Preliminares

Se suponen conocidos: $\forall$ (para todo), $\exists$ (existe), $\Rightarrow$ (implica), $\Leftrightarrow$ (si y sólo si), $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección), $\subset$ (contenido en), $\in$ (pertenece), ...

$\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$ naturales, $\mathbf{Z}=\{\dots,-1,0,1,2,\dots\}$ enteros, $\mathbf{Q}=\{\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbf{Z},\ q\neq 0\}$ racionales.

En Cálculo I se definen bien los $\mathbf{R}$ reales. $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ son 'cuerpos' ($\mathbf{N}$ y $\mathbf{Z}$ no), es decir, cumplen:

1) asociativa y conmutativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a+b=b+a$, $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, $a\cdot b=b\cdot a$
2) distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
3) existen neutros 0 respecto a + y 1 respecto a $\cdot$: $a+0=a$, $a\cdot 1=a\ \forall a$
4) existen inversos: $\forall a\ \exists -a$ tal que $a+(-a)=0$, $\forall a\neq 0\ \exists\, a^{-1}$ tal que $a\cdot a^{-1}=1$

Operaciones básicas: a partir de las operaciones anteriores se definen ($a,b\in\mathbf{R}$, $n,m\in\mathbf{N}$):

$a-b=a+(-b)$; si $b\neq 0$, $\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$; $a^n=a\cdots a$, n veces; si $a\neq 0$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $a^0=1$;

$a^{1/n}=\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a$, $a^{m/n}=\left[a^{1/n}\right]^m=\left[a^m\right]^{1/n}$, si n par, sólo si $a>0$, si n impar $\forall a$;

[$\sqrt{a}$ representa siempre sólo la raíz positiva; el otro número real cuyo cuadrado es a es $-\sqrt{a}$].

Propiedades: $\boxed{a^{c+d}=a^ca^d,\ (a^c)^d=a^{cd},\ (ab)^c=a^cb^c,\ (\frac{a}{b})^c=\frac{a^c}{b^c},\ a^{-c}=\frac{1}{a^c}}$, si $a,b>0$.

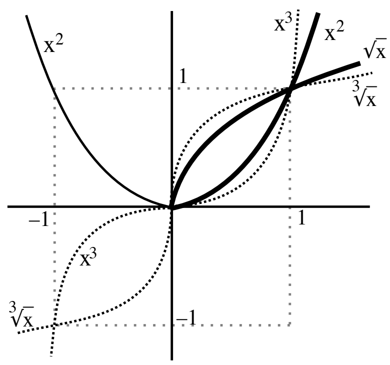
[Si $c,d\in\mathbf{Z}$ o son racionales $\frac{m}{n}$ con n impar valen $\forall a,b$; a^{c^d} representa siempre $a^{(c^d)}$].

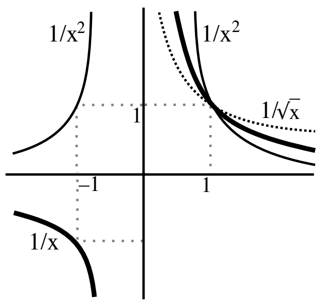
$\boxed{\log_b a=c\Leftrightarrow b^c=a}$ para $a,b>0$, $b\neq 1$.

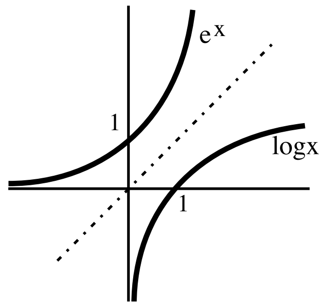
El importante: $\log_{\mathrm{e}}\equiv\log\equiv\ln\equiv \mathrm{L}$, $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=2{,}71828182\dots$

[Algunos valores: $\log 1=0$, $\log\mathrm{e}=1$, $\log 2\approx 0.69$, $\log 3\approx 1.10$, $\log 5\approx 1.61$, ...].

