1. Preliminares

1.1. Conjuntos. Lenguaje matemático

El significado de **conjunto** es intuitivo: una clase o colección de objetos (**elementos**) tal que se pueda distinguir perfectamente si un elemento pertenece o no al conjunto. Los conjuntos se precisan a veces enunciando una propiedad común a sus elementos y sólo a ellos y otras enumerando esos elementos (entre llaves). Por ejemplo, podemos describir de estas tres formas:

$$V \equiv \{x : x \text{ es una vocal del alfabeto latino}\} = \{\,\mathrm{a}\,,\mathrm{e}\,,\mathrm{i}\,,\mathrm{o}\,,\mathrm{u}\,\} = \{\,\mathrm{i}\,,\mathrm{a}\,,\mathrm{o}\,,\mathrm{e}\,,\mathrm{e}\,,\mathrm{u}\,,\mathrm{o}\,,\mathrm{e}\,\}$$

[‘ ≡’ se usa a menudo en matemáticas para definir; ‘ : ’ (y también ‘ / ’) se lee ‘tal que’ o ‘tales que’; otro par de símbolos matemáticos que aparecerán constantemente son $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe)].

Que un elemento **pertenece** a un conjunto se representa con el símbolo $\in$ y que no pertenece con el $\notin$. Así, por ejemplo, $\mathrm{u}\in V$ y $\tilde{\mathrm{n}}\notin V$.

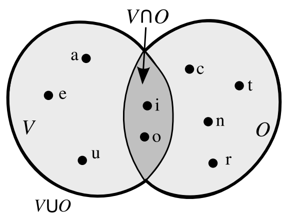
Dados dos conjuntos A y B se dice que A **está contenido** en B o que A es **subconjunto** de B (y se representa por $A\subset B$ ó $B\supset A$), si todo elemento de A está también en B. Según esto,

$$V \subset E \equiv \{\text{letras de la palabra ‘enunciado’}\} = \{\,\mathrm{a}\,,\mathrm{e}\,,\mathrm{i}\,,\mathrm{o}\,,\mathrm{u}\,,\mathrm{c}\,,\mathrm{d}\,,\mathrm{n}\,\}\,,$$
$$\text{pero no está contenido } (\,V \not\subset O\,) \text{ en } O \equiv \{\text{letras de ‘ornitorrinco’}\}\,.$$

[Que conste que todo conjunto está contenido en sí mismo: $A\subset A$].

Unión de A y B es el conjunto $A\cup B = \{x : x\in A \text{ ó } x\in B\}$ (formado por todos los elementos de A y B, comunes o no) y su **intersección** $A\cap B = \{x : x\in A \text{ y } x\in B\}$ (elementos comunes a ambos). Análogamente se definen unión e intersección de más de dos conjuntos. La **diferencia** de conjuntos $B-A$ (o bien $B\backslash A$) la forman los elementos de B que no están en A. Por ejemplo:

$$V\cup E = E\,,\ V\cap E = V,\ V\cup O = \{\,\mathrm{n}\,,\mathrm{e}\,,\mathrm{u}\,,\mathrm{r}\,,\mathrm{o}\,,\mathrm{t}\,,\mathrm{i}\,,\mathrm{c}\,,\mathrm{a}\,\}\,,$$
$$V\cap O = \{\,\mathrm{i}\,,\mathrm{o}\,\}\,,\ E-V = \{\mathrm{c}\,,\mathrm{d}\,,\mathrm{n}\}\,.$$



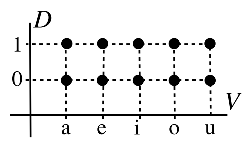
Muchas veces se representan los conjuntos utilizando ‘diagramas de Venn’, recintos cerrados cuyos elementos son indicados por puntos. A la derecha están esquematizados V, O, $V\cup O$ y $V\cap O$.

Observemos que el significado de ‘o’ en matemáticas (que a veces se representa por ‘$\vee$’; en vez de ‘y’ se puede poner ‘$\wedge$’) siempre tiene un significado no excluyente como en la definición de $\cup$. Si se quiere utilizar un ‘o’ excluyente se debe escribir ‘o bien ... o bien ...’.

Se llama **conjunto vacío** $\varnothing$ al que no tiene nigún elemento. Si $A\cap B = \varnothing$, es decir, si no hay elementos comunes a A y B se dice que A y B son **disjuntos**, como lo son V y $D\equiv\{0,1\}$.

