Matemáticas (grupos A, B y D) **Soluciones del primer parcial**

1. a] Determinar el dominio de $f(x)=\log\left[\pi-4\arctan(x^2)\right]$. **b]** Hallar y simplificar $f'(3^{-1/4})$.

a] f está definida si $4\arctan(x^2)<\pi \Leftrightarrow \arctan(x^2)<\frac{\pi}{4}=\underset{\text{arctan creciente}}{\arctan 1} \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1$. $\boxed{\operatorname{dom} f=(-1,1)}$.

b] $f'(x)=\frac{1}{\pi-4\arctan x^2}\cdot\frac{-4}{1+x^4}\cdot 2x$, $f'(3^{-1/4})=-\frac{8\cdot 3^{-1/4}}{\left(\pi-4\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)}=-\frac{8\cdot 3^{-1/4}}{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{4}{3}}=\boxed{-\frac{2\cdot 3^{7/4}}{\pi}=-\frac{6\cdot 3^{3/4}}{\pi}}$.

2. Hallar (si existe) el límite de las sucesiones: **a]** $a_n=\frac{\sqrt[3]{8n^7(1-n^2)}-n^3\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{(n+1)^3}$, **b]** $b_n=\frac{(-1)^n\sqrt{n(n-1)}}{n+1}$.

a] $a_n=\frac{2\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-1}-\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\to\frac{2\sqrt[3]{-1}-0}{1}=\boxed{-2}$ $\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\to\operatorname{sen}0=0\right.$ porque $\frac{1}{n}\to 0$ y $\operatorname{sen}x$ es continua en $\left.x=0\right)$.

b] b_n no va a tener límite, pues $\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n+1}\to 1$ y va a tomar infinitos valores próximos a 1 y a -1.
Lo mejor para formalizarlo es encontrar dos subsucesiones con diferente límite:

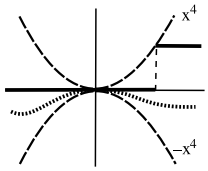
$$b_{2n}=\frac{\sqrt{2n(2n-1)}}{2n+1}=\frac{\sqrt{2(2-1/n)}}{2+1/n}\to 1\,,\quad b_{2n+1}=-\frac{\sqrt{(2n+1)2n}}{2n+2}=-\frac{\sqrt{(2+1/n)2}}{2+2/n}\to -1\,.$$

3. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)|\le x^4$ para todo $x\in\mathbf{R}$. ¿Es necesariamente continua en $x=0$? ¿Y en $x=1$? Probarlo o dar un contraejemplo.

En $x=1$ no tiene que ser continua. Por ejemplo $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ lo cumple y no lo es.

Sí debe serlo en 0: $|f(x)-f(0)|\overset{|f(0)|\le 0}{=}|f(x)|\le x^4=|x|^4<\varepsilon$ si $|x|<\delta=\sqrt[4]{\varepsilon}$.

$\left[\text{O bien, como } -x^4\le f(x)\le x^4 \text{ y } x^4,-x^4\underset{x\to 0}{\to}0\Rightarrow f(x)\underset{x\to 0}{\to}0=f(0)\right]$.



4. Sea $f(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}$. Hallar los x tales que $f''(x)=0$.

$f'(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}-\operatorname{sen}x$, $f''(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}-\cos x=\frac{2\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x-\cos^4 x}{\cos^3 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x(2+\cos^2 x)}{\cos^3 x}=0$ si $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

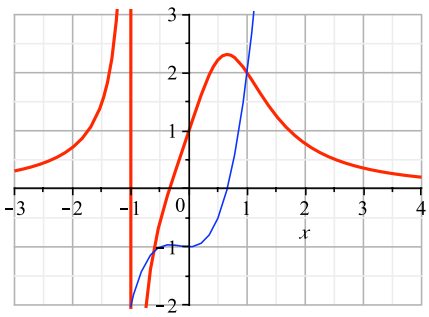
[Posibilidades más largas: $f''(x)=-\frac{\cos^4 x+\cos^2 x-2}{\cos^3 x}=0$, si $\cos^2 x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=1,-2\Leftrightarrow\cos x=\pm 1\,{}^{\uparrow}\ \ldots$].

