**Matemáticas (grupo B)** **Soluciones del primer parcial** (23 de noviembre de 2015)

**1.** Sea $f(x)=|e^x-2|$. **a]** Esquematizar su gráfica a partir de la de $e^x$. **b]** Hallar todos los números reales $x$ que satisfacen $f(x)>1$. **c]** Hallar su recta tangente en $x=0$. [1.5 puntos]

**2.** Escribir el complejo $z=\frac{i-5}{3+2i}$ en la forma $re^{i\theta}$ y hallar $z^5$ y escribirlo en la forma $a+bi$. [1.2 puntos]

**3.** ¿Es cierto que si $f(x)$ tiene un máximo local en $x=a$ la función $[f(x)]^2$ tiene también un máximo local en ese punto? Probarlo o dar un contraejemplo. [0.8 puntos]

**4.** **a]** Hallar el límite $L$ de la sucesión $a_n=\frac{n^2+1}{n+1}-\frac{n^2+4}{n+2}$. Elegir entre **b]** y **b*]**: [1.3 puntos]
**b]** Probar que $a_n$ es creciente. **b*]** Hallar razonadamente un $N$ tal que $|a_n-L|<\frac{1}{2}$ si $n\geq N$.

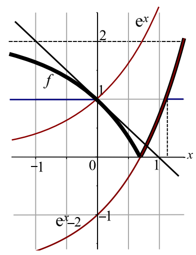
**5.** Sea $g(x)=x\,\text{sen}(\log|x|)$, $g(0)=0$. **a]** Determinar si es continua y derivable en $x=0$. **b]** Hallar todos los números reales $x$ tales que $g'(x)=0$. [1.4 puntos]

**6.** Sea $h(x)=4\arctan x+\frac{1}{x^2}$. **a]** Hallar sus asíntotas. **b]** Encontrar el valor mínimo de $h$ en $[3^{-1/2},3^{1/2}]$. **c]** Probar que $h$ se anula una única vez y que $h''$ se anula en $(1,2)$. **d]** Dibujar la gráfica de $h$. [2.5 puntos]

**7.** Hallar el área máxima que puede tener un rectángulo que tenga dos lados sobre los semiejes $x, y$ positivos y el vértice opuesto sobre la gráfica de $P(x)=6-x-x^3$. [1.3 puntos]

**1. b]** $f(x)>1 \Leftrightarrow$ o bien $e^x-2>1$, $e^x>3$ o bien $e^x-2<-1$, $e^x<1$. $\boxed{(-\infty,0)\cup(\log 3,\infty)}$.

**c]** $f(x)=\begin{cases} e^x-2, & x\geq \log 2 \\ 2-e^x, & x\leq \log 2 \end{cases} \nearrow f'(0)=-e^x|_{x=0}=-1$, $f(1)=1$. Recta tangente $\boxed{y=1-x}$.




**2.** $z=\frac{(i-5)(3-2i)}{13}=-1+i=\boxed{\sqrt{2}\,e^{i\,3\pi/4}}$ ($\tan\theta=-1$ y tercer cuadrante).
$z^5=4\sqrt{2}\,e^{i15\pi/4}=4\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}=4\sqrt{2}[\cos\frac{\pi}{4}-i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}]=\boxed{4-4i}=-1+5i+10-10i-5+i$.

**3. Falso**: por ejemplo $f(x)=-x^2$ tiene máximo local en $x=0$ y $f^2(x)=x^4$ tiene un mínimo en el punto.

**4. a]** $a_n=\frac{n^2-3n-2}{(n+1)(n+2)}=\frac{1-3n^{-1}-2n^{-2}}{(1+n^{-1})(1+2n^{-1})}\to\boxed{1}$.

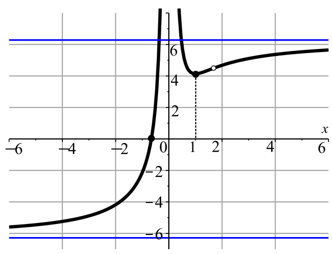
**b]** $\frac{n^2-3n-2}{(n+1)(n+2)}\leq\frac{n^2-n-4}{(n+2)(n+3)}\Leftrightarrow n^3-11n-6\leq n^3-5n-4\Leftrightarrow 2(3n+1)\geq 0$ cierto $\forall n$. O bien:
$a'(x)=\frac{(2x-3)(x^2+3x+2)-(x^2-3x-2)(2x+3)}{(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{2x(3x+4)}{(x+1)^2(x+2)^2}\Rightarrow a(x)$ crece si $x>0\Rightarrow a(n)=a_n$ crece si $n\geq 1$.

