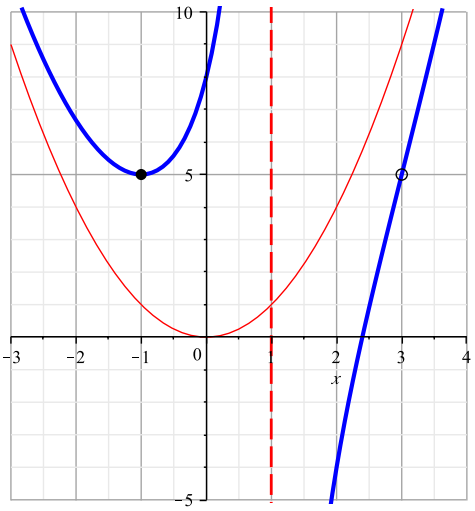
$g''(x)=2+\frac{16}{(1-x)^3}=0\Leftrightarrow(1-x)^3=-8\Leftrightarrow x=3$ $\left[\text{y } x=\pm i\sqrt{3}\right]$.

$g(-1)=g(3)=5$, $g(0)=8$, $g(2)=-4$.

La gráfica se acercará a la de $y=x^2$ para $|x|$ grande.

Como g es continua y $g(2)g(3)<0$ cortará el eje en $(2,3)$, 1 vez por el crecimiento. La gráfica prueba que sólo esa vez.

Sin la gráfica: $g(x)=0\Leftrightarrow x^3-x^2-8=0$, polinomio fácil de pintar (o incluso basta usar el criterio de Descartes).



Matemáticas (grupos B, C, D y E) **Segundo parcial** (31 de enero de 2011)

1. Precisar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}x^n$ para: **a]** $x=-1$; **b]** $x=\frac{1}{9}$. [2 puntos]

2. Sea $f(x)=\dfrac{\log(1+x)\sqrt{1+x}-x}{\arctan x^3}$. Hallar (razonadamente): **a]** $\lim_{x\to 0} f(x)$, **b]** $\lim_{x\to\infty} f(x)$. [2 puntos]

3. Sea $H(x)=\int_{-x^2}^{4}\frac{t\,dt}{1+|t|}$. **a]** Hallar $H'(2)$ y $H(2)$. **b]** Hallar el valor mínimo de H en $[0,2]$. [2 puntos]

4. **a]** Calcular la integral $\int_{-1}^{0}x^3\operatorname{sen}x^2\,dx$. **b]** Decidir si esta integral es mayor o menor que 0 . [2 puntos]

5. Estudiar si converge la integral impropia $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$. [2 puntos]

Soluciones

1. Esta serie de potencias converge si $\sqrt[n]{|a_n|}=\left(3+\frac{1}{n}\right)^2|x|\underset{n\to\infty}{\to}9|x|<1$, es decir, si $|x|<\frac{1}{9}$. Y diverge si $|x|>\frac{1}{9}$.
Por tanto, para $x=-1$ **diverge** y si $|x|=\frac{1}{9}$ el criterio de la raíz no basta. Sustituyendo en la serie:
$|x|=\frac{1}{9}\to\sum\left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n}\frac{1}{3^{2n}}=\sum\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}=\sum\left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{2/3}$ que **diverge**, pues $a_n\to e^{2/3}$.
Sin verla como serie de potencias: para $x=-1$ diverge porque el término general no tiende a 0 $\left[\begin{smallmatrix}\text{pares}\to\infty\\ \text{impares}\to-\infty\end{smallmatrix}\right]$.

2a] $\log(1+x)\sqrt{1+x}=\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right]\left[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots\right]=x+[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}]x^2+[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}]x^3+\cdots=x-\frac{1}{24}x^3+\cdots$

Por tanto, $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{24}x^3+\cdots-x}{x^3+\cdots}\underset{x\to 0}{\to}\boxed{-\frac{1}{24}}$.

$\left[\text{L'Hôpital no es muy largo si se simplifica: } \overset{\text{L'H}}{\to}\dfrac{\frac{1}{1+x}\sqrt{1+x}+\frac{\log(1+x)}{2\sqrt{1+x}}-1}{\frac{3x^2}{1+x^6}}=\dfrac{1+x^6}{6\sqrt{1+x}}\,\dfrac{2+\log(1+x)-2\sqrt{1+x}}{x^2}\overset{\text{L'H}}{\to}\dfrac{1}{12}\,\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{x}\cdots\right]$.

b] $\lim_{x\to\infty}f(x)=\boxed{-\infty}$, pues el denominador $\to\frac{\pi}{2}$ y $x\left(\frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}-1\right)\to-\infty$ $\left[\infty(0\cdot 1-1)\right]$.

3. **a]** Integrando continuo y límites derivables $\Rightarrow H'(x)=0-\frac{-x^2}{1+|-x^2|}(-2x)=\frac{-2x^3}{1+x^2}\ \forall x\Rightarrow H'(2)=\boxed{-\frac{16}{5}}$.
$H(2)=\int_{-4}^{4}=\boxed{0}$, pues el integrando es impar. $\left[\text{Largo: }\int_{-4}^{0}\frac{t}{1-t}+\int_0^4\frac{t}{1+t}=-t-\log|1-t|\Big]_{-4}^{0}+t-\log|1+t|\Big]_0^4=0\right]$.
b] $H'(x)<0$ en $(0,2]\Rightarrow H$ decrece y el mínimo es $H(2)=\boxed{0}$. [Valor para el que el 'area negativa' es mayor].

4. $t=x^2\to\frac{1}{2}\int_1^0 t\operatorname{sen}t\,dt=-\frac{t}{2}\cos t\Big]_1^0+\frac{1}{2}\int_1^0\cos t\,dt=\boxed{\frac{\cos 1-\operatorname{sen}1}{2}}$
$\left[\text{o partes directamente, } dv=x\operatorname{sen}x^2dx\,,\ u=x^2\ \to\int_{-4}^{0}=-\frac{1}{2}x^2\cos x^2\Big]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}x\cos x^2dx\ldots\right]$.
b] La integral es $\boxed{<0}$, pues $\cos 1<\operatorname{sen}1$, ya que $1>\frac{\pi}{4}$. O porque el integrando es negativo, pues x^3 lo es y $\operatorname{sen}x^2$ es positivo en el intervalo. O (largo) integrando Taylor: $\int_{-1}^{0}[x^5-\frac{x^9}{6}+\cdots]=-\frac{1}{6}+\frac{1}{60}-\cdots<-\frac{3}{20}$.
O porque $\cos 1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\cdots<\frac{13}{24}$, $\operatorname{sen}1=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\cdots>\frac{5}{6}\Rightarrow\cos 1-\operatorname{sen}1<\frac{13}{24}-\frac{5}{6}<0$.

5. Hay dos impropiedades, la del infinito y otra en 0^+, por anularse el denominador.
En 0^+ converge porque se comporta como la convergente $\int_{0^+}\frac{dx}{x^{1/2}}$: $\dfrac{(1-\cos x)/x^{5/2}}{1/x^{1/2}}=\dfrac{1-1+\frac{1}{2}x^2-\cdots}{x^2}\underset{x\to 0^+}{\to}\frac{1}{2}$.
Y como $0\le\frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\le\frac{2}{x^{5/2}}$, en ∞ es menor que la convergente $\int^{\infty}\frac{2dx}{x^{5/2}}$ y por lo tanto converge.
Como las dos convergen, la dada es **convergente**. [No sabemos calcular su valor].