Matemáticas (grupo B) **Soluciones del primer parcial** (20 de noviembre de 2017)

1. Sea $f(x)=\sqrt{x-\frac{3}{x-2}}$. Precisar su dominio. Hallar todos los x tales que $f(x)=2x$. [0.6+0.8=1.4 puntos]

Definida si $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq \frac{(x+1)(x-3)}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{dom}\, f = [-1,2)\cup[3,\infty)}$ $\left[\frac{-}{-} \text{ ó } \frac{+}{+}\right]$.

	4	−9	2	3
1		4	−5	−3
	4	−5	−3	0

$f(x)=2x \Rightarrow x^2-2x-3=4x^3-8x^2$, $4x^3-9x^2+2x+3=(x-1)(4x^2-5x-3)=0$.

$\boxed{x=1}$ y $\boxed{x=\frac{5+\sqrt{73}}{8}} \in(1,2)$ $\left[8<\sqrt{73}<9\right]$ lo cumplen. $\frac{5-\sqrt{73}}{8}<0$ no $\left[+\neq-\right.$, inventada al elevar al cuadrado$\left.\right]$.

Elegir entre 2 y 2*:

2. Hallar todos los reales x que satisfacen la igualdad $4(\arctan x)^2 = 3\pi \arctan x$. [1 punto]

$\arctan x(4\arctan x-3\pi)=0$ si
- $\arctan x=0 \longrightarrow \boxed{x=0}$.
- $\arctan x=\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$ imposible. $\left[\right.$Es falso que sea $x=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$. $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}\left.\right]$.

2*. Probar que es falsa la implicación: $\{a_n\}$ acotada, $\{i_n\}\to\infty \Rightarrow \{a_n i_n\}\to\infty$. [1 punto]

Tomamos, por ejemplo, $\{i_n\}=n\to\infty$ y vemos con varias $\{a_n\}$ acotadas que a $\{a_n i_n\}$ le puede pasar de todo: $\{a_n\}=0$, pero $0\cdot\frac{1}{n}\to 0$; $\{a_n\}=\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n}\to 0$; $\{a_n\}=-1$, $-n\to-\infty$; $\{a_n\}=(-1)^n$, $(-1)^n n$ no tiende a nada...

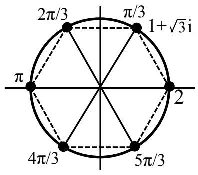
Elegir entre 3 y 3*:

3. Hallar las raíces sextas del complejo $z=64\,\mathrm{i}^{64}$, escribirlas en la forma $a+b\,\mathrm{i}$ y dibujarlas. [1.4 puntos]

$z=64\,\mathrm{i}^{64}=64$, pues $(\mathrm{i}^4)^{16}=1^{16}$. $\sqrt[6]{64}=2\,e^{\mathrm{i}(0+2k\pi)/6}=2\,e^{\mathrm{i}k\pi/3}$, $n=0,\ldots,5$.

Las 6 raíces (situadas sobre los vértices hexágono regular) son, pues:

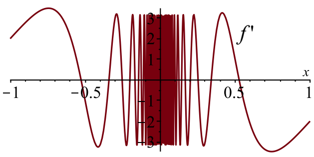
$\boxed{2,\ 1+\sqrt{3}\,\mathrm{i},\ -1+\sqrt{3}\,\mathrm{i},\ -2,\ -1-\sqrt{3}\,\mathrm{i},\ 1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$.



3*. Sea $f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x}$, $f(0)=0$. Estudiar si existe $f'(0)$. ¿Es f' continua en $x=0$? [0.6+0.8=1.4 puntos]

Existe $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0} h\cos\frac{\pi}{h}=\boxed{0}$ ($0\times ac$).

Maple $\to$



Pero $f'(x)=2x\cos\frac{\pi}{x}+\pi\,\text{sen}\,\frac{\pi}{x}$ **no tiene límite** en $x=0$ ($f\notin C^1$), pues oscila infinitas veces cerca del punto. Para formalizarlo conviene utilizar sucesiones:

Por ejemplo, $\{a_n\}=\{\frac{2}{2n+1}\}\to 0$, pero $f'(a_n)=\frac{4}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}+\pi\,\text{sen}\,\frac{(2n+1)\pi}{2}=(-1)^n\pi\not\to 0$ (diverge).

