Matemáticas **Soluciones del primer parcial** (21 de noviembre de 2011)

1. Sea $f(x)=\log\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{x}\right)$. Hallar su dominio y calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to 2/3^+} f(x)$. [1.5 puntos]

2. Hallar razonadamente el límite de las sucesiones: **a]** $a_n=\sqrt{n}\left[\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right]$, **b]** $b_n=\frac{n\arctan n}{e^{1/n}-\sqrt{n}}$. [2 puntos]

3. Sea $f(x)=\arctan\left(\sqrt{3\cos x}\right)$. **a]** Precisar los $x\in\mathbf{R}$ que cumplen i) $f(x)=\frac{\pi}{3}$, ii) $f(x)=\frac{7\pi}{3}$. **b]** Hallar $f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$. [2 puntos]

4. Sea $f(x)=x^3-3|2x-1|$. **a]** Estudiar su derivabilidad. **b]** Hallar, si existen, los valores máximo y el mínimo de f en el intervalo $[0,2]$. [2 puntos]

5. Sea $g(x)=3e^{2x}-e^x-x$. **a]** Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$. **b]** Hallar todos los x reales que anulan g' y g''. **c]** Precisar cuántas veces se anula g en su dominio. [2.5 puntos]

1. $\frac{3x-2}{2x}>0 \Leftrightarrow \underset{-/-}{x<0}$ ó $\underset{+/+}{x>2/3}$. $D=\boxed{(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)}$. [Es falso para $x<0$ que $\frac{3}{2}>\frac{1}{x}\Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$].

$\lim\limits_{x\to 2/3^+} f(x)=\boxed{-\infty}$ $\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{x}=\frac{3x-2}{2x}\xrightarrow{x\to 2/3^+}+0\right.$, ya que $\left.x>\frac{2}{3}\right]$.

2. a] $[\infty\times(\infty-\infty)]$ $a_n=\sqrt{n}\,\frac{n+4-n}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}\to\frac{4}{1+1}=\boxed{2}$.

b] $\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]$ $b_n=\frac{\sqrt{n}\arctan n}{\frac{e^{1/n}}{\sqrt{n}}-1}\to\boxed{-\infty}$ $\left[\frac{\infty\times(\pi/2)}{\frac{1}{\infty}-1}\right]$. [Un error extendido es escribir "$\frac{1}{0}=\infty$" tras dividir por n].

3. a] i) $f(x)=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\sqrt{3\cos x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow\boxed{x=2k\pi}$, $k\in\mathbf{Z}$.

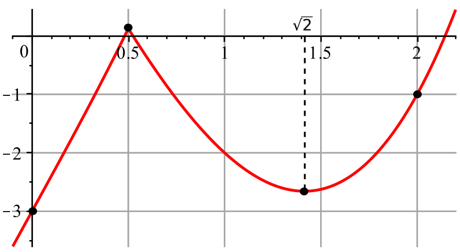
ii) Como $\arctan x$ toma valores entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, **ningún** x puede cumplir la igualdad.

[Es falso que $f(x)=\frac{7\pi}{3}\Leftrightarrow\sqrt{3\cos x}=\tan\frac{7\pi}{3}=\sqrt{3}$].

b] $f'(x)=\frac{1}{1+3\cos x}\sqrt{3}\,\frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}(-\operatorname{sen}x)=\frac{-\sqrt{3}\operatorname{sen}x}{2\sqrt{\cos x}\,(1+3\cos x)}$, $f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}(-\sqrt{3}/2)}{2/\sqrt{2}\,(1+3/2)}=\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{10}}$.

4. a] f derivable seguro si $x\neq\frac{1}{2}$. $f(x)=\begin{cases}x^3+6x-3, & x\le\frac{1}{2}\\ x^3-6x+3, & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$,

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+6, & x<\frac{1}{2},\ f'\left(\frac{1}{2}^-\right)=\frac{27}{4}\\ 3x^2-6, & x>\frac{1}{2},\ f'\left(\frac{1}{2}^+\right)=-\frac{21}{4}\end{cases}\Rightarrow\nexists f'\left(\frac{1}{2}\right)$.



b] f es continua en todo $\mathbf{R}$, por ser composición y suma de continuas (el valor absoluto lo es). Existirán los extremos.

