Matemáticas (grupo A) **Soluciones del primer parcial** (21 de noviembre de 2016)

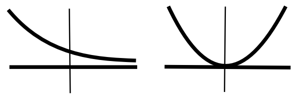
1. Si $n \geq 3$, probar la igualdad de números combinatorios $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\binom{n+1}{3}$. [1 punto].

$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}=\frac{n(n-1)(3+n-2)}{3\cdot 2}=\frac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot 2}=\binom{n+1}{3}$. [Mejor que en términos de cocientes de factoriales].

1*. Precisar si es cierta la implicación: f y g derivables en todo $\mathbf{R}$ y $f(x)\leq g(x)\ \forall x \Rightarrow f'(x)\leq g'(x)\ \forall x$. [1 punto]

Falsa. Posible contrajemplo: $f(x)=0<\mathrm{e}^{-x}=g(x)\ \forall x$ pero $f'(x)=0>-\mathrm{e}^{-x}=g'(x)$.

O algo del tipo $f(x)=0\leq x^2=g(x)\ \forall x$ pero $f'(x)=0>2x=g'(x)$ para $x<0$.

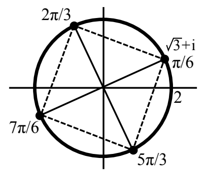


2. Escribir las raíces cuartas del complejo $z=8\,\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)$ en la forma $a+b\,\mathrm{i}$ y dibujarlas. [1.4 puntos]

$z=-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}=16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$ $\left[\tan\theta=-\sqrt{3}\text{ y } 2^\circ \text{ cuadrante}\right]$. O $z=8\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/2}\right)\left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/6}\right)$.

$\sqrt[4]{16}=2$, $\phi=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}=\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{3}$. $\sqrt[4]{z}=\sqrt{3}+\mathrm{i}\,,\,-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,,\,-\sqrt{3}-\mathrm{i}\,,\,1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

Las raíces están sobre la circunferencia de radio 2 y forman un cuadrado.



3. Hallar el límite L de $a_n=\frac{n^2+\operatorname{sen} n}{n+1}-\frac{n^3}{(n+1)^2}$ y hallar un N tal que sea $|a_n-L|<10^{-2}$ para $n\geq N$. [1.4 puntos]

$a_n=\frac{n^3+n^2+(n+1)\operatorname{sen} n-n^3}{(n+1)^2}=\frac{n^2+(n+1)\operatorname{sen} n}{(n+1)^2}=\frac{1+(n^{-1}+n^{-2})\operatorname{sen} n}{(1+n^{-1})^2}\to 1$.

$|a_n-1|=\left|\frac{(n+1)\operatorname{sen} n-2n-1}{(n+1)^2}\right|\leq\frac{(n+1)|\operatorname{sen} n|+2n+1}{(n+1)^2}\leq\frac{3n+2}{(n+1)^2}<\frac{3}{n+1}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow n>299=N$.

O bien $<\frac{3n+2}{n^2}<\frac{5}{n}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow n>500=N$.

O bien $\frac{3}{n}<\frac{1}{200}$ y $\frac{2}{n^2}<\frac{1}{200}$ ......

4. Sea $f(x)=\log\left(1-|x^2-1|\right)$. **a]** Precisar su dominio. **b]** Hallar, si existen, $f'(1)$ y $f'(-\frac{4}{3})$. [1.4 puntos]

a] $|x^2-1|<1 \Leftrightarrow 0<x^2<2 \Leftrightarrow |x|>0$ y $|x|<\sqrt{2}$. [La expresión $x<\pm\sqrt{2}$ no significa nada].

El dominio es, por tanto, $D=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)-\{0\}=\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$.

b] $f(x)=\begin{cases}\log(2-x^2), & 1\leq|x|<\sqrt{2}\\ 2\log|x|, & 0<|x|\leq 1\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}\frac{-2x}{2-x^2}, & 1<|x|<\sqrt{2}\ \to f'(1^+)=-2\\ \frac{2}{x}, & 0<|x|<1\ \to\ f'(1^-)=2\end{cases}$, $\nexists f'(1)$. $f'(-\frac{4}{3})\underset{\uparrow}{=}\frac{8/3}{2-16/9}=12$.