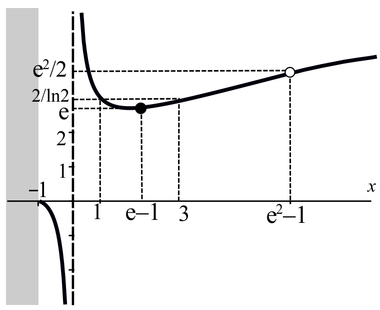
Si f' tendiese a 0, la sucesión debería también hacerlo, según el teorema que relaciona continuidad y sucesiones.

4. Sea $g(x)=\frac{1+x}{\log(1+x)}$. **a]** Hallar, si existen, sus valores extremos en i) $[1,3]$ ii) $[1,\infty)$. **b]** Dibujar su gáfica. [1.8 puntos] 0.9+0.9

a] $g'(x)=\frac{\log(1+x)-1}{[\log(1+x)]^2}>0 \Leftrightarrow x>e-1 \Rightarrow$ i) Valor mínimo $g(e-1)=\boxed{e}$.

El valor máximo, que debe existir por ser g continua en $[1,3]$, se tomará en alguno de los extremos: $g(1)=\boxed{\frac{2}{\log 2}}=\frac{4}{\log 4}=g(3)$.

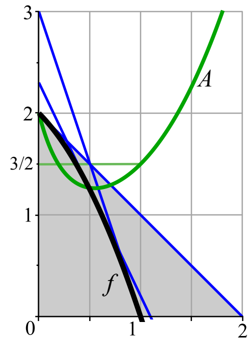
ii) El valor mínimo sigue siendo $\boxed{e}$, pero **el máximo no existe**, ya que $g\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$: $\frac{\infty}{\infty}$ y L'Hôpital $\to \frac{1}{1/(1+x)}=1+x\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$.



b] $\text{dom}\, g=(-1,0)\cup(0,\infty)$ (log definido y no nulo). $g\xrightarrow[x\to -1^+]{}0$ $\left[\frac{0}{\infty}\right]$.

$g\xrightarrow[x\to 0^\pm]{}\pm\infty$ $\left[\frac{1}{\pm 0}\right]$. $g''(x)=\frac{1}{(1+x)[\log(1+x)]^2}-\frac{2}{(1+x)[\log(1+x)]^3}[\log(1+x)-1]=\frac{2-\log(1+x)}{(1+x)[\log(1+x)]^3} \Rightarrow (e^2-1,\frac{1}{2}e^2)$ inflexión.

5. Encontrar los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=2-x-x^2$ en $x=a$ corta cada eje. Hallar el punto P de la gráfica de f en $x,y\geq 0$ para el que es máxima el área del triángulo limitado por los ejes y la recta tangente en P. [0.8+1.0=1.8 puntos]



La tangente es $y=2-a-a^2-(1+2a)(x-a)=2+a^2-(1+2a)x$.

Que corta $x=0$ en $\left(0,2+a^2\right)$ y corta $y=0$ en $\left(\frac{2+a^2}{1+2a},0\right)$.

El área del triángulo es: $A(a)=\frac{1}{2}\frac{(2+a^2)^2}{1+2a}$, para $a\in[0,1]$ $\left[f(1)=0\right]$.

$$A'(a)=\frac{1}{2}\frac{4a(2+a^2)(1+2a)-2(2+a^2)^2}{(1+2a)^2}=\frac{2+a^2}{(1+2a)^2}(3a^2+2a-2)$$

$$A'=0 \text{ si } a_\pm=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}.\quad \begin{matrix}1/3<a_+<2/3\\ a_-<0\end{matrix}\quad \left[2<\sqrt{7}<3\right]$$

Hay un mínimo local en $x=a_+$ (pues A antes decrece y después crece).

El máximo estará en un extremo del intervalo: $A(0)=2>A(1)=\frac{3}{2}$.