Propiedades: $\boxed{\log(ab)=\log a+\log b,\ \log(\frac{a}{b})=\log a-\log b,\ \log(a^c)=c\log a}$, si $a,b>0$.







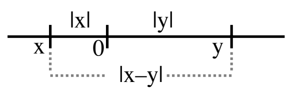
Desigualdades y valor absoluto:

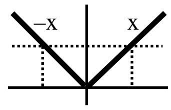
$a<b\Rightarrow a+c<b+c$, $a-c<b-c$	$a<b$, $c<d\Rightarrow a+c<b+d$, $a-d<b-c$
$a<b$, $c>0\Rightarrow ac<bc$, $a/c<b/c$	$a<b$, $c<d\Rightarrow ac<bd$, si $a,b,c,d>0$
$a<b$, $c<0\Rightarrow ac>bc$, $a/c>b/c$	$a/c<b/d\Leftrightarrow ad<bc$, si $a,b,c,d>0$
$1<a\Rightarrow a<a^2$; $0<a<1\Rightarrow a>a^2$	$a<b\Leftrightarrow 1/a>1/b$, $a^2<b^2$, $\sqrt{a}<\sqrt{b}$, si $a,b>0$

Todas las desigualdades son válidas sustituyendo los $<$ por $\leq$ (menos los >0 ó <0).

A cada real x le podemos asociar un real positivo $|x|$, el **valor absoluto** de x:

$$\boxed{|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x\leq 0\end{cases}}$$





$|x|$ representa la distancia de x al origen y $|x-y|$ la distancia de x a y (tanto si $y>x$ como si $x>y$)

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Dados $n, d \in \mathbf{N}$ se dice que n es **múltiplo** de d o que d es **divisor** de n si n/d es también natural. Todo n tiene al menos dos divisores: 1 y n. Si son los únicos n se dice **primo**. Un conjunto de enteros $n_1, ..., n_k$ tiene siempre un divisor común: el 1. **Máximo común divisor** $\text{mcd}[n_1, ..., n_k]$ es el mayor natural que divide a todos. Por otra parte, hay naturales múltiplos de todos ellos (por ejemplo su producto). **Mínimo común múltiplo** $\text{mcm}[n_1, ..., n_k]$ es el menor de ellos. Hallar el mcd y el mcm es fácil una vez calculados los divisores primos de cada n_j.

[Un entero es divisible por 3 (y por 9) si y sólo si lo es la suma de sus cifras; divisible por 4 (por 8) si lo son sus 2 (3) últimas cifras; por 5 si acaba en 0 o en 5; por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y la suma de las que ocupan lugar impar es múltiplo de 11 (incluido el 0)].

Otra forma de hallar el $\text{mcd}[m,n]$ es el **algoritmo de Euclides**: Sea $m>n$. Dividimos m entre n y llamamos q_1 al cociente y r_1 al resto: $m=q_1 n+r_1$. Dividimos ahora n entre r_1: $n=q_2 r_1+r_2$. Después r_1 entre r_2: $r_1=q_3 r_2+r_3$. Luego r_2 entre r_3 ..., y seguimos dividiendo así hasta que el resto sea 0. El $\text{mcd}[m,n]$ es **el último resto no nulo**.

Ej. Sean 2340 y 6798. Como $2340=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13$ y $6798 = 2\cdot 3\cdot 11\cdot 103$, mcd=6 y mcm=$2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 103=2651220$

Euclides: $6798 = 2\cdot 2340 + 2118, 2340 = 1\cdot 2118 + 222, 2118 = 9\cdot 222 + 120, 222 = 1\cdot 120 + 102,$
$120 = 1\cdot 102 + 18, 102 = 5\cdot 18 + 12, 18 = 1\cdot 12 + 6, 12 = 2\cdot 6 \Rightarrow \text{mcd} = 6$, mcm = $\frac{2340\cdot 6798}{6} = 2651220$

Factoriales, números combinatorios y binomio de Newton

Dado $n \in \mathbf{N}$ se define **factorial** de n como: $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$, y además $0! = 1$.
Si k es otro natural con $0 \leq k \leq n$, el **coeficiente binomial** o **número combinatorio** es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$ (se lee 'n sobre k' y es un número natural).