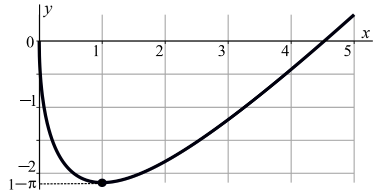
$-\sqrt{2}<-4/3<-1$

5. Hallar la imagen de $g(x)=x-4\arctan\sqrt{x}$ y precisar cuántas veces se anula en el intervalo $[0,4]$. [1.7 puntos]

Continua en $[0,\infty)$. $g'(x)=1-\frac{2}{(1+x)\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(1+x)\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+2)}{(1+x)\sqrt{x}}$.

$\left[\text{O bien } x^3+2x^2+x-4=(x-1)(x^2+3x+4)=0\text{, derivable y único punto crítico}\right]$.

Decrece hasta $g(1)=1-\pi$, luego crece y $g\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ $[\infty-2\pi]$. $\operatorname{im} g=[1-\pi,\infty)$.



Claramente se anula en $x=0$. Para ver si lo hace más veces debemos saber si $g(4)$ es ya mayor que 0 (entonces habría 2) o si aún no lo es.

Como $g(4)=4\left(1-\arctan 2\right)\underset{\uparrow}{<}4\left(1-\arctan\sqrt{3}\right)=4\left(1-\frac{\pi}{3}\right)<0 \Rightarrow$ 1 único cero en el intervalo ($x=0$).

restamos algo menor, por ser el arco tangente creciente

6. Sea $h(x)=\left(3x-\frac{4}{x}\right)e^{-x}$. **a]** Hallar su límite cuando x tiende a ∞ y $-\infty$ y sus asíntotas verticales. **b]** Precisar en qué intervalos h crece y decrece. **c]** Probar que $h''(x)=0$ sólo para un x del intervalo $(-1,0)$ y para otro del $(2,3)$. **d]** Dibujar su gráfica. [0.6+0.7+0.8+0.4 puntos]

a] $h \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \left(\infty\times 0 \text{ pero } \frac{x}{e^x}\to 0\right)$, $h \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \ (-\infty\times\infty)$, $h \underset{x\to 0^\pm}{\longrightarrow} \mp\infty$.

b] $h'(x)=\left(3+\frac{4}{x^2}-3x+\frac{4}{x}\right)e^{-x}=\frac{4+4x+3x^2-3x^3}{x^2}\,e^{-x}=\frac{(2-x)(3x^2+3x+2)}{x^2}\,e^{-x}$

$\Rightarrow$ h crece en $(-\infty,0)$ y en $(0,2]$ y decrece en $[2,\infty)$.

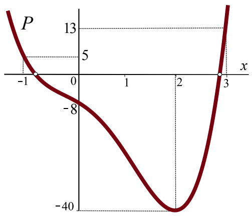
c] $h''(x)=\frac{3x^4-6x^3-4x^2-8x-8}{x^3}\,e^{-x}\equiv\frac{P(x)}{x^3}\,e^{-x}$.

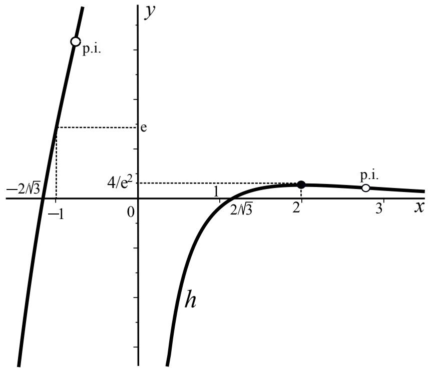
$P'(x)=2(x-2)(6x^2+3x+2)$. P crece desde 2 y decrece antes.

$P(-1)=5$, $P(0)=-8$, $P(2)=-40$, $P(3)=13$.

[Descartes sólo precisa que 1 cero positivo].

d] $h(-1)=e$, $h(2)=\frac{4}{e^2}$, $h(x)=0$ si $x=\pm 2/\sqrt{3}$.





