Elementos de Física y Matemáticas (2008/09)
Cálculo (preliminares)

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{2772}{12474}$, b) $\left(-2^3\right)^2$, c) $2^{(-3)^2}$, d) $(-2)^{3^2}$, e) $\left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}$, f) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-3/2}$, g) $8^{-2/3}3^{-4}\,2^{-4/6}\,9^2\,2^{13/15}\,4^{7/5}$,
h) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{3!}$, i) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{-2}$, j) $\left(3+\sqrt{8}\,\right)^3\left(3-\sqrt{8}\,\right)^3$, k) $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{n-1}{n!}$, l) $\frac{n!}{(n-3)!(n^2-2n)}$.

2. Halla todos los números reales x que cumplen cada igualdad o desigualdad:

a) $x^2-x-2=0$, b) $x^2+x+2=0$, c) $x^4-x^2-2=0$, d) $\frac{2}{x^2-2x}+\frac{3}{x^2-4x+4}=1$,
e) $\sqrt{x+9}-2\sqrt{x+1}=0$, f) $\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}=0$, g) $8^x=2^{-x^2}$,
h) $2\log x+\log(x+2)=0$, i) $|x|=-x$, j) $|x^2+x-2|=2-x-x^2$,
k) $\left|\log_{10}^2(1-9x)+\log_{10}(1-9x)-2\right|=2-\log_{10}(1-9x)-\log_{10}^2(1-9x)$,
l) $-3x^3>\frac{1}{9}$, m) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{12}-3\leq\frac{4x}{15}+\frac{1}{2}$, n) $7+x+\frac{6}{x}<0$, o) $3^{4+x^2-x^3}<1$.

3. Dibuja en el plano XY los puntos que cumplen $|x|+|y|=1$.

4. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\forall a,b\neq 0$; ii) $\sqrt{a^2}=-a$, $\forall a\leq 0$; iii) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$, $\forall a,b>0$;
iv) $4^{a+b}=4^a+4^b$, $\forall a,b$; v) $\left(a^b\right)^c=\left(a^c\right)^b$, $\forall a>0$; vi) $\log(ab)=\log a+\log b$, $\forall a,b$;
vii) $a<b\Rightarrow ac<bc$, $\forall a,b,c$; viii) $a>a^3$, si $0<a<1$; ix) $a^b>1$, $\forall a>1,\forall b$.

5. Calcula $\binom{4}{4},\binom{4}{3},\ldots,\binom{4}{0}$: (i) Mediante el triángulo de Pascal,
(ii) con la fórmula $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$, (iii) con la fórmula $\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.
Utilizando los resultados anteriores, escribe el desarrollo de $\left(a-3x^2\right)^4$.

6. Prueba que $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ y relaciónalo con el triángulo de Pascal.

7. Calcula $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$ para $n=2,3,4,5$ y 6.
¿Cuál crees que es la suma para cualquier n? Dedúcelo de la fórmula del binomio.
¿Cuánto vale $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$?

8. Calcula:

a) $1+2+3+4+\cdots+1024$,
b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024$,
c) $1/2\ +\ 1/4\ +\ 1/8\ +\ \cdots\ 1/1024$,
d) $1/2\ +\ 1/4\ +\ 1/8\ +\ \cdots$.

9. Halla la suma de los 100 primeros números impares.

10. Si $a_1=-3$ y $a_{n+1}=a_n+\frac{3}{5}$, calcula a_4 , a_{28} y la suma $S=a_4+a_5+\cdots+a_{28}$.
¿Puedes encontrar 25 enteros en progresión aritmética cuya suma sea la misma S?
¿Y si son 24 los enteros?

Elementos de Física y Matemáticas (2008/09)
Cálculo (trigonometría)

11. Expresa los siguientes ángulos en radianes: 7º, 15º, 18º, 120º, 150º, 270º.
Y los siguientes ángulos, que están en radianes, en grados: $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{6}$, 3π , 0.017 .

12. Representa las gráficas de las siguientes funciones:
a) $\operatorname{sen}^2 x$, b) $\tan\frac{x}{2}$, c) $\cot x$, d) $\sec 2x$, e) $\cos(x-\frac{\pi}{2})$, f) $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{180}$, g) $\frac{2}{\pi}\arctan x$.

13. Utilizando las expresiones de $\operatorname{sen}(A+B)$ y de $\cos(A+B)$, calcular en función de $\operatorname{sen} A$, $\cos A$, $\operatorname{sen} B$ y $\cos B$, simplificando al máximo las expresiones, estas cantidades:

i) $\tan(A+B)$, ii) $\cos 2A$, iii) $\operatorname{sen} 3A$, iv) $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, v) $\cos\frac{A}{2}$, vi) $\tan\frac{A}{2}$.