[$n!$ representa el número de formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de n elementos y $\binom{n}{k}$ es el número de formas distintas en que se pueden escoger grupos distintos de k elementos (sin importar su orden) entre los n de un conjunto].

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \\ &&&&\ldots&\ldots&\ldots&&&& \end{array}$$

Binomio de Newton:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Progresiones aritméticas

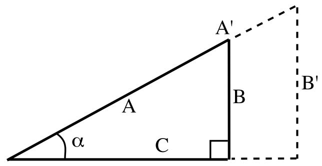
a_1, $a_2 = a_1+d$, $a_3 = a_1+2d$, ..., $a_n = a_1+(n-1)d$. Su suma: $S = \frac{a_1+a_n}{2}\, n$.

Progresiones geométricas

a_1, $a_2 = a_1 r$, $a_3 = a_1 r^2$, ..., $a_n = a_1 r^{n-1}$. Su suma: $S = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$.

Trigonometría

Las razones trigonométricas aparecen primero como cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo:

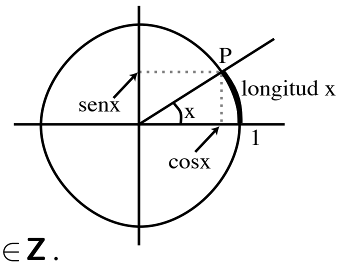


$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{B}{A}} = \frac{B'}{A'}$ [triángulos semejantes tienen lados proporcionales],

$\boxed{\cos\alpha = \frac{C}{A}}$ y $\boxed{\tan\alpha = \frac{B}{C}}$. Válidas para $0<\alpha<90^o$.

Pero interesa definirlas para cualquier ángulo, positivo o negativo, y además expresado en radianes:

Sea x la longitud del arco que une $(1,0)$ con un punto P de la circunferencia unidad (longitud medida en sentido horario o antihorario). El ángulo orientado (positivo hacia arriba, negativo hacia abajo) formado por las semirrectas que unen $(0,0)$ con ambos puntos es el ángulo de x **radianes** y $\operatorname{sen}x$ es la **ordenada** de P. A partir del $\operatorname{sen}x$ definimos:

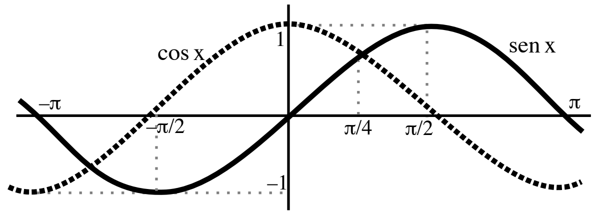


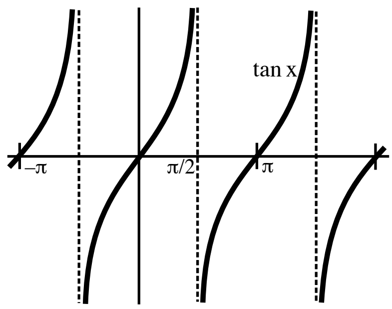
$\boxed{\cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ [o abscisa de P] $\forall x$; $\boxed{\tan x = \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}$ si $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Equivalencia entre grados y radianes: longitud de la circunferencia unidad $=2\pi \Rightarrow$ un ángulo recto son $\frac{\pi}{2}$ radianes ó 90° y por tanto $\boxed{a^\circ = \frac{a\pi}{180} \text{ radianes}}$. $30^\circ, 45^\circ$ y 60° son, respectivamente, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Gráficas de las funciones trigonométricas (**siempre en radianes**):

Unas definiciones antes: f es par si $f(-x)=f(x)$ e impar si $f(-x)=-f(x)$;
f es de periodo T si $f(x+T)=f(x)\ \forall x$.