7. **a]** Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2+4y^2+4x=0$ en el punto $\left(-2/3,-\sqrt{5}/3\right)$.
b] Determinar, si existen, los puntos de la curva más cercanos y más lejanos al punto $(-1,0)$. [0.8+1.2 puntos]

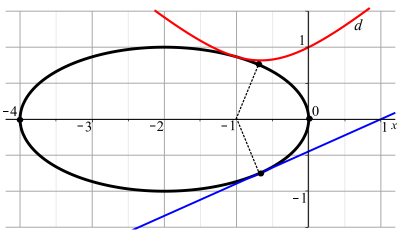
a] $\frac{(x+2)^2}{4}+y^2=1$ elipse. $\frac{4}{9}+\frac{20}{9}-\frac{8}{3}=0$, $2x+8yy'+4=0 \to$

$y' \underset{\uparrow}{=} -\frac{2+x}{4y}\Big|_{(-2/3,-\sqrt5/3)}=\frac{1}{\sqrt5}$, $y=-\frac{\sqrt5}{3}+\frac{1}{\sqrt5}\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{x-1}{\sqrt5}$ recta tangente.

[Mejor que derivar $-\frac{1}{2}\sqrt{-x^2-4x}$].

b] $D(x)=(x+1)^2-\frac{x^2+4x}{4}$, $x\in[-4,0]$. $D'(x)=\frac{3x+2}{2} \to \begin{matrix}\text{crece}\\ \text{decrece}\end{matrix}$ si $x \gtrless -\frac{3}{2}$

$\to \left(-\frac{2}{3},\pm\frac{\sqrt5}{3}\right)$ los más cercanos, $(-4,0)$ el más lejano $\big[(0,0)$ más cerca$\big]$.



1. Sea $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)+x^{2n}}{(n+1)^2\,4^n}$. **a]** Precisar para qué x converge. (Conviene separarla en dos series). [2.4 puntos]

Elegir un apartado entre **b]** y **c]**: **b]** Hallar un racional que aproxime la suma para $x=0$ con error $<10^{-3}$. **c]** Probar que converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$.

a] Como $\sum\frac{(-1)^n\cos(nx)}{(n+1)^2\,4^n}$ converge $\forall x$ $\Big[$pues $|\cdot|\le\frac{1}{(n+1)^2\,4^n}\le\frac{1}{n^2}$ o $\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$, con $\sum\frac{1}{n^2}$, $\sum\left(\frac{1}{4}\right)^n$ series convergentes (Leibniz no es aplicable, pues la serie, en general, ni es alternada ni decreciente)$\Big]$,

converge para los x que lo hace la de potencias $\sum\frac{x^{2n}}{(n+1)^2 4^n}$. Cociente: $\frac{(n+2)^2 4^n|x|^{2n+2}}{(n+1)^2 4^{n+1}|x|^{2n}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{|x|^2}{4}<1\Leftrightarrow|x|<2$.

En ambos extremos $x=\pm2$ queda $\sum\frac{1}{(n+1)^2}$ convergente. La dada converge para los x del intervalo $\boxed{[-2,2]}$.

b] $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2\,4^n}=1-\frac{1}{16}+\frac{1}{144}-\frac{1}{1024}+\cdots$ serie de Leibniz $\Rightarrow$ $S\approx1-\frac{1}{16}+\frac{1}{144}=\frac{136}{144}=\boxed{\frac{17}{18}}$, con error $<\frac{1}{1024}<10^{-3}$.

c] En $[0,1]$: $\left|\frac{(-1)^n\cos(nx)+x^{2n}}{(n+1)^2\,4^n}\right|\le\frac{2}{(n+1)^2\,4^n}$ y $2\sum\frac{1}{(n+1)^2\,4^n}$ converge$^{\uparrow}$. Weierstrass asegura que lo hace uniformemente.