Utilizando el Teorema de Pitágoras deduce el valor de $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{4}$ y $\cos\frac{\pi}{3}$.
Calcula además: $\tan\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ y $\cos\frac{\pi}{12}$.

14. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$ y que α está en el segundo cuadrante, calcula $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}2\alpha$, $\tan\alpha$ y $\operatorname{sen}3\alpha$, usando tan sólo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raices cuadradas.

15. Halla todos los números reales x que verifican:

$$\text{a) } \operatorname{sen}(2x)+\cos(x+\tfrac{\pi}{2})=\operatorname{sen}(5\pi)\ ,\quad \text{b) } 3\tan x+2\cos x=0\ ,$$

$$\text{c) } 1-\cos x=\operatorname{sen}\tfrac{x}{2}\ ,\quad \text{d) } 1+4\operatorname{sen}^2(x)=2\tan(x)\tan(2x)\ ,$$

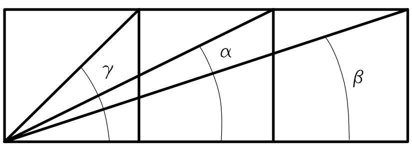
$$\text{e) } \cos^{58}x+\operatorname{sen}^{40}x=1\ .$$

16. Sabiendo que desde cierta distancia un edificio se vé bajo un ángulo de 60º, y alejándose 200 m se vé bajo un ángulo de 30º, ¿cuál será la altura del edificio, y cuál será la distancia que nos separaba de él en la primera posición?

17. La base de un triángulo mide 15 metros y los dos ángulos que se apoyan en ella son de 30º y 45º. ¿Cuánto valen los restantes lados y el ángulo que falta por determinar?

18. En una circunferencia de centro O, considera dos puntos diametralmente opuestos A y C. Sitúa un punto, B, en una posición arbitraria sobre la circunferencia entre A y C (haz un dibujo) ¿Qué relación se da entre los ángulos BAO y BOC?

19. Los tres cuadrados son iguales, ¿cuánto vale $\alpha+\beta+\gamma$?



20. Halla las expresiones de $\cos 5x$ en función de $\cos x$ y de $\operatorname{sen} 5x$ en función de $\operatorname{sen} x$.
Encuentra a partir de estas expresiones algún polinomio que deba anular el $\cos\frac{\pi}{5}$.
Halla las raíces del polinomio encontrado y prueba que: $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Elementos de Física y Matemáticas (2008/09)
Cálculo (derivadas)

21. Halla la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ a las siguientes funciones:
$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{3x}{7} - 12$, $h(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $k(x) = (2x-3)^{-7/3}$.
Esboza un dibujo de las gráficas de las funciones y de sus tangentes.

22. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, 3)$ y es paralela a la recta tangente a $f(x) = \ln(1+ \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x)})$ en $x = 0$.

23. Halla b y c tales que la parábola $y=x^2+bx+c$ sea tangente a la recta $y=x$ en $x=1$.

24. Determina para qué valores de x se anulan las derivadas segundas de las funciones:
$f(x) = x^2 + 7x - 5 + \frac{8}{x-1}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$, $h(x) = \operatorname{sen} x \cos x$, $k(x) = \ln(1+\cos x)$.

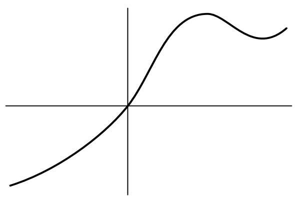
25. Sea $f(x) = 3 + x^5(x - 3)^4$.
Prueba que su función derivada $f'(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo $(0, 3)$.

26. Determina cuántas veces se anula la función $x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2$ en el intervalo $[0, \pi]$.

27. Dibuja la gráfica de: i) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$, ii) $g(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, estudiando máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento, asíntotas, puntos de inflexión, concavidad y convexidad.

28. Prueba que si $x > 0$, entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Da una demostración visual de la desigualdad anterior.

29. Esta gráfica representa la derivada de una cierta función $f(x)$. ¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación $f(x) = 0$? Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos soluciones distintas, ¿pueden ambas tener el mismo signo?



30. Sea O el punto $(2, 1)$, y sea L la gráfica de $f(x) = 1 - 3x$. ¿Cuál es el punto de L que dista menos de O? ¿Y el que dista más?