Por tanto, el punto pedido es $\boxed{P=(0,2)}$ -

6. Sea $h(x)=e^{P(x)}$ donde $P(x)$ es un polinomio de grado 3. [0.5+0.8+0.4+0.9=2.6 puntos]

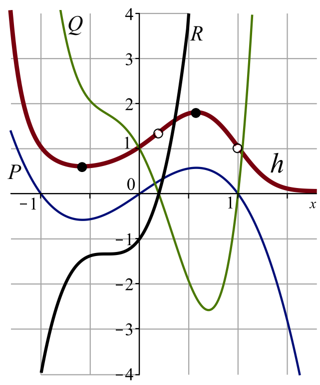
a] Determinar el grado del polinomio $Q_n(x)=\frac{h^{(n)}(x)}{h(x)}$ en función del entero $n=1,2,\ldots$.

b] En el caso de que sea $P(x)=\frac{3}{2}(x-x^3)$: i) Probar que h es inyectiva en $[1,\infty)$. ¿Lo es en todo su dominio? ii) Precisar la imagen de h. iii) Probar que $h''(x)=0$ para $x=1$ y sólo para otro $c\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

a] $h'=P'e^P$ $(gr=2)$, $h''=\left[\underset{4}{(P')^2}+\underset{1}{P''}\right]e^P$ $(gr=4)$, $h'''=\left[\underset{6}{(P')^3}+3\underset{3}{P'P''}+\underset{0}{P'''}\right]e^P$ $(gr=6)$, ...

Parece ser $2n$ el grado de Q_n. Lo terminamos de justificar utilizando inducción:

Si $h^{(n)}=Q_n\,e^P$, con Q_n de grado $2n$ es $h^{(n+1)}=\left[Q_nP'+Q_n'\right]e^P$ de grado $2(n+1)$.



b] i) $h'(x)=\frac{3}{2}(1-3x^2)\,e^{P(x)}<0$ si $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ h inyectiva en $[1,\infty)$.

Como claramente $h(0)=h(\pm 1)=1$ $\Rightarrow$ no lo es en todo $\mathbf{R}$.

ii) $h>0$ continua, $h\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}\infty$ $\left[e^{\infty}\right]$, $h\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ $\left[e^{-\infty}\right]$ $\Rightarrow$ $\operatorname{im} h=(0,\infty)$.

iii) $h''(x)=\frac{9}{4}(9x^4-6x^2-4x+1)\,e^{P(x)}\equiv\frac{9}{4}\,Q(x)\,e^{P(x)}$, $h''(1)=0$.

$Q(1)=0$ $\rightarrow$ $Q(x)=(x-1)\left(9x^3+9x^2+3x-1\right)\equiv(x-1)R(x)$.

$R(0)=-1$, $R\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+1+1-1=\frac{4}{3}$, R continua $\overset{T.B.}{\Rightarrow}$ R se anula en $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

$\left[\text{O aplicando Bolzano a } h'' \text{ (o a } Q\text{): } h''(0)=\frac{9}{4},\ h''\left(\frac{1}{3}\right)=-2e^{4/9}\right]$.

$R'(x)=3(3x+1)^2\geq 0$ $\Rightarrow$ R estrictamente creciente y no hay más raíces.

[Descartes sólo nos daba 1 positiva (+ + + −) y 0 o 2 negativas (− + − −)].

Matemáticas **(grupo B)** **Soluciones del segundo parcial** (23 de enero de 2018)

1. Precisar para qué reales x converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n e^{-n}}{n!}\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^{2n}$, [1.5 puntos]

Cociente: $\displaystyle\Big|\frac{b_{n+1}}{b_n}\Big|=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{e^n}{e^{n+1}}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{[x^2/(x^2+1)]^{2n+2}}{[x^2/(x^2+1)]^{2n}}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{1}{e}\frac{1}{n+1}\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^2=\frac{1}{e}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^2\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{e}{e}\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^2$.

La serie convergerá cuando $\Big(\frac{x^2}{1+x^2}\Big)^2<1$, lo que es obviamente cierto $\boxed{\forall x\in\mathbf{R}}$ [Numerador estrictamente menor que donominador].

