

2017

**APUNTES
DE
MATEMÁTICAS**
(cálculo en \mathbb{R} y repaso)

Pepe Aranda

pparanda@fis.ucm.es

<https://teorica.fis.ucm.es/pparanda>

Departamento de Métodos Matemáticos

Facultad de Físicas. UCM

<https://www.ucm.es/ft2mm>

Índice

Bibliografía

Sobre las versiones de los apuntes

1. Preliminares

1.1 Conjuntos. Lenguaje matemático	1
1.2 \mathbf{N} , \mathbf{Z} y \mathbf{Q} . mcd y mcm. Progresiones. Binomio de Newton	4
1.3 El conjunto \mathbf{R} . Desigualdades. Valor absoluto	8
1.4 Repaso de las funciones elementales	13
1.5 El conjunto \mathbf{C} . Operaciones con complejos	20

2. Sucesiones, límites y continuidad en \mathbf{R}

2.1 Sucesiones de números reales	23
2.2 Límites de funciones. Funciones continuas	29
2.3 Teoremas sobre funciones continuas en intervalos	35

3. Derivadas en \mathbf{R}

3.1 Definición y cálculo	37
3.2 Teoremas sobre funciones derivables	42
3.3 Polinomios	47
3.4 Representación de funciones	50
3.5 Aplicaciones	54
3.6 Aproximación numérica de ceros	56

4. Series, Taylor y límites indeterminados

4.1 Series de números reales	59
4.2 Sucesiones y series de funciones	66
4.3 Series de potencias	69
4.4 Polinomios y series de Taylor	73
4.5 Cálculo de límites indeterminados	79
4.6 Series complejas de potencias	87

5. Integración en \mathbf{R}

5.1 Definición y propiedades	91
5.2 Teoremas fundamentales	93
5.3 Cálculo de primitivas	97
5.4 Integrales impropias	103
5.5 Integración aproximada	107
5.6 Aplicaciones	112

Problemas	I
-----------	---

Problemas adicionales	XI
-----------------------	----

Bibliografía

- [Sp] M. Spivak. Calculus. Ed. Reverté
[L] S. Lang. Cálculo. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana
[St] S. Stein. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill
[R] J. Rogawski. Cálculo una variable. Ed. Reverté
[LHE] Larson-Hostetler-Edwards. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill
[Sw] J. Stewart. Cálculo diferencial e integral. International Thomson Ed.
[A] T. Apostol. Calculus. Ed. Reverté
[CJ] Courant-John. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Ed. Limusa-Wiley
[B] J. Burgos. Cálculo infinitesimal de una variable. Ed. McGraw-Hill
[K] K. Kuratowski. Introducción al cálculo. Ed. Limusa-Wiley

Elaborar apuntes de una asignatura tiene la ventaja de precisar qué es lo que se va a explicar durante el curso. Además permite al estudiante no estar todo el rato pendiente de copiar a toda velocidad (con los errores que produce) lo que se escribe en la pizarra. Pero tiene también sus desventajas. La existencia de los apuntes incita a utilizar poco otros libros, que dan otras visiones de la asignatura y que tratan diferentes temas con más extensión, ejemplos, aplicaciones o rigor (según los casos) que en dichos apuntes.

Es importante, como se ha dicho, consultar libros. El problema básico de la bibliografía para un curso de Cálculo (o de Matemáticas) de primero es que no existe 'el libro adecuado' a todos los alumnos, pues éstos llegan a la universidad con muy diferente formación matemática. El ideal sería que toda persona de primero de Físicas pudiera seguir un libro tan bonito como el Spivak. Pero ese ideal es poco real.

En teoría, en las asignaturas de matemáticas del bachillerato se han tratado (eso dicen los programas oficiales) bastantes temas de los que se van a repasar o profundizar en la asignatura de Matemáticas. Por ejemplo: factoriales, números reales, operaciones elementales con complejos, inecuaciones, rectas, trigonometría, exponenciales y logaritmos, sucesiones, concepto intuitivo de límites, derivación, gráficas, primitivas sencillas o cálculo de áreas. Según esto, sólo parte de los temas de Matemáticas se verían por primera vez: la definición rigurosa de límites, todo lo relativo a series, las sucesiones de funciones, los desarrollos de Taylor, las primitivas complicadas, las integrales impropias y pocas cosas más (además del cambio que suele representar la insistencia de los profesores universitarios en 'las demostraciones').