$\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ son de periodo 2π, $\operatorname{sen}x$ es impar y $\cos x$ es par, $\tan x$ es de periodo π e impar.

[$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y $\operatorname{cosec}x = \frac{1}{\operatorname{sen}x}$ se utilizan menos].

Las funciones trigonométricas tienen una infinidad de valores exactos conocidos. Estos son inmediatos:

$$\operatorname{sen}(k\pi) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right) = \tan(k\pi) = 0 \ ,$$
$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = \cos(2k\pi) = 1 \ , \ \ \operatorname{sen}\left(-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = \cos[(2k-1)\pi] = -1 \ .$$

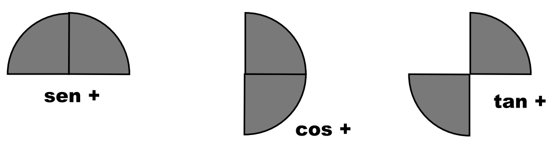
Estos se deducen del teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{6} = \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} \ , \ \ \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} = \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \ \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3} = \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$
$$\tan\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \ , \quad \tan\tfrac{\pi}{4} = 1 \ , \quad \tan\tfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} \ .$$

De ellos salen los similares de otros cuadrantes, por ejemplo:

$$\operatorname{sen}\tfrac{5\pi}{6} = \tfrac{1}{2} \ ; \ \ \operatorname{sen}\tfrac{7\pi}{6} = \operatorname{sen}\tfrac{11\pi}{6} = -\tfrac{1}{2} \ \left[\text{o si se prefiere: } \operatorname{sen}(-\tfrac{5\pi}{6}) = \operatorname{sen}(-\tfrac{\pi}{6}) = -\tfrac{1}{2}\ \right].$$

Seno, coseno y tangente son positivos en los cuadrantes abajo dibujados:



Identidades trigonométricas:

$\boxed{\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1 \;\Rightarrow\; 1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}}$ inmediato de Pitágoras. Pero no son fáciles de probar:

$\boxed{\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen}a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen}b\,,\ \cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}\,,\ \forall a,b$

A partir de ellas: $\boxed{\operatorname{sen}2a=2\operatorname{sen}a\cos a\,,\ \ \cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}=1-2\operatorname{sen}^2 a=2\cos^2 a-1$

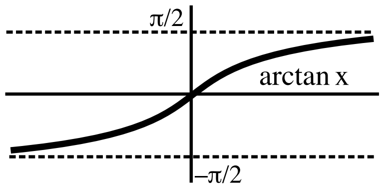
$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2 a=\tfrac{1}{2}[1-\cos 2a]\,,\ \cos^2 a=\tfrac{1}{2}[1+\cos 2a]}$$

Es fácil hallar, dado $\operatorname{sen}\alpha$ ó $\cos\alpha$ ó $\tan\alpha$ **y el cuadrante** en el que se está α, los valores de las otras dos.

[Sin el cuadrante, no queda determinado, pues siempre hay dos posibilidades].

Dada una razón trigonométrica no está claro el ángulo del que proviene. Por ejemplo hay infinitos x con $\tan x=-1$, incluso hay dos $\big(x=\frac{3\pi}{4}$ y $x=\frac{7\pi}{4}\big)$ si sólo nos preocupamos de los x de $[0,2\pi)$. Por eso hay que tener cuidado con las funciones **trigonométricas inversas**. Sólo definimos el arco tangente (aparece muchas veces, por ejemplo hallando primitivas). No es simplemente 'el ángulo cuyo tangente vale x':

$\boxed{y=\arctan x \ \text{ si } \ \tan y=x \ \text{ e } \ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$.