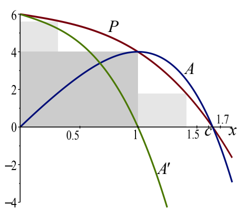
**b*]** Por ejemplo, $|a_n-1|=\frac{6n+4}{n^2+3n+2}\overset{\bullet}{<}\frac{10n}{n^2}<\frac{1}{2}$ si $n\geq N=20$. [$\bullet$ pues $4\leq 4n$ y denominador menor].
O más largo, $n^2-9n-6>0$ si $n\geq N=10>\frac{9+\sqrt{105}}{2}$. [O, usando **b]**, basta dar un $a_n$ que lo cumpla].

**5. a] Continua**: $g(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ ($0\times ac$). **No derivable**: $\lim\limits_{h\to 0}\text{sen}(\log|h|)$ no existe, por oscilar cerca de $0$.
Formalizándolo: $a_n=e^{\pi/2-n\pi}\to 0$, pero $g(a_n)=\text{sen}\,(\frac{\pi}{2}-n\pi)=(-1)^n$ no tiene límite.

**b]** $g'(x)=\text{sen}(\log|x|)+\cos(\log|x|)=0\Leftrightarrow\tan(\log|x|)=-1\Leftrightarrow\log|x|=-\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\boxed{\pm e^{-\frac{\pi}{4}+k\pi}}$.

**6.** $\boxed{h\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}\pm 2\pi}$. $\boxed{h\xrightarrow[x\to 0]{}\infty}$. $h'(x)=\frac{2(x-1)(2x^2+x+1)}{(x^2+1)x^3}\Rightarrow h$ decrece en $(0,1]$, crece en $[1,\infty)$ $\Rightarrow$
$h(1)=\boxed{\pi+1}$ valor mínimo. [El máximo es $h(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2\pi+9}{3}>\frac{4\pi+1}{3}=h(\sqrt{3})$].
$h(-1)=1-\pi<0$, $h\xrightarrow[x\to 0^-]{}\infty$, $h$ crece en $(-\infty,0)\Rightarrow$ se anula 1 vez en $(-1,0)$.
Para $x>0$ es claramente $h(x)>0$.
$h''(x)=\frac{6}{x^4}-\frac{8x}{(1+x^2)^2}$ continua en $[1,2]$. $h''(1)=4$, $h''(2)=-\frac{53}{200}\Rightarrow$ se anula.
[Sólo se anula ahí (inflexión) como se ve analizando el polinomio $4x^5-3x^4-6x^2-3$].




**7.** $P(0)=6$, $P(1)=4$, $P(2)=-4$ y decreciente $P(c)=0$ entre 1 y 2. Maximizamos:
Área $=A(x)=xP(x)$ en $[0,c]$. $A'(x)=2(3-x-2x^3)=2(1-x)\overset{>0}{(2x^2+2x+3)}\Rightarrow$
$A$ crece hasta 1 y decrece después [o $A''(1)=-14<0$] $\Rightarrow$ máxima para $x=1$.
El rectángulo de mayor área tiene, pues, área $A(1)=\boxed{4}$. [Es $A(0)=A(c)=0$].

**Matemáticas (grupo B)** **Soluciones del segundo parcial** (27 de enero de 2016)

**1.** Hallar el coeficiente de $x^4$ en el desarrollo de Taylor de $f(x)=\frac{\arctan(2x)}{\sqrt{1+x}}$ y deducir el valor de $f^{(4)}(0)$. [1.1 ptos]

$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(-1/2)(-3/2)}{2}x^2+\frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{6}x^3+\cdots \to$

$f(x)=[2x-\frac{8}{3}x^3+\cdots]\,[1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots]=\cdots+(\frac{4}{3}-\frac{5}{8})x^4+\cdots=\cdots+\frac{17}{24}x^4+\cdots \to f^{(4)}(0)=\boxed{17}$.

**2.** Precisar todos los reales $x$ para los que converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{2n+1}(x-1)^{2n}$. [1.8 ptos]

Cociente: $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{4^{n+1}}{4^n}\frac{2n+1}{2n+3}\frac{|x-1|^{2n+2}}{|x-1|^{2n}}=4\frac{2+n^{-1}}{(2+3n^{-1})}|x-1|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}4|x-1|^2 \Rightarrow$ converge si $|x-1|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$. diverge si $|x-1|>\frac{1}{2}$

Raíz: $\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{4|x-1|^2}{(2n+1)^{1/n}}=\frac{4|x-1|^2}{n^{1/n}\,(2+n^{-1})^{1/n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}4|x-1|^2$ ↗

Si $|x-1|=\frac{1}{2}$, queda $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$, que converge por Leibniz ( $\frac{1}{2n+1}\to 0$ y claramente decrece). $\boxed{\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}}$.

