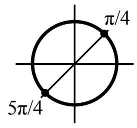
Matemáticas (grupo C) **Soluciones del primer parcial** (24 de noviembre de 2014)

1. Calcular $\left(\frac{2-4\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}\right)^6$ y expresarlo en la forma $a+b\mathrm{i}$. [1 punto]

$z=\frac{(2-4\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}=\frac{2-12-10\mathrm{i}}{1+9}=-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}5\pi/4}$, pues $|z|=\sqrt{1+1}$ y $\tan\theta=1$ (tercer cuadrante).

$z^6=\left(\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}5\pi/4}\right)^6=8e^{\mathrm{i}15\pi/2}=8e^{\mathrm{i}3\pi/2}=\boxed{-8\mathrm{i}}$. $\big[$Mejor que hacer $(1+\mathrm{i})^6$ con el binomio de Newton$\big]$.



2. Hallar el límite de la sucesión $a_n=\left(n-\frac{n^2}{n+4}\right)^{-\frac{n+\log n}{2n}}$. [1 punto]

$\left(\frac{4n}{n+4}\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\log n}{2n}}\to 4^{-1/2}=\boxed{\frac{1}{2}}$, pues $\frac{4}{1+4n^{-1}}\to 4$ y sabemos que $\frac{\log n}{n}\to 0$. [Dedicado a quienes quitan constantes a mitad de cálculo].

3. Escribir, si existe, una función f definida en todo $\mathbf{R}$ tal que la sucesión $\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ no tienda a $f(0)$. [1 punto]

La f debe ser una función discontinua en $x=0$. Por ejemplo, $f(x)=0$ si $x\neq 0$, $f(0)=2014$.

3*. Si $f(x)=\frac{\arctan x}{x+5}$, razonar si es cierto que $\forall\varepsilon>0\ \exists M$ tal que si $x>M$ entonces $|f(x)-1|<\varepsilon$. [1 punto]

Es falso, pues la afirmación de la derecha dice que f tiende a 1 cuando $x\to\infty$ y la nuestra tiende a 0 $\left(\frac{acot}{\infty}\right)$.

4. Hallar la recta tangente a la curva $y^4-4xy^2+2x=2$ en el punto $(1,2)$. [1 punto]

Derivando implícitamente: $4y^3y'-8xyy'-4y^2+2=0$, $y'=\frac{2y^2-1}{2y(y^2-2x)}\xrightarrow{(2,1)}\frac{7}{8}$. Tangente: $y=2+\frac{7}{8}(x-1)$, $\boxed{y=\frac{7x+9}{8}}$.

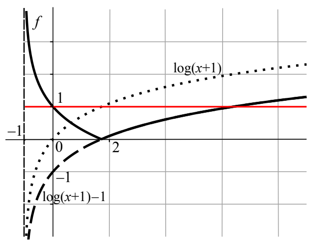
5. Dibujar la gráfica de $f(x)=\big|\log(x+1)-1\big|$ a partir de la de $\log x$ y hallar los reales x que cumplen $f(x)<1$. [1.5 puntos]

La gráfica de $\log(x+1)$ es la conocida del logaritmo trasladada uno hacia la izquierda. $\log(x+1)-1$ es la anterior, llevada 1 hacia abajo. El $|\cdot|$ refleja hacia arriba la parte de la última gráfica que queda por debajo del eje x. El dominio de f es $(-1,\infty)$.

$$\big|\log(x+1)-1\big|<1 \Leftrightarrow -1<\log(x+1)-1<1 \Leftrightarrow 0<\log(x+1)<2$$

$$\underset{e^x\text{ creciente}}{\Leftrightarrow} 1<x+1<e^2 \Leftrightarrow \boxed{0<x<e^2-1}.$$

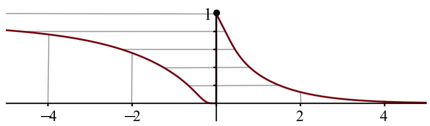
(coherente con el dibujo)



6. Sea $g(x)=\frac{1}{e^x+e^{-1/x}}$, $g(0)=1$. **a]** Precisar si es continua y derivable en $x=0$. **b]** ¿Es g inyectiva en $[0,\infty)$? ¿Lo es en todo su dominio? [1.5 puntos]

a] $g\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\frac{1}{1+0}=1$, $g\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}0$ $\left(\frac{1}{1+\infty}\right)$. g no continua $\Rightarrow$ g no derivable.

b] $g'=-\frac{1}{(e^x+e^{-1/x})^2}\left(e^x+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\right)<0\Rightarrow g$ es estrictamente decreciente (y, por tanto, inyectiva) en $[0,\infty)$. No lo es en todo $\mathbf{R}$. De hecho, como $g\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}1$ y $g\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$, toma todos sus valores (menos el 1) dos veces. [Quizás se podría ver a ojo que $f(-1)=f(1)$].