5. a] Probar que $P(x)=2x^3+x^2-1$ tiene sólo 1 raíz real y hallar un intervalo de longitud 1 a la que pertenezca.
b] Sea $g(x)=\frac{3x+1}{x^3+1}$. **i]** Hallar su dominio, asíntotas, estudiar g' y dibujar aproximadamente la gráfica de g.
ii] Hallar (si existe) el valor mínimo de g en el intervalo $[0,1]$.

a] $P'(x)=2x(3x+1)\Rightarrow P$ tiene un máximo local en $\left(-\frac{1}{3},-\frac{26}{27}\right)$ y un mínimo local en $(0,-1)$ y para $x>0$ es estrictamente creciente.

Además $P(1)=2\Rightarrow\exists c\in(0,1)$ único con $P(c)=0$.

[Precisando más, como $P(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$, $c\in(\frac{1}{2},1)$; Descartes no basta].



b] i] $\operatorname{dom} g=\mathbf{R}-\{-1\}$. $g\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$, $g\underset{x\to -1^-}{\longrightarrow}\infty$, $g\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}-\infty$.

$g'(x)=-3\frac{2x^3+x^2-1}{(x^3+1)^2}\Rightarrow g$ decrece desde la raíz c de P y crece en $(-\infty,-1)$ y en $(-1,c)$. $g(x)=0$ para $x=-\frac{1}{3}$ (corte con el eje x).

Mas valores: $g(-2)=\frac{5}{7}$, $g(-\frac{1}{2})=-\frac{4}{7}$, $g(0)=1$, $g(\frac{1}{2})=\frac{20}{9}$, $g(1)=2$, $g(4)=\frac{1}{5}$.

ii] Los valores extremos de esta g continua (y derivable) en el intervalo deben existir. Viendo el crecimiento y decrecimiento y los valores ya hallados en los extremos del intervalo, es claro que el valor mínimo es $\boxed{1}$ y que el máximo se alcanza en c. (Como $\frac{1}{2}<c<1$, podríamos acotar su valor: $f(c)=\frac{3c+1}{c^3+1}<\frac{3\cdot 1+1}{(1/2)^3+1}=\frac{32}{9}$).

Matemáticas (grupo A) **Soluciones del segundo parcial**

1. Sea $f(x)=\dfrac{1-e^{x^3}}{x-\operatorname{sen}x}$. Hallar (razonadamente): **a]** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, **b]** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. [2 puntos]

a] $f(x)=\dfrac{1-(1+x^3+\cdots)}{x-(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots)}=\dfrac{-x^3+\cdots}{\frac{1}{6}x^3+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{-6}$. **b]** $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{e^{x^3}}{x}}{1-\frac{\operatorname{sen}x}{x}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{-\infty}\ \left(\frac{0-\infty}{1-0}\right)$, pues $\dfrac{e^{x^3}}{x}\overset{\text{L'H}}{\to}\dfrac{3x^2e^{x^3}}{1}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$.

2. Precisar para qué valores de x converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n x^{3n}}{1+\sqrt{n+3}}$. [2 puntos]

Cociente: $\dfrac{1+\sqrt{n+3}}{1+\sqrt{n+4}}\dfrac{8^{n+1}}{8^n}\dfrac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}}\to 8|x|^3\Rightarrow$ converge si $|x|<\frac{1}{2}$, diverge si $|x|>\frac{1}{2}$ $\left(R=\frac{1}{2}\text{ radio de convergencia}\right)$.

Para $x=\frac{1}{2}$ queda $\sum\frac{1}{1+\sqrt{n+3}}$ que diverge, pues su término general $\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(\frac{a_n}{1/\sqrt{n}}=\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}\to 1\right)$ y $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

La de $x=-\frac{1}{2}$, $\sum\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n+3}}$, converge por Leibniz, ya que $a_n=\frac{1}{1+\sqrt{n+3}}\to 0$ y decrece claramente.