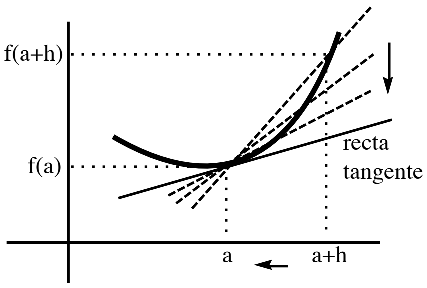


Impar. $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$, $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. $\arctan x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$.

[No siempre es $\arctan(\tan x)=x$: $\arctan(\tan\frac{3\pi}{4})=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$].

Derivadas

f **derivable** en a si existe $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, que se representa por $f'(a)$ y se llama **derivada** de f en a.



Dos aplicaciones.

Pendiente de la tangente a una curva: $[f(a{+}h)-f(a)]/h$ es la pendiente de la recta secante que pasa por $(a,f(a))$ y $(a{+}h,f(a{+}h))$. Si $h\to 0$, la secante tiende hacia la recta tangente y su pendiente tiende hacia $f'(a)$.

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en a (si $f'(a)$ existe) es:

$$\boxed{y=f(a)+f'(a)(x-a)}$$

Velocidad instantánea: si $d(t)$ es la distancia recorrida por un móvil en el tiempo t, $\frac{d(a+h)-d(a)}{h}$ es su velocidad media en el intervalo $[a,a+h]$ y $d'(a)$ es su velocidad en el instante $t=a$.

f', **función derivada** de f, es la que hace corresponder a cada x en que f es derivable el valor $f'(x)$; $f''(a)$ será la derivada de $f'(x)$ en el punto a (un número) y f'' la función derivada de f'; ...

[Otra notación famosa es la de Leibniz: $f'=\dfrac{df}{dx}$, $f'(a)=\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=a}$, $f''=\dfrac{d^2f}{dx^2}$]

Ej. $h(x)=|x|$. Si $a>0$, $h'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h}=1$. Si $a>0$, $h'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-a+h-a}{h}=-1$. Pero $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ no existe.

Teorema: $\boxed{f \text{ derivable en } a \Rightarrow f \text{ continua en } a}$

Hay funciones continuas no derivables
(el valor absoluto, por ejemplo; tienen 'picos').

Se pueden calcular casi todas las derivadas sin acudir a la definición:

Si f y g son derivables en a entonces $c\cdot f$, $f\pm g$, $f\cdot g$ son derivables en a y se tiene:

$$(c\cdot f)'(a)=c\cdot f'(a)\ ;\ (f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)\ ;\ (f\cdot g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\ .$$

Si además $g(a)\neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ y $\dfrac{f}{g}$ son derivables en a y es

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\ ;\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}\ .$$

g derivable en a y f derivable en $g(a)\Rightarrow f\circ g$ derivable en a y $(f\circ g)'=f'[g(a)]\cdot g'(a)$
[**regla de la cadena**].

Derivadas de las funciones elementales:

$\boxed{[x^b]'=bx^{b-1}}$ para todo b real, $x>0$. $\boxed{[\log|x|]'=\frac{1}{x}}$, $x\neq 0$.

$\boxed{[\mathrm{e}^x]'=\mathrm{e}^x\ ,\ \forall x\ \ ;\ \ [b^x]'=b^x\log b\ ,\ \forall x, b>0\ \ ;\ \ [\log_b x]'=\frac{1}{x\log b}\ ,\ x>0, b>0, b\neq 1}$

$\boxed{[\operatorname{sen}x]'=\cos x\ ,\ [\cos x]'=-\operatorname{sen}x\ ,\ \forall x\ ;\ \ [\tan x]'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\ ,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$

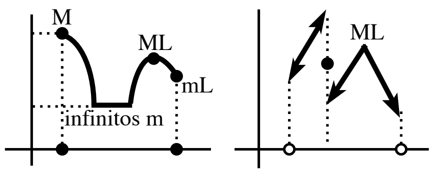
$\boxed{[\arcsin x]'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ [\arccos x]'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \forall x\in(-1,1)\ ;\ \ [\arctan x]'=\frac{1}{1+x^2}\ ,\ \forall x}$