La experiencia dice que, aunque hay un porcentaje digno de estudiantes que sí controlan buena parte de los citados temas del bachillerato, hay otra parte (por desgracia no muy minoritaria) con demasiados agujeros en su formación. Por eso existía en el antiguo plan un 'grupo cero' que repasaba conceptos del bachillerato y por eso en el plan del nuevo grado en Física los contenidos de ese grupo cero se han incluido en la nueva asignatura de Matemáticas.

Para estudiantes con buena base, los libros clásicos de Cálculo ([Sp], [A] o [CJ]) son el complemento natural de estos apuntes ([A] trata temas además de otras asignaturas: álgebra, cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales,...). Pero para estudiantes de menor nivel matemático es mejor manejar libros más elementales, como el [L], [St], [R], [LHE] o [Sw] (con bastantes ejemplares en la biblioteca de Físicas), que contienen muchos más ejemplos sencillos, aunque no incluyen los temas más complicados del curso (que en Matemáticas se cuentan a título informativo). Los ocho primeros libros estudian (al contrario que en estos apuntes) primero las funciones (integrales incluidas) y luego las sucesiones y series. Los dos siguientes ([B] y [K]) tratan las sucesiones y series al principio. El [K] es difícil de leer (y de encontrar), pero es citado porque de él se han extraído algunas demostraciones.

Los problemas básicos de estos apuntes son más que suficientes para el curso (los adicionales o son parecidos o más complicados o tratan temas que no están en el programa aunque siguen en los apuntes, como las ideas sobre métodos numéricos). Pero en todos los libros de la bibliografía hay más problemas propuestos y resueltos. Si algún amante de las matemáticas quiere problemas más teóricos y complicados, que se enfrente a los del [Sp]. Pero probablemente sea mayor el número de quienes echan en falta en los problemas más ejercicios sencillos. En [L], [St], [R], [LHE] o [Sw] se pueden encontrar cientos de ellos.

Sobre las versiones de los apuntes

versión 2017: Una vez más cambian los problemas, incluyendo exámenes del 16-17. Las páginas básicas de problemas siguen siendo 10 (2, 1, 2, 2 y 3 de temas 1, 2, 3, 4 y 5) y el número de esos problemas es 150 (30, 10, 35, 30 y 45). Y las páginas de los problemas adicionales son 18 (9 de cada parte del curso). Se ha cambiado el subtítulo ‘Cálculo y repaso’ por ‘cálculo en \mathbf{R} y repaso’.

versión 2016: De nuevo sólo cambian los problemas, con exámenes del 15-16.

versión 2015: Sólo cambian los problemas, por la inclusión de exámenes del 14-15.

versión 2014: Abundantes pequeños cambios sin cambiar el contenido. La sección de aproximación de ceros se va al final de capítulo 3 y es marcada, como el resto de contenido que aparecen sólo a título informativo, con recuadros de color diferente al de los ejemplos y comentarios. En muchas secciones aparecen ejemplos nuevos y algunos cambios de orden, que detallo a continuación.

En 1.3 las raíces de polinomios sencillos se retrasan y hay un par de ejemplo nuevos. En 1.4 hay otros nuevos (rectas, logaritmos y trigonométricos) y también en 1.5. El capítulo tiene dos páginas más.

Se adelantan a 2.1 la admisión del límite de sucesiones que exigen L'Hôpital (y los ejemplos que antes estaban al final de 2.2, sección que se retoca). En 2.3 abundan los recuadros morados.

Se traen al final de 3.2 los límites importantes de funciones que antes estaban en 4.5 (pueden ser utilizados ya en el primer parcial). Se amplian los ejemplos polinomios (algunos en morado). Hay un nuevo dibujo de gráfica (ahora en 3.3) que sustituye a otra que se va al método de Newton (3.5, con otro ejemplo más). Este capítulo también crece en dos páginas (en parte para escribir cosas que no se dirán en clase).

Alguna serie nueva en 4.1, aunque la de potencias y otras que estaban en problemas se van a 4.3 (aumenta en una página). Ejemplo nuevo en 4.4 e insistencia en las funciones analíticas. Reordenada 4.5 y más ejemplos de límites, gráficas y sucesiones (otra página más). 4.6, todo en morado.

Retoques en 5.2. Nueva página con ejemplos variados de primitivas en 5.3. Pocos cambios en el resto.

Sustituyen a algunos de los 140 problemas los de exámenes del 11-12. Los adicionales incluyen además los de controles de ese curso (ahora son 215 y sus soluciones se han escrito en \LaTeX).

versión 2011: Misma teoría. Pocos ejemplos nuevos (en gráficas e integrales). Lo habitual en problemas.

versión 2010: Pocos cambios en teoría (ejemplos nuevos y reordenaciones de secciones) y alguno más en problemas, por la inclusión de los de exámenes del curso anterior y el traslado de otros a ‘adicionales’.

versión 2009: Primera versión de los ‘APUNTES DE MATEMÁTICAS’, incluyendo algunos nuevos temas de repaso (en el capítulo 1) y, sobre todo, bastantes problemas elementales nuevos.