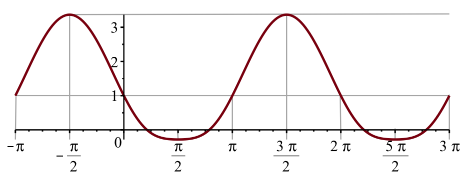


7. Sea $h(x)=e^{\operatorname{sen}x}-3\operatorname{sen}x$. **a]** Estudiar su paridad y periodicidad. **b]** Hallar todos los x tales que $h'(x)=0$. **c]** Precisar cuántos ceros tiene h en el intervalo $[-\pi,\pi]$. [1.5 puntos]

a] $h(-x)=e^{-\operatorname{sen}x}+3\operatorname{sen}x \begin{array}{l}\neq h(x)\\ \neq -h(x)\end{array}$. Ni par ni impar. De periodo 2π.

b] $h'(x)=\cos x\left(e^{\operatorname{sen}x}-3\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\left[(\cdot)<0\text{ pues } e^{\operatorname{sen}x}<e<3\right]$.

c] h crece ($\cos<0$) desde $h(-\pi)=1$ hasta el máximo $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{e}+3$, después decrece ($\cos>0$) hasta $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=e-3<0$, y vuelve a crecer hasta $h(\pi)=1$. Por tanto, tiene exactamente 2 ceros en el intervalo.



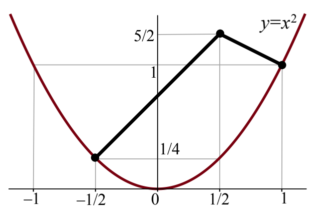
8. Hallar el punto de la parábola $y=x^2$ más cercano al punto $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$. [1.5 puntos]

La distancia de $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$ a un punto de la parábola (x,x^2) es $\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{5}{4}\right)^2}$.

Minimizamos su cuadrado: $D=x^2-x+\frac{1}{4}+x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{16}=x^4-\frac{3}{2}x^2-x+\frac{29}{16}$.

Como $D'=4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2$, D decrece hasta $x=1$ y luego crece.

El punto buscado es, pues, el $(1,1)$. $\left[\text{A distancia } \sqrt{5}/4\right]$.



Matemáticas (grupo C) **Soluciones del segundo parcial** (26 de enero de 2015)

1. Razonar si son ciertas las afirmaciones: **a]** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{2n+1}>\frac{9}{5}$; **b]** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\arctan n}{\sqrt{3n^3+1}}<\frac{9}{5}$. [2 puntos]

a] La serie es fácilmente identificable con la serie del arco tangente: $S=4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=4\arctan 1=\pi>3>\frac{9}{5}$.

Si no se identifica, por tratarse de una serie de Leibniz $\big(\frac{4}{2n+1}\to 0$ y es obviamente decreciente$\big)$, se tiene:

$$S=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\cdots \underset{\uparrow}{>} 4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}>\frac{9}{5}\ (40>27).$$ O usando la cota de error $\frac{4}{5}$: $S>\frac{8}{3}-\frac{4}{5}=\frac{28}{15}>\frac{27}{15}=\frac{9}{5}$.

último término sumado negativo

b] Es falso, pues la serie diverge a ∞ ya que se comporta como la divergente $\sum\frac{1}{n^{1/2}}$: $\frac{a_n}{1/\sqrt{n}}=\frac{\arctan n}{\sqrt{3+n^{-3}}}\to\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\neq 0$.

[Con el ordenador se comprueba que para superar el valor basta sumar 5 términos].

2. Sea $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n}x^{3n}$. Precisar para qué x converge la serie y hallar el valor de $f(-1)$. [1.5 puntos]

Es serie geométrica $\sum\big(\frac{x^3}{e}\big)^n$ que converge si $\big|\frac{x^3}{e}\big|<1 \Leftrightarrow \boxed{|x|<\sqrt[3]{e}}$. Su suma es $\frac{1}{1-x^3/e}$. $\boxed{f(-1)=\frac{1}{1+e^{-1}}=\frac{e}{e+1}}$.