Teoremas sobre funciones derivables:

Buscamos los x de un conjunto $A \subset \mathrm{dom} f$ en los que una f alcanza sus **valores máximo y mínimo** (a ambos se les llama **valores extremos** de f). Si A es un intervalo cerrado y f es continua existen seguro, aunque puede no haberlos si A es otro tipo de conjuntos o si f no es continua. En ocasiones se llama a estos valores máximo y mínimo **absolutos**, para distinguirlos de los **locales o relativos**:

Def. f posee un **máximo** [**mínimo**] **local** en x si $f(x) \geq f(x+h)$ [$f(x) \leq f(x+h)$] para h pequeño.

Está claro que si un valor extremo (absoluto) de f se toma en un x también tiene f en ese x un extremo local y que lo contrario no es cierto. Los máximos y mínimos (absolutos y locales) pueden ser infinitos o no existir, pueden darse en el borde o en el interior de A. En este último caso:



Teorema: Si f posee un extremo local en x interior a A y f es derivable en $x \Rightarrow f'(x) = 0$

Hay x con $f'(x)=0$ en los que f no tiene extremo local ($f(x)=x^3$ en $x=0$). Puede no ser $f'(x) = 0$ en un x en el que f posea un extremo local (si x no es interior o f no derivable en x). Por tanto:

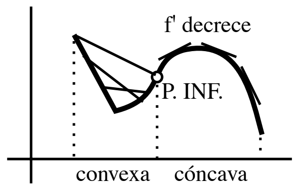
Para buscar los valores máximo y mínimo de una f en un intervalo $[a,b]$ hay que considerar:
• los extremos a y b • los $x \in (a,b)$ en los que $f'(x)=0$ • los x en los que no exista $f'(x)$

Teorema: Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces:
si $f'(x) > 0$ para todo x de (a,b), f es estrictamente creciente en $[a,b]$;
si $f'(x) < 0$ para todo x de (a,b), f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

Teorema: Sea $f'(c) = 0$. Entonces si $f''(c) > 0$ (< 0), f posee un mínimo (máximo) local en c.

(si $f''(c) = 0$ podría haber en c un máximo, un mínimo o ninguna de las dos cosas)

Def. f es **convexa hacia abajo** en un intervalo I si $\forall x, y \in I$ el segmento que une $(x, f(x))$ con $(y, f(y))$ está por encima de la gráfica de f. f es **cóncava** si $-f$ es convexa. Se llama **punto de inflexión** a uno de la gráfica en la que ésta pasa de convexa a cóncava o viceversa.



[Hay libros que llaman cóncava a lo que nosotros llamamos convexa y viceversa; otros, dicen que se dobla hacia arriba ($\cup$), o hacia abajo ($\cap$)].

Teorema: Sea f continua en $[a,b]$ y derivable dos veces en (a,b). Si $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) en (a,b), es f convexa (cóncava) en $[a,b]$. Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, debe ser $f''(c)=0$.

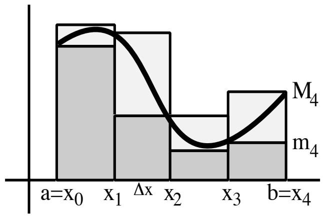
[Geométricamente es claro: f es $\cup$ si la pendiente de la tangente va creciendo (y si $f'' \geq 0$, f' crece); es $\cap$ si decrece; en un punto de inflexión hay un máximo o mínimo de la f' (pasa de crecer a decrecer o al revés). Puede ser $f''(c)=0$ y no ser $(c, f(c))$ punto de inflexión como ocurre con $f(x)=x^4$ en $x=0$].

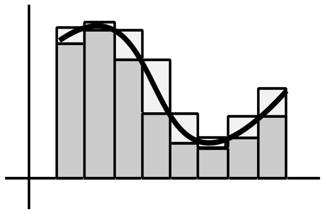
Regla de L'Hôpital:

Si $f(x), g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ (ó $\underset{x \to a}{\longrightarrow} \pm\infty$) y existe el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
La regla sigue siendo válida cambiando el a del enunciado por a^+, a^-, $+\infty$ ó $-\infty$.