2. Sea $f(x)=\frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{1-x^2}}$. **a]** Calcular los 3 primeros términos no nulos de su desarrollo de Taylor en $x=0$ y deducir el valor de $f^{(2)}(0)$ y $f^{(2017)}(0)$. **b]** Hallar $\lim_{x\to1^-}f(x)$. [2.2 puntos]

a] $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\cdots$, $(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(-1/2)(-3/2)}{2}x^2+\cdots\Rightarrow$

$$f(x)=\Big[1-\tfrac{\pi^2}{8}x^2+\tfrac{\pi^4}{384}x^4-\cdots\Big]\Big[1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{8}x^4+\cdots\Big]=\boxed{1+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\pi^2}{8}\right)x^2+\left(\tfrac{3}{8}-\tfrac{\pi^2}{16}+\tfrac{\pi^4}{384}\right)x^4+\cdots} .$$

Por ser $\frac{f''(0)}{2}$ el coeficiente de x^2 del desarrollo, $\boxed{f''(0)=1-\frac{\pi^2}{4}}$. Y como el de x^{2n+1} es 0 , $\boxed{f^{(2017)}(0)=0}$.

b] $\overset{0/0,\,L'H}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2x}\,\mathrm{sen}\frac{\pi x}{2}\sqrt{1-x^2}\overset{x\to1}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}\cdot1\cdot0=\boxed{0}$. [El desrrollo anterior no nos sirve de nada para este cálculo en 1].

3. Sea $H(x)=\int_x^{x^2}\frac{\log t\,dt}{1+4t}$, $x>0$. **a]** Estudiar dónde H crece y decrece. **b]** Precisar el signo de $H\left(\frac{1}{2}\right)$. **c]** Probar que $0<H(2)<\frac{4}{9}$. [2.2 puntos]

a] Como el integrando es continuo para $t>0$ y x , x^2 son obviamente derivables es:

$H'(x)=\frac{2x\log x^2}{1+4x^2}-\frac{\log x}{1+4x}=\frac{\log x\,(12x^2+4x-1)}{(1+4x^2)(1+4x)}=\frac{\log x\,(2x+1)(6x-1)}{(1+4x^2)(1+4x)}\Rightarrow$ crece en $\left(0,\frac{1}{6}\right]$ y en $[1,\infty)$, decrece en $\left[\frac{1}{6},1\right]$.

b] En $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ el integrando es negativo. $H\left(\frac{1}{2}\right)=-\int_{1/4}^{1/2}neg>0$. O por ser $H(1)=0$ y decrecer H en $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

c] Es claro que $\int_2^4 pos>0$ $\big($o por crecer H en $[1,2]\big)$. Y como $f(t)=\frac{\log t}{1+4t}\overset{[2,4]}{\le}\frac{2\log 2}{9}<\frac{2}{9}\Rightarrow\int_2^4 f<\int_2^4\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$.

$\Big[$Otras cotas mejores se deducen de $f(t)<\frac{t}{4t}\Rightarrow\int_2^4 f<\frac{1}{2}$, o de $f(t)<\frac{\log t}{4t}\Rightarrow\int_2^4 f<\frac{1}{8}(\log t)^2\Big]_2^4=\frac{3}{8}(\log 2)^2<\frac{3}{8}<\frac{4}{9}\Big]$.

4. Discutir la convergencia de la integral impropia $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{x^a}\,dx$ según los valores de la constante a . [1.2 puntos]

Hay dos impropiedades: en 0 (por anularse el denominador) y el ∞ . Deben converger dos integrales:

$\int^{\infty}\sim\int^{\infty}\frac{dx}{x^a}$ es decir, $\frac{\arctan x/x^a}{1/x^a}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$. Por tanto, esta integral converge $\Leftrightarrow a>1$.

$\int_{0^+}\sim\int_{0^+}\frac{dx}{x^{(a-1)}}$ es decir, $\frac{\arctan x/x^a}{1/x^{(a-1)}}=\frac{x+\cdots}{x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}1$. Esta converge $\Leftrightarrow a-1<1\Leftrightarrow a<2$.

Por tanto, la integral inicial entre 0 e ∞ converge si y solo si $\boxed{a\in(1,2)}$.

5. Calcular $\int_1^4\log\left(x+\sqrt{x}\right)dx$. [2 puntos]

$\overset{t=\sqrt{x}}{\longrightarrow}\int_1^2 2t\ln(t^2+t)\,dt=t^2\ln(t^2+t)\Big]_1^2-\int_1^2\underbrace{\frac{2t^2+t}{t+1}}_{2t-1+\frac{1}{t+1}}dt=4\ln6-\ln2+1-\Big[t^2+\ln(t+1)\Big]_1^2=\boxed{4\ln2+3\ln3-2}$.

[O haciendo partes primero y luego el cambio].