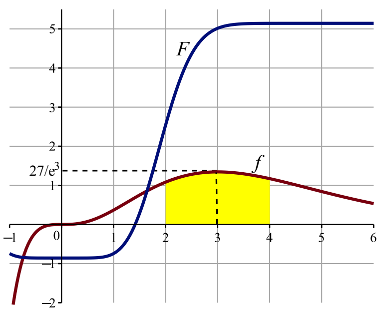
$\big[$Sin ver que es geométrica. Cociente: $\sqrt[n]{|b_n|}=\big|\frac{x^3}{e}\big|<1$ y para $x=\pm\sqrt[3]{e}$ quedan las divergentes $\sum 1$ y $\sum(-1)^n\big]$.

3. Sea $f(x)=\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3\arctan\frac{1}{x^2}}$. Hallar, si existen, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. [1.5 puntos]

En 0 desarrollamos $\operatorname{sen}x$ ($\arctan\frac{1}{x^2}$ no se puede), y en infinito, lo contrario:

$$\frac{x^3/6+\cdots}{x^3}\,\frac{1}{\arctan\frac{1}{x^2}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{6}\,\frac{1}{\pi/2}=\boxed{\frac{1}{3\pi}}.\qquad \frac{1-\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{x^2\arctan\frac{1}{x^2}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{1},$$ pues $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\arctan\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\arctan t^2}{t^2}=1$.

4. Sea $F(x)=\int_2^{x^2}s^3e^{-s}ds$. **a]** Hallar los x en los que F alcanza sus valores extremos en $[0,2]$ y probar que su valor máximo es menor que 7 . **b]** Estudiar si F tiene cota superior en $[0,\infty)$. **c]** Precisar cuántas veces se anula F en $[0,2]$. [2.5 puntos]



a] F es par. $F'(x)=2x^7e^{-x^2}\Rightarrow F$ crece en $[0,\infty)$ y decrece en $(-\infty,0]$.

Por tanto, el **valor mínimo** es $F(0)=\int_2^0=-\int_0^2<0$ (integrando positivo).

El **máximo** es $F(2)=\int_2^4$. El integrando $f(x)=x^3e^{-x}$, $f'(x)=(3x^2-x^3)e^{-x}$ tiene su máximo en $x=2$, $f(2)=\frac{27}{e^3}\Rightarrow F(2)<2\frac{27}{e^3}<\frac{54}{8}<7$.

Integrando por partes se puede hallar la primitiva y el valor exacto:

$$F(2)=-(x^3+3x^2+6x+6)\,e^{-x}\Big]_2^4=\frac{38}{e^2}-\frac{142}{e^4}<\frac{38}{(5/2)^2}=\frac{152}{25}<7\,.$$

[Aproximar con Taylor no es adecuado, pues estamos lejos del origen].

b] En $[0,\infty)$ tiene cota superior pues la impropia $\int_2^\infty f$ converge, ya que $\frac{f(s)}{1/s^2}=\frac{s^5}{e^s}\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}0$ y converge $\int_2^\infty\frac{ds}{s^2}$.

Con la primitiva: $\int_2^\infty f=\frac{38}{e^2}$ (que es el supremo de F , pero no su máximo, pues no se alcanza).

c] $F(0)<0, F(2)>0$ y F estrictamente creciente en $[0,2]\Rightarrow F$ **se anula una vez** en $[0,2]$ $\big($en $x=\sqrt{2}\big)$.

5. Calcular $\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x\cos^2x}{4-\operatorname{sen}^2x}\,dx$. [1.5 puntos]

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x\cos^2x}{3+\cos^2x}dx\overset{s=\cos x}{=}-\int_1^0\frac{s^2\,ds}{s^2+3}=\int_0^1\Big[1-\frac{3}{s^2+3}\Big]ds=1-\sqrt{3}\int_0^1\frac{1/\sqrt{3}\,ds}{1+(s^2/3)}=1-\sqrt{3}\,\Big[\arctan\frac{s}{\sqrt{3}}\Big]_0^1=\boxed{1-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}.$$

6. Estudiar si converge $\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. [1 punto]

La única impropiedad está en $x=1^-$. En ese punto, el integrando $\frac{x^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\sim\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ puesto que:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\Big/\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$ Como $\int_0^{1^-}\frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ converge, la nuestra también **converge**.

$\big[$Y se podría calcular: $t=\operatorname{sen}x\to\int\operatorname{sen}^2t\,dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2t=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\ \to\ \int_0^1=\frac{\pi}{4}\big]$.