$f'\left(\sqrt{2}\right)=0$. f decrece en $\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ y crece en el resto.

$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}}>f(2)=-1>f\left(\sqrt{2}\right)=3-4\sqrt{2}>\boxed{f(0)=-3}$, pues $6>4\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}>\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{9}{4}>2$.

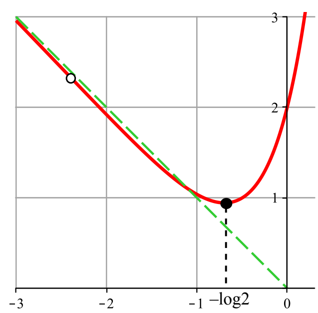
5. a] $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\infty$ $[0+0+\infty]$; $\lim\limits_{x\to\infty} e^{2x}\left(3-e^{-x}-xe^{-2x}\right)=\infty$ $\left[\infty\times(3-0-0)\right.$ pues $\left.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0\right]$.

b] $g'(x)=6e^{2x}-e^x-1=(3e^x+1)(2e^x-1)=0$ para $x=\boxed{-\log 2}$

$\left[6t^2-t-1=0,\ t=\frac{1}{12}\left(1\pm\sqrt{1+24}\right)=-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

$g''(x)=e^x(12e^x-1)=0\Leftrightarrow x=\boxed{-\log 12}$. [Si $x>-\log 12$ es $\smile$].

c] A la vista de $g'(x)$, hasta $x=-\log 2$ decrece y después crece $\Rightarrow$ mínimo absoluto $g(\log\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\log 2>0\Rightarrow$ no se anula **nunca**.



1. Sea $F(x)=\int_{-2}^{\sqrt{2x}}\frac{t^3\,dt}{8+t^2}$. **a]** Hallar $F'(2)$ y $F(2)$. **b]**(F) Precisar el signo de $F(8)$.
c](F) Estudiar si F es inyectiva en el intervalo $[0,8]$. [1.5-3 puntos]

a] Integrando continuo $\forall t$ y $\sqrt{2x}$ función derivable para $x>0 \Rightarrow F$ es derivable en $(0,\infty)$ y se tiene:

$$F'(x)=\frac{2^{3/2}x^{3/2}}{8+2x}2^{1/2}\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{x}{4+x}\Rightarrow F'(2)=\boxed{\frac{1}{3}}.\quad F(2)=\int_{-2}^{2}=\boxed{0}$$, por ser el integrando impar.

b] $\int_{-2}^{4}=\int_{-2}^{2}+\int_{2}^{4}=\int_{2}^{4}>0$ pues el integrando es positivo en $[2,4]$ [o por ser estrictamente creciente y ser $F(2)=0$].

c] $F'(x)>0$ en $(0,8]\Rightarrow F$ es estrictamente creciente en $[0,8]\Rightarrow F$ **es inyectiva** en el intervalo.

$\big[$Hallar la primitiva $\frac{1}{2}t^2-4\log(8+t^2)$ ayuda poco$\big]$.

2. a] Determinar si converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5-\cos n}{n+3^n}$.
b] Precisar los valores de x para los que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{2n}}{2^n\sqrt{n}}$. [2.5 puntos]

a] Lo más corto, comparación por desigualdades: $\sum\frac{5-\cos n}{n+3^n}\leq 6\sum\left(\frac{1}{3}\right)^n$ geométrica convergente $\Rightarrow$ **converge**.

Más largo acotando el numerador y utilizando cociente: $\sum\frac{5-\cos n}{n+3^n}\leq\sum\frac{6}{n+3^n}$; $\frac{n+3^n}{n+1+3^{n+1}}=\frac{n3^{-n}+1}{(n+1)3^{-n}+3}\to\frac{1}{3}<1$.