Integrales

Para calcular áreas complicadas (y más cosas).





Sea f continuaa en $[a,b]$. Dividimos $[a,b]$ en n subintervalos de la misma longitud Δx por medio de los $n+1$ puntos:

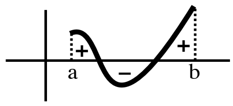
$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b \quad \text{con} \quad x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}\equiv\Delta x\,.$$

Hacemos para cada n las llamadas sumas inferior L_n y superior U_n :

$$L_n=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x\,;\; U_n=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x\,,\; \text{con} \quad \begin{array}{l} m_k=\text{mín}\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\} \\ M_k=\text{máx}\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\} \end{array}$$

Si ambas sucesiones $\{L_n\}$ y $\{U_n\}$ convergen hacia un mismo límite, decimos que f es **integrable** en $[a,b]$, representamos ese límite común por $\int_a^b f$ ó $\int_a^b f(x)dx$ y le llamamos **integral** de f en $[a,b]$.

Si $f\geq 0$, la integral (≥ 0) representa el área A de la región limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$: A es mayor que la suma L_n de las áreas de los rectángulos pequeños y menor que la suma U_n de los grandes; al crecer n , ambas sumas se aproximan hacia A . Si $f\leq 0$, L_n y U_n son negativas. La integral (≤ 0) en valor absoluto es el área de la región (situada bajo el eje x) limitada por el eje x , la gráfica de f y las rectas $x=a$ y $x=b$. Si f es positiva y negativa, la integral $\int_a^b f$ representará la **diferencia entre las áreas de las regiones que queden por encima y las áreas de las que queden por debajo del eje** x :



El **área comprendida entre las gráficas de** f **y** g **en el intervalo** $[a,b]$ viene dada por $\boxed{\int_a^b |f-g|}$.

[Es decir por $\int_a^b (f-g)$ si $f\geq g$, o por $\int_a^b (g-f)$ si $f\leq g$].

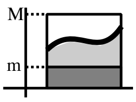
Para saber si f es integrable y para calcular la integral no se necesita la definición casi nunca.

Teorema: $\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow f \text{ integrable en } [a,b]}$

[También **hay funciones discontinuas integrables** (y otras pocas que no lo son)].

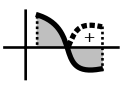
Las siguientes propiedades son intuitivamente claras a la vista del significado geométrico de la integral:

Sean f y g integrables en $[a,b]$. Entonces: $\int_a^b cf=c\int_a^b f$, $c\in\mathbf{R}$; $\int_a^b [f+g]=\int_a^b f+\int_a^b g$.

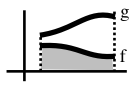


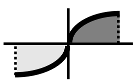
Si $m\leq f\leq M$ en $[a,b] \Rightarrow m(b-a)\leq\int_a^b f\leq M(b-a)$.

$\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b |f|$.

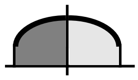


Si $f\leq g$ en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f\leq\int_a^b g$.



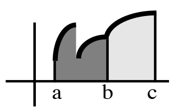


Si f es impar $\int_a^b f=0$.



Si f es par $\int_a^b f=2\int_a^b f$.

Esta también es intuitiva (y fácil de demostrar para f continuas con los teoremas fundamentales). Es cierta también para f integrable y discontinua como la de la derecha.



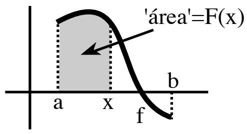
Sean $a<c<b$; f integrable en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, e $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.
Definiendo $\int_a^a f=0$ e $\int_a^b f=-\int_b^a f$, la igualdad es válida para a,b,c cualesquiera.

Teoremas fundamentales del cálculo infinitesimal

Relacionan derivadas e integrales y nos permiten hallar muchísimas integrales pasando de la definición.