2. Sea $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x-\arctan x}{1-e^{-x^3}}$. Hallar, si existe, su límite cuando i) $x\to 0$, ii) $x\to\infty$, iii) $x\to-\infty$. [2 puntos]

i) Pide utilizar Taylor: $\displaystyle\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-[x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)]}{1-[1-x^3+o(x^3)]}=\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\boxed{\frac{1}{6}}$.

Por L'Hôpital es más largo: $\displaystyle\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{\cos x-(1+x^2)^{-1}}{3x^2}e^{x^3}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{-\operatorname{sen}x+2x(1+x^2)^{-2}}{6x}=-\frac{\operatorname{sen}x}{6x}+\frac{(1+x^2)^{-2}}{3}\underset{x\to0}{\longrightarrow}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$.

ii) **No tiene límite**. Como el denominador tiende a 1, existirá si lo tiene el numerador. El $\arctan x$ tiende a $\frac{\pi}{2}$, pero el seno oscila y no tiene límite. Para formalizarlo más acudimos al uso de sucesiones:

$a_n=n\pi$ y $b_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ tienden ambas a ∞, pero $f(a_n)\to-\frac{\pi}{2}$ y $f(b_n)\to 1-\frac{\pi}{2}$, distintos límites.

iii) El límite es claramente $\boxed{0}$, pues el numerador está acotado y el denominador obviamente tiende a ∞.

3. Sea $g(x)=\dfrac{2+e^x}{1+e^{2x}}$. **a]** Calcular $\displaystyle\int_0^{(\ln 3)/2}g(x)\,dx$. **b]** Estudiar si es convergente $\int_0^\infty g$. [2.5 puntos]

a] $\displaystyle\int_0^{(\ln 3)/2}\frac{e^x(2+e^x)}{e^x(1+e^{2x})}dx\ \left[\begin{matrix}s=e^x,\ ds=e^x dx\\ e^0=1, e^{(\ln 3)/2}=\sqrt{3}\end{matrix}\right]=\int_1^{\sqrt3}\frac{2+s}{s(1+s^2)}ds\overset{\bullet}{=}\int_1^{\sqrt3}\Big(\frac{2}{s}+\frac{1-2s}{1+s^2}\Big)ds$

$\displaystyle=\big[2\log s-\log(1+s^2)+\arctan s\big]_1^{\sqrt3}=\boxed{\log\frac{3}{2}+\frac{\pi}{12}}$.

• $\displaystyle\frac{s+2}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{A(s^2+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+1)}\ \longrightarrow\ \begin{matrix}s^2: A+B=0,\ B=-2\\ s: C=1,\ 1: A=2\end{matrix}$

b] Como $g\overset{\infty}{\sim}e^{-x}$ $\Big[\frac{g(x)}{e^{-x}}=\frac{2e^{-x}+1}{e^{-2x}+1}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}1\Big]$ e $\int^\infty e^{-x}dx$ es convergente, la $\int_0^\infty g$ **converge**.

$\Big[$También se deduce de la primitiva de g escrita de la forma: $\log\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}+\arctan(e^x)\to\int_0^\infty g=\log 2+\frac{\pi}{4}\Big]$.

4. Sean $h(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x}{1+x^2}$ y $H(x)=\displaystyle\int_{\log x}^1 h$, $x>0$.
a] Hallar el desarollo de Taylor de h hasta x^4. [2.5 puntos]
b] Estudiar el crecimiento y decrecimiento de H.
c] Precisar cuántas veces se anula H en el intervalo $[1,4]$.

a] $e^{2x}-e^x=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots-1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\cdots=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{5}{8}x^4+\cdots$, $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots$

$\to\ h(x)=x+\frac{3}{2}x^2+\big(\frac{7}{6}-1\big)x^3+\big(\frac{5}{8}-\frac{3}{2}\big)x^4=\boxed{x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{7}{8}x^4+\cdots}$ [mejor, desde luego, que dividiendo series].

b] El integrando es continuo en todo $\mathbf{R}$ y $\log x$ es derivable para $x>0$, con lo que será si $x>0$:

$\displaystyle H'(x)=-\frac{e^{2\log x}-e^{\log x}}{1+(\log x)^2}\frac{1}{x}=\frac{1-x}{1+(\log x)^2}\ \begin{matrix}>0,\ x<1\\ <0,\ x>1\end{matrix}$. Por tanto, H **crece en** $(0,1]$ **y decrece en** $[1,\infty)$.

c] Como $h(x)>0$ para $x>0$ (por ser ahí $e^{2x}>e^x$), el signo de H en los extremos del intervalo es:

$$H(1)=\int_0^1 h>0\qquad H(4)=\int_{\log 4}^1 h=-\int_1^{\log 4}h<0$$

Esto, unido a la continuidad de H (Bolzano) y a su decrecimiento estricto prueba que hay **un único cero**.

O bien, como $H(e)=\int_1^1 h=0$, es $x=e\in[1,4]$ el único cero, por ser H continua y decreciente.

Elegir entre 4d y 5:

4d. Si $h(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{1+x^2}$ [la de **4.**], probar las acotaciones $\frac{1}{2}<\int_0^1 h<2$ [conviene acotar el denominador]. [1.5 puntos]

Observemos lo primero que el desarrollo de h calculado en **4a** no proporciona una serie ni alternada ni positiva, con lo que no es fácil probar acotaciones a partir de ella.

Siguiendo la ayuda del enunciado, partimos del hecho de que en $[0,1]$ es $\frac{e^{2x}-e^x}{2}\le h(x)\le\frac{e^{2x}-e^x}{1}$.

Y, por tanto: $\frac{1}{2}\big[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\big]_0^1=\frac{1}{4}(e^2-2e+1)\le\int_0^1 h\le\big[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\big]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-2e+1)$.

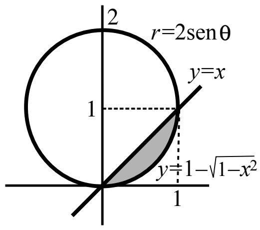
Del hecho de que $\frac{1}{2}(e-1)^2<\frac{1}{2}(3-1)^2=2$ y de que $\frac{1}{4}(e-1)^2>\frac{1}{4}(\frac{5}{2}-1)^2=\frac{9}{16}>\frac{1}{2}$ se siguen las cotas pedidas.

La cota inferior se deduce también del desarrollo de Taylor de numerador:

$$\int_0^1 h\ \ge\ \frac{1}{2}\int_0^1\big(x+\tfrac{3}{2}x^2+\cdots\big)\,dx\ =\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots>\frac{1}{2}\ \text{(ya que todos los sumandos son positivos).}$$

[Para la superior deberíamos acudir al resto de Taylor].

5. Hallar (integrando) el área de la menor región acotada por la circunferencia $x^2+y^2=2y$ y la recta $y=x$.
$\big[$Es algo más corto el cálculo con la fórmula $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(\theta)]^2d\theta$ de integración en polares$\big]$. [1.5 puntos]



La circunferencia $x^2+(y-1)^2=1$ es la de centro $(0,1)$ y radio 1 .

Corta $y=x$ cuando $2x^2=2x$, $x=0,1$. En el origen y en el punto $(1,1)$.

Despejando la y : $y^2-2y+x^2=0\ \to\ y=1-\sqrt{1-x^2}$. El área pedida es:

$$A=\int_0^1\big(x-1+\sqrt{1-x^2}\big)\,dx\ =\ \frac{1}{2}-1+\int_0^{\pi/2}\cos^2t\,dt\ =\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\Big[\frac{\operatorname{sen}2t}{4}\Big]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}\ .$$

[Un cuarto del área del círculo menos el área del triángulo].

$\big[$Hemos hecho el cambio $x=\operatorname{sen}t$ y usado que $\cos^2t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\big]$.

En polares la circunferencia es $r^2=2r\operatorname{sen}\theta$, $r=2\operatorname{sen}\theta$, y así: $A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}4\operatorname{sen}^2t\,dt=\frac{\pi}{4}-\big[\frac{\operatorname{sen}2t}{2}\big]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.