La sección 1.1 sobre conjuntos y lenguaje matemático no existía. En 1.2 se incluyen las progresiones y se extiende el binomio de Newton. Se tratan ahora algo las raíces de polinomios en 1.3. El repaso de funciones elementales pasa de ser 2.1 a ser 1.4 y la aritmética compleja viaja desde 6.1 a 1.5.

El capítulo 2 (sin 2.1) sigue igual. El 3 presenta bastantes ejemplos nuevos, se reordena 3.2 y queda más reducida 3.3. Al 4 sólo se le añade la información sobre series complejas de 4.6 (que viene de 6.2; ya no hay capítulo 6). 5 cambia poco: las primitivas elementales viajan de 5.3 a 5.2 y se reordena 5.5.

De 100 problemas básicos se pasa a 140, recogiendo muchos problemas del grupo cero y los adicionales más elementales, para empezar la asignatura con repastos de bachillerato y a un ritmo más lento.

Se incluyen recuadros de color para separar los ejemplos o los comentarios del resto del texto. También marcan las cabeceras de secciones o subsecciones que aparecen sólo a título informativo.

versión 2006 → 2009: Muy parecida a la 2006, con correcciones de estilo para ajustarse a nuevos márgenes y tamaños. En esencia es la elaborada para <http://alqua.org/> en 2008 con el fin de servir de base a un ‘libro libre’. En esa página se pueden conseguir los ficheros \LaTeX y los dibujos de esa versión.

versión 2006: La letra pasa a ser Times (comando `\usepackage{mathptmx}` en \LaTeX), lo que lleva a unos cuantos ajustes estéticos, de orden o de lenguaje para ajustar espacios.

Las sucesiones de Cauchy se van al final de 2.2 (para aclarar que son secundarias en el temario del curso). Por la misma razón, Trapecios y Simpson son adelantadas por la integración de series en 5.5.

Las sucesiones de límite no justificado (como $\sqrt[n]{n}$) se retrasan a 2.3 (más cerca del L'Hôpital, que pasa a ser demostrado (sin ser utilizado) en 3.2). Se reordena la sección 4.5 de los límites indeterminados.

Se retoca un poco la sección 3.3 (la parte de los polinomios de tercer y cuarto orden).

Lo de siempre en problemas: se incluyen de los exámenes del 2005-06 en los 100 comunes, se cambia de sitio alguno y otros pasan a ser problemas adicionales (que de año en año van creciendo).

versión 2005: Sólo se hace alguna corrección estética y de erratas a la teoría y, como todos los años, se cambian algo los problemas, tanto los comunes como los adicionales.

versión 2004: Con los mismos temas que las anteriores, pero algunos organizados de forma diferente.

Si en la 2003 y anteriores el capítulo 1 (además de repasar los números y sus propiedades) contenía las sucesiones y las series numéricas, en ésta se acercan estas series a las de funciones, potencias y Taylor.

Las sucesiones se trasladan a la sección 2.2, con el fin de repasar antes el concepto de función y las propiedades de senos, cosenos, exponenciales, ... [Creo que el límite de sucesiones (definición rigurosa de las difíciles de entender) se debe dar antes que el ligeramente más complicado límite de funciones].

El 4 pasa a comenzar con las series numéricas, luego trata las sucesiones y series de funciones en general, y a continuación las de potencias. Los polinomios de Taylor se juntan en 4.4 a las series de Taylor.

El capítulo 3 permanece tal como estaba. El 5 sigue casi, casi igual (simplemente las longitudes adelantan a los volúmenes en 5.6) y el 6 tampoco varía (salvo que la i pasa a ser \hat{i}).

Como cada año, se corrigen erratas (y probablemente se crean otras), se añaden explicaciones a la teoría (en parte necesarias por el nuevo orden de temas) y se elaboran nuevos ejemplos (o se cambian de sitio).

Los problemas se organizan según el nuevo orden de la teoría. Los comunes pasan de 117 a 100, a pesar de incluir alguno de examen. Los adicionales recogen, como siempre, los retirados de los de comunes.

versión 2003: Primera versión escrita a \LaTeX de los ‘apuntes de Cálculo I’, con el mismo orden en los temas que las anteriores a ordenador (y los viejos apuntes a mano de los años 80), aunque añadiendo diversas explicaciones a la teoría y nuevos ejemplos y problemas.