31. Se tiene un alambre de 2 m de longitud y se desea dividirlo en dos partes, para formar con la primera un cuadrado y con la segunda un círculo. ¿Cómo habrá que hacerlo para que la suma de las áreas de las dos figuras resultantes sea máxima? ¿Y mínima?

32. Determina el valor de a para el que la suma de los cuadrados de las soluciones de $x^2 + ax + a - 2 = 0$ sea mínima.

33. El radio de una esfera aumenta con velocidad $v = 2$ cm/s. ¿A qué velocidad aumentan la superficie y el volumen de la esfera cuando $r = 10$ cm?

34. Calcula estos límites usando si es preciso la regla de L'Hôpital:
$$i)\ \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ ,\ ii)\ \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos^2 x}{(x-\pi/2)^2}\ ,\ iii)\ \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\ ,\ iv)\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\ ,\ v)\ \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}\ .$$

35. a) Dibujar la gráfica del polinomio $P(x) = x^3+3x^2-9x-3$.
b) Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$. Hallar sus asíntotas. Determinar dónde crece y decrece. Precisar, utilizando a), en qué intervalos están sus puntos de inflexión. Dibujar la gráfica de f.

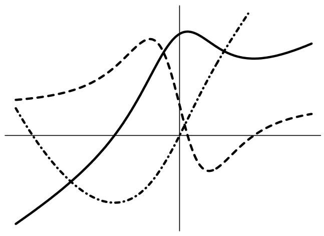
Elementos de Física y Matemáticas (2008/09)
Cálculo (integrales)

36. Calcula las siguientes primitivas:

$$\int x(x^2+3)^2\,dx\,,\quad \int \sqrt{x+5}\,dx\,,\quad \int \frac{x+1}{x+9}dx\,,\quad \int \frac{x+1}{x^2+9}dx\,,\quad \int \operatorname{sen} x\cos x\,dx\,,\quad \int \tan x\,dx$$

37. Sabiendo que $f(x)$ es continua, que $f(0)=0$ y que $f'(x)=\begin{cases}1-2x & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$, calcula $f(x)$ y esboza su gráfica.

38. En esta gráfica se encuentra una función derivable $f(x)$, su función derivada $f'(x)$ y una primitiva $F(x)$. Identifica razonadamente cada curva con su función correspondiente.



39. Calcula el área de estas regiones:

i) Región limitada por el eje x y por la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen} x$, entre $x=0$ y $x=\pi$.

ii) Región limitada por las graficas de $f(x)=x+1$ y $f(x)=x^2-2x+1$.

iii) Región finita encerrada entre el eje x y la gráfica de $f(x)=(x-1)^2(x-4)$.

iv) Región finita encerrada entre la gráfica de $f(x)=x^3-x$ y su recta tangente en $x=-1$.

40. Calcula el área de la región acotada limitada por la curva $y=1/(x^2+1)$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de la curva.

41. Una función está definida para $x\in[0,7]$ del siguiente modo:

$f(x)=1$ para $0\le x\le 4$, $f(x)=5-x$ para $4<x\le 5$, $f(x)=-1$ para $5<x\le 7$.

Dibuja $f(x)$ y su derivada $f'(x)$. Sea $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Calcula $F(4)$, $F(5)$ y $F(7)$. Dibuja aproximadamente la gráfica de $F(x)$.

42. Calcula $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{x+1}dx$, y decide si esa integral es mayor o menor que 1.

43. Sin calcular las primitivas, ¿puedes decir en cada caso cuál es el valor correcto de la integral entre las tres opciones que se ofrecen?:

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^8 x\,dx$: a) $\frac{\pi}{4}-1$, b) $\frac{35\pi}{128}$, c) π.

ii) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^7 x\,dx$: a) $\frac{5\pi}{16}$, b) $\frac{\pi}{8}$, c) 0.

iii) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3-8}$: a) $-\frac{\ln 3}{24}-\frac{\sqrt{3}\pi}{72}$, b) $\ln\frac{9}{8}$, c) $\frac{33}{4}$.

44. Prueba que $x>\operatorname{sen} x$, si $0<x<\frac{\pi}{2}$, expresando esas funciones como integrales definidas.

45. Sea $f(x)=\dfrac{\ln^2(x)}{x}$. a) Halla el dominio de f, estudia su crecimiento y decrecimiento y esboza su gráfica (no es necesario calcular los puntos de inflexión de f).

b) Halla el área comprendida entre la gráfica y el eje x en el intervalo en que f es creciente.

c) ¿Cuántos máximos y mínimos tiene una primitiva cualquiera de f? ¿Y puntos de inflexión?