También se podría ver que es menor que la convergente $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$: $\frac{a_n}{1/2^n}=\frac{5-\cos n}{n2^{-n}+(3/2)^n}\to 0\ \left[\frac{ac}{\infty}\right]$.

b] Lo más corto, raíz: $\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{(n^{1/n})^2|x|^2}{2^{\sqrt{n}}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\Rightarrow$ **converge** $\forall x$.

Cociente más largo: $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{(n+1)^2}{n^2}|x|^2\frac{1}{2^{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}}\to 0$, pues $(n+1)^{3/2}-n^{3/2}=\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^{3/2}+n^{3/2}}\to\infty$.

3. Si $f(x)=\frac{(1+x^2)^{1/3}\arctan x-x}{x\,\operatorname{sh}x^4}$, hallar razonadamente $\lim_{x\to 0}f(x)$ y $\lim_{x\to\infty}f(x)$. [2 puntos]

$\operatorname{sh}x^4=x^4+\cdots\ (\forall x)$, $(1+x^2)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x^2+\frac{(1/3)(-2/3)}{2}\left(x^2\right)^2+\cdots=1+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+\cdots$ (si $|x|<1$),

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots$ (si $|x|<1$) $\Rightarrow f(x)=\frac{x+(\frac{1}{3}-\frac{1}{3})x^3+(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9})x^3+\cdots-x}{x^5+\cdots}=\frac{-\frac{1}{45}x^5+\cdots}{x^5+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{-\frac{1}{45}}$.

$\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}\right)^{1/3}\frac{\arctan x}{\operatorname{sh}x^4}-\frac{1}{\operatorname{sh}x^4}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{0}\ \left[0\times\frac{\pi/2}{\infty}-\frac{1}{\infty}\right]$.

5(ABEF). a] Hallar $I=\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}2x\,\mathrm{e}^{-2\cos x}\,dx$. **b]** Probar, sin utilizar el resultado de **a]**, que $0\leq I\leq\frac{2}{3}$. [2.5 puntos]

4(CD). Hallar $I=\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}2x\,\mathrm{e}^{-2\cos x}\,dx$. [2 puntos]

a] $I=\int_0^{\pi/3}2\operatorname{sen}x\cos x\,\mathrm{e}^{-2\cos x}\,dx\overset{t=\cos x}{=}-\int_1^{1/2}2t\,\mathrm{e}^{-2t}dt=\left[t\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^{1/2}-\int_1^{1/2}\mathrm{e}^{-2t}dt=\left[(t+\tfrac{1}{2})\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^{1/2}=\boxed{\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{3}{2\mathrm{e}^2}}$.

b] En $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ es $0\leq\operatorname{sen}2x\leq 1$ y $\cos x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\mathrm{e}^{-2\cos x}\leq\mathrm{e}^{-1}$. Por tanto $0\leq I\leq\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\mathrm{e}}=\frac{\pi}{3\mathrm{e}}<\frac{4}{3\cdot 2}=\frac{2}{3}$.

5(CD). Precisar si converge la integral impropia $\int_2^{\infty}\frac{\arctan\frac{2}{x}}{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x-1}}\,dx$. [2 puntos]

4(ABE). Precisar si converge la integral impropia $\int_3^{\infty}\frac{\arctan\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$. [1.5 puntos]

5(CD). Hay dos impropiedades, la del infinito y además otra en 2^+ , pues se anula el denominador.

En 2^+ se comporta como la convergente $\int_{2^+}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$: $\frac{f(x)}{1/\sqrt{x-2}}=\frac{\arctan\frac{2}{x}}{\sqrt{x-1}}\underset{x\to 2^+}{\longrightarrow}\frac{\pi}{4}$.

Y en ∞ como la convergente $\int_3^{\infty}\frac{dx}{x^2}$: $\frac{f(x)}{1/x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\frac{\arctan\frac{2}{x}}{1/x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}2\ \left[\frac{\arctan 2t}{t}\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}2\right]$.

Como ambas convergen, la dada es **convergente**.
[No sabemos calcularla].

[Para **4(ABE)**, hay que factorizar el denominador, ver que no se anula en $[3,\infty)$ y argumentar en el ∞ como arriba].