HOJA 0 DE PROBLEMAS DE CÁLCULO I (curso 2002/2003)

1. Hallar todos los números reales x que satisfacen las siguientes igualdades o desigualdades:

$x^4-x^2-2=0$ $\qquad \dfrac{2}{x^2-2x}+\dfrac{3}{x^2-4x+4}=1$ $\qquad \sqrt{x+9}-2\sqrt{x+1}=0$ $\qquad |x^4-5|=4$ (valor absoluto)

$8^x-2^{-x^2}=0$ $\qquad \operatorname{sen}(2x)+\cos(x+\frac{\pi}{2})=\operatorname{sen}(5\pi)$ $\qquad 3\tan x+2\cos x=0$ $\qquad 2\ln x+\ln(x+2)=0$

$7+x+\dfrac{6}{x}<0$ $\qquad 6x^3-13x^2+4\geq 0$ $\qquad \tan^2 x<1$ $\qquad 3^{4+x^2-x^3}<1$

2. Simplificar la expresiones siguientes:

$(3+\sqrt[3]{8})^4(3-\sqrt[3]{8})^4$ $\qquad 3^{-1}\,8^{-5/3}\left[2^3+\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]\left[\left(2^7\right)^2+2^{3^2}\right]$ $\qquad \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/4)-\cos(\pi)}{\cos(\pi/4)+2\tan^2(\pi/6)}$ $\qquad \dfrac{n!}{(n-3)!(n^2-2n)}$ $\qquad \dfrac{1-\cos 2a}{1-\cos a}$

3. Demostrar: a) $\dfrac{1}{j!}+\dfrac{1}{(j-1)!}=\dfrac{j+1}{j!}$, b) $\dbinom{n}{k-1}+\dbinom{n}{k}=\dbinom{n+1}{k}$, c) $2\operatorname{sen}^2(a+\pi/4)=\operatorname{sen}(2a)+1$.

4. Calcular las ecuaciones de: a) La recta que pasa por el punto $(2,1/2)$ y cuya pendiente es $-1/4$. b) La recta paralela a la anterior que corta el eje x en $x=1$. c) La recta perpendicular a las dos anteriores que pasa por el origen.

5. Hallar la ecuación de la recta tangente en $x=2$ a la gráfica de las siguientes funciones:

$f(x)=1/x$ $\qquad f(x)=\tan(\pi x)$ $\qquad f(x)=x\ln(x^2-3x+3)$ $\qquad f(x)=\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}$

6. Hallar para qué valores de x se anulan las derivadas segundas de las siguientes funciones:

$f(x)=x^2+7x-5+\dfrac{8}{x-1}$ $\qquad f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ $\qquad f(x)=\operatorname{sen}x\cos x$ $\qquad f(x)=\ln(1+\cos x)$

7. La función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un máximo local en el punto $(0,4)$, un punto de inflexión en el punto $(1,2)$ y un mínimo local en el punto (p,q) . Determinar (p,q) .

8. Sea $f(x)=3+x^5(x-3)^4$. Probar que la función derivada $f'(x)$ posee al menos una raíz en el intervalo abierto $(0,3)$.

9. Representar la gráfica de las funciones a) $f(x)=x/(4-x^2)$, b) $g(x)=1/(1+e^{-x})$, estudiando máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento, asíntotas, puntos de inflexión, concavidad y convexidad.

10. Hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión de $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$ en $0<x<\pi$. Dibujar su gráfica en ese intervalo.

11. Determinar el punto de la gráfica $y=-x^3+6x^2-7x+5$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.

12. Sea la parábola $y=x^2-4x+4$ y un punto (p,q) sobre ella con $0\leq p\leq 2$. Formamos un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos $(0,0)$ y (p,q) . Calcular (p,q) para que el área de este rectángulo sea máxima.

13. Calcular: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos x)^2}{(x-\pi/2)^2}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2\ln(1+4t^2)\,dt}{x^5}$.

14. Sabiendo que f(x) es continua, que $f(0)=0$ y que su derivada es $f'(x)=\begin{cases}1-2x & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$, calcular f(x) y esbozar su gráfica.

15. Calcular: $\displaystyle\int\frac{x+1}{9+x^2}\,dx$, $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$, $\displaystyle\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$, $\displaystyle\int_0^\pi x\operatorname{sen}x\,dx$, $\displaystyle\int_0^1\ln(2x+1)\,dx$, $\displaystyle\int_0^{\pi/a}\operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\,dx$

16. Calcular los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x)=-x+\displaystyle\int_0^x e^{(t^2-10t+24)}\,dt$.

17. Hallar el área de la región plana acotada limitada por la curva $y=1/(x^2+1)$, el eje horizontal y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de la curva.

18. Hallar el área finita encerrada por el eje de abscisas y la gráfica de $y=(x-1)^2(x-4)$.

19. Calcular el área encerrada por la recta $y=2x-5$ y la parábola $y=x^2-4x$.

20. Considérese la región acotada que determinan las curvas $y=e^x$ e $y=e^{2x}$ y la recta $x=a$.
(i) Hallar el área de dicha región para $a=1$. (ii) Hallar un valor de $a>0$ para que el área de dicha región sea 2 .