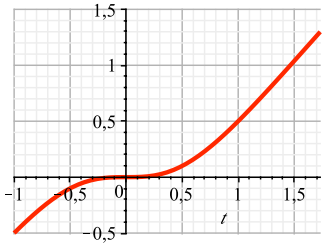
Por tanto, la serie converge exactamente $\boxed{\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.

3. Sea $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{\tan x}\frac{t^3}{1+t^2}\,dt$. **a]** Estudiar el crecimiento y decrecimiento de F en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.
b] Precisar el punto x de dicho intervalo para el que es máximo el valor de F. [2 puntos]

a] Como el integrando es continuo y $\tan x$ es derivable en el intervalo, $F'(x)=\dfrac{\tan^3 x}{1+\tan^2 x}(1+\tan^2 x)=\tan^3 x$.

Y a la vista del signo de $\tan x$, F **decrece en** $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ **y crece en** $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

[Se podía decir sin derivar: hasta 0 sumamos 'áreas negativas' y luego positivas].



b] A la vista de lo anterior el máximo se dará en un extremo del intervalo:

$F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\int_{-1}^{-1}=0$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_{-1}^{\sqrt{3}}=\int_{-1}^{1}+\int_{1}^{\sqrt{3}}>0$ (es f impar y $f>0$ en $[1,\sqrt{3}]$).

El valor máximo de F se alcanza en $x=\frac{\pi}{3}$.

[También podemos hallar la integral: $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{t+t^3-t}{1+t^2}dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big]_{-1}^{\sqrt{3}}=1-\frac{\log 2}{2}>0$, pues $\log 2<1<2$].

4. Determinar si converge la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\arctan x^2}\,dx$. [1.5 puntos]

Hay dos impropiedades (en 0 e ∞) con lo que deben converger dos integrales $\int_{0^+}$ e $\int^{\infty}$.

Como cualquiera de ellas diverge, la integral total es **divergente**:

En 0^+ se comporta como la divergente $\int_{0^+}\frac{dx}{x^2}$: $\dfrac{\arctan\frac{1}{x}/\arctan x^2}{1/x^2}=\dfrac{x^2}{x^2+o(x^2)}\arctan\frac{1}{x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$.

Y en ∞ como la también divergente $\int^{\infty}\frac{dx}{x}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan\frac{1}{x}/\arctan x^2}{1/x}=\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\arctan t}{t}=\dfrac{2}{\pi}$.

5. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{\log 3}\frac{9-e^x}{e^{2x}+3}\,dx$. Probar que esta integral es mayor que $\frac{1}{2}$. [2.5 puntos]

$$\int_0^{\log 3}\frac{(9-e^x)e^x\,dx}{(e^{2x}+3)e^x}\underset{u=e^x}{=}\int_1^3\frac{(9-u)\,du}{(u^2+3)u}=\int_1^3\frac{3\,du}{u}-\int_1^3\frac{3u\,du}{u^2+3}-\frac{1}{3}\int_1^3\frac{du}{(u/\sqrt{3})^2+1}=3\log|u|-\frac{3}{2}\log(u^2+3)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\Big]_1^3$$

$$=3\log 3-\frac{3}{2}\log(3\cdot 2^2)+\frac{3}{2}\log 2^2-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]=\boxed{\frac{3}{2}\log 3-\frac{\pi}{18}\sqrt{3}}.$$

$\left[\text{La descomposición en fracciones simples: }\dfrac{9-u}{(u^2+3)u}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{Bu+C}{u^2+3}=\dfrac{A(u^2+3)+(Bu+C)u}{(u^2+3)u},\ \begin{array}{l}u=0\to A=3\\ u^2:\ A+B=0\to B=-3\\ u^1:\ C=-1\end{array}\right]$.

Como en el intervalo $\dfrac{9-e^x}{e^{2x}+3}>\dfrac{9-e^{\log 3}}{e^{2\log 3}+3}=\frac{1}{2}$ $\left[\begin{array}{c}\text{mínimo numerador}\\ \text{máximo denominador}\end{array}\right]$, la integral es mayor que $\int_0^{\log 3}\frac{dt}{2}=\frac{\log 3}{2}>\frac{1}{2}$.