**3.** Si $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\arctan x}\,\text{sen}\frac{1}{x}$, hallar (si existen) razonadamente $\lim_{x\to 0}f(x)$ y $\lim_{x\to\infty}f(x)$. [1.8 ptos]

$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\arctan x}=\frac{\frac{1}{2}x^2+\cdots}{x+\cdots}\xrightarrow[x\to 0]{}0 \Rightarrow f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\boxed{0}$ ( $0\times ac.$, $\text{sen}\frac{1}{x}$ no admite desarrollo de Taylor en $0$).

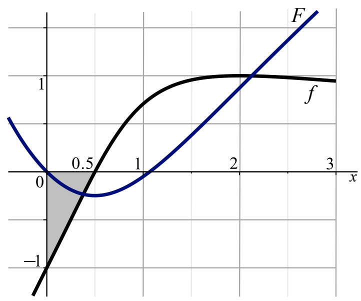
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}x\,\text{sen}\frac{1}{x}=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0^+}\frac{\text{sen}\,t}{t}=\boxed{\frac{2}{\pi}}$ ( $\arctan x$ no se parece en $\infty$ a su desarrollo de Taylor).

**4.** **a]** Hallar, si existen, los $x$ para los que $F(x)=\int_0^x\frac{2s-1}{\sqrt{s^3+1}}\,ds$ toma sus valores máximo y mínimo en $[0,\infty)$.
**b]** Probar que $-\frac{1}{2}<F(\frac{1}{2})<0$. [2.5 ptos]

**a]** $f$ continua en $(-1,\infty)\overset{\text{TFC}}{\Rightarrow}$ $F$ derivable en ese intervalo y es

$F'(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^3+1}}$ $<0,\ 0\le x<1/2$; $>0,\ x>1/2$ $\Rightarrow$ $F$ decrece en $[0,\frac{1}{2}]$ y crece en $[\frac{1}{2},\infty)$
$\Rightarrow$ el **valor mínimo** es $F(\frac{1}{2})$.

[O también porque hasta 1/2 añadimos áreas negativas y luego positivas].




Para ver qué pasa en $\infty$ debemos saber si se llega a superar el valor $F(0)=0$.
Como $\int^{\infty}f$ **diverge**, por comportarse como $\int^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\Big($es decir, $\frac{f(x)}{1/\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}2\Big)$,
**no existe el valor máximo** ya que $F(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$.

**b]** $F(\frac{1}{2})=\int_0^{1/2}<0$ por ser el integrando negativo (o porque $F(0)=0$ y $F$ decrece). [No se puede calcular].

Como en $[0,\frac{1}{2}]$ es $\frac{1-2s}{\sqrt{s^3+1}}<\frac{1}{1}$ (numerador mayor, denominador menor), en el intervalo es $f(s)>-1 \Rightarrow F(\frac{1}{2})>\int_0^{1/2}(-1)>-\frac{1}{2}$.

**5.** Estudiar si converge $\int_0^1\frac{\cos x\,dx}{e^{x^2}-1}$. [1 pto]

Impropia en $0^+$ donde se parece a $\frac{1}{x^2}$: $\frac{\cos x/(e^{x^2}-1)}{1/x^2}=\frac{x^2(1-\cdots)}{x^2+\cdots}\xrightarrow[x\to 0^+]{}1$. Al igual que $\int_{0^+}\frac{dx}{x^2}$, la dada **diverge**.

**6.** Sea $f(x)=\sqrt{x}\,\arctan\sqrt{x}$. Calcular una primitiva de $f$ y hallar el área de la región encerrada entre su gráfica y las rectas $y=0$ y $x=3$. [1.8 ptos]

$t=\sqrt{x}\to 2\int t^2\arctan t\,dt=\frac{2t^3\arctan t}{3}-\frac{2}{3}\int\frac{t^3+t-t}{1+t^2}\,dt=\frac{2t^3\arctan t-t^2+\log(1+t^2)}{3}=\boxed{\frac{1}{3}[2x^{3/2}\arctan\sqrt{x}-x+\log(1+x)]}$.

Aunque también sale sin hacer el cambio (directamente por partes):

$\frac{2}{3}x^{3/2}\arctan\sqrt{x}-\frac{2}{3}\int\frac{x^{3/2}\,dx}{2x^{1/2}(1+x)}=\frac{2}{3}x^{3/2}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x+1-1}{x+1}\,dx$ ↗

Como es $f(0)=0$ y es $f$ positiva en $[0,3]$, el área pedida es simplemente:

$\int_0^3 f=\frac{2}{3}\cdot 3^{3/2}\arctan 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log 4=\boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-1+\frac{2}{3}\log 2}$.