Sea f acotada e integrable en $[a,b]$; para cada $x\in[a,b]$ la $\int_a^b f$ existe (y es un número).

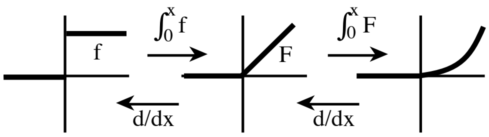
Podemos, pues, definir una nueva función: $\boxed{F(x)=\int_a^x f\ ,\ x\in[a,b]}$



Primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal:

> f integrable en $[a,b] \Rightarrow F$ continua en $[a,b]$.
> Si además f es continua en un $c\in(a,b)$ entonces F es derivable en c y $F'(c)=f(c)$.

(y por tanto, si f es continua en todo $[a,b]$ entonces $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$)



[El teorema dice que, al contrario que al derivarla, la F obtenida integrando f es 'más suave' que ella. Si f es discontinua en c, F es continua en c (aunque F tenga un 'pico' en c); y si f tiene picos, desaparecen al integrarla].

Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal:

> Si f es continua en $[a,b]$ y $f=g'$ para alguna función g entonces $\int_a^b f=g(b)-g(a)\equiv g\big]_a^b$

Dada una f, **una** g **cuya derivada sea** f **se llama primitiva de** f. El segundo teorema dice que **para calcular la integral de una** f **continua basta hallar una primitiva de** f (y no se necesitan las sumas superiores e inferiores). Si g es primitiva de f, **cualquier otra primitiva de** f **es de la forma** $g+K$.

El conjunto de todas las primitivas se designa por $\boxed{\int f(x)dx}$

En algunos casos, hallar la primitiva de una f **es inmediato** y, por tanto, lo es hallar algunas integrales:

Ej. $\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\big]_0^1=\frac{1}{3}$ pues $\frac{x^3}{3}$ es una primitiva de x^2 ya que $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{3}=x^2$;
(todas las primitivas de x^2 son $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+K$; si para el cálculo de esta integral hubiésemos tomado otro valor de la $K\neq0$, habríamos, desde luego, obtenido el mismo resultado).

Pero en muchas ocasiones calcular primitivas **es largo o muy complicado** (en Cálculo I se verán las técnicas: partes, cambios de variable, integrales de racionales,...).

Más aún, **hay funciones** de apariencia sencilla para las que se demuestra **que no tienen primitivas que puedan escribirse como suma, producto, composición,... de funciones elementales**, como:

$$\int \operatorname{sen}x^2dx\,,\ \int e^{x^2}dx\,,\ \int\frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\,,\ \int\frac{e^x}{x}dx\,,\ \int\frac{dx}{\log x}\,,\ \int\sqrt{1+x^3}\,dx\,,\ \int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx\,,\ ...$$

[**Si** f **es continua, una primitiva suya es** F, pero esto no sirve para calcular una integral concreta].
[Muchas veces se utilizarán métodos numéricos para aproximar el valor exacto que no se conocerá].

Para hallar integrales de funciones **con expresiones distintas** en $[a,b]$, se divide el intervalo y se aplican los TFCI en cada uno:

Ej. Hallemos $\int_0^\pi f$, si $f(x)=\begin{cases}\cos x\,,\ 0\leq x\leq\pi/2\\ -1\,,\ \pi/2\leq x\leq\pi\end{cases}$.

$\int_0^\pi f=\int_0^{\pi/2}\cos x dx+\int_{\pi/2}^\pi[-1]dx=[\operatorname{sen}x]_0^{\pi/2}+[-x]_{\pi/2}^\pi=1-\frac{\pi}{2}$.
[pues $\int_{\pi/2}^\pi f=\int_{\pi/2}^\pi[-1]dx$, ya que coinciden salvo en $x=\frac{\pi}{2}$ y la integral (el 'área' encerrada) no depende de lo que valga f en un punto].