El **producto** $A\times B$ de dos conjuntos A y B está constituído por todos los posibles **pares ordenados** (a,b) que se pueden formar con un primer elemento de A y otro segundo de B:

$$A\times B = \big\{(a,b) : a\in A, b\in B\big\}$$



[No es lo mismo el par ordenado (a,b), en general distinto de (b,a), que el conjunto $\{a,b\} = \{b,a\}$].

$$V\times D = \big\{(\mathrm{a},0),(\mathrm{e},0),(\mathrm{i},0),(\mathrm{o},0),(\mathrm{u},0),(\mathrm{a},1),(\mathrm{e},1),(\mathrm{i},1),(\mathrm{o},1),(\mathrm{u},1)\big\}\,.$$

$$f : A \to B \qquad a \to b = f(a)$$

Una **función** f entre A y B es una regla que asigna a cada elemento $a \in A$ un **único** elemento $b = f(a) \in B$ (**imagen** de a por f). Algunas veces (otras no) las funciones se pueden describir con palabras o fórmulas, pero es claro que f queda fijada si listamos todos los posibles (a,b), con lo que una definición más teórica (y más precisa) es:

Una **función** f es un conjunto de pares ordenados $\subset A \times B$ que no contiene dos distintos con el mismo primer elemento.

Por ejemplo, $g \equiv \{(\mathrm{a},0),(\mathrm{a},1),(\mathrm{e},1),(\mathrm{i},1),(\mathrm{o},1),(\mathrm{u},1)\}$ no es función de V en D, pero sí lo es $h \equiv \{(\mathrm{a},1),(\mathrm{e},1),(\mathrm{i},0),(\mathrm{o},1),(\mathrm{u},0)\}$ $\left[g(v) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{si la vocal } v \text{ es } \begin{matrix}\text{fuerte} \\ \text{débil}\end{matrix} \right]$. Sí es función de D en V: $k \equiv \{(0,\mathrm{o}),(1,\mathrm{i})\}$.

f se dice **inyectiva** si no hay elementos distintos de A que tengan la misma imagen.

f es **sobreyectiva** (o suprayectiva) si cada elemento de B es imagen de algún elemento de A.

f es **biyectiva** (o es una biyección) si es a la vez inyectiva y sobreyectiva, o lo que es lo mismo, si a cada elemento $a \in A$ le corresponde un único elemento $b \in B$ y viceversa.

$$f^{-1} : B \to A \qquad b \to a$$

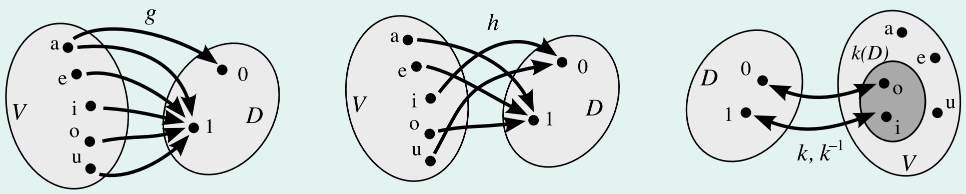
Si f es biyectiva, existe su **función inversa** f^{-1} que hace corresponder a cada $b \in B$ el único a del que proviene. [Si no es inyectiva, o sea, si hay $a \neq a^*$ con $f(a) = f(a^*) = b$, no podemos asignar un único a al b].

Cuando f es simplemente inyectiva, también podemos definir su inversa f^{-1}, pero en este caso la biyección se da entre A y $f(A) \equiv \{f(a) : a \in A\} \subset B$.

h no es inyectiva: por ejemplo, a, e, o tienen los tres la misma imagen 1. Sí es sobreyectiva.

k es inyectiva y no sobreyectiva. No es biyección entre D y V, pero sí lo es entre D y $k(D)$, con lo que podemos hablar de su inversa $k^{-1} = \{(\mathrm{o},0),(\mathrm{i},1)\}$.

Representado mediante diagramas de Venn, f es función si no sale más de una flecha de cada punto de A, es inyectiva si a cada punto de B llega a lo más una flecha y es sobreyectiva si a cada punto de B llega alguna flecha.



Para dos conjuntos finitos está claro que si hay una biyección entre ellos tienen el mismo número de elementos. Esta es la idea para hablar en general del 'número de elementos' (aunque sean infinitos) de un conjunto. Dos conjuntos tienen el mismo 'cardinal' si se puede dar una biyección entre ellos. Según esto (aunque parezca sorprendente), los números naturales $\{1,2,3,\dots\}$ y los enteros $\{\dots,-1,0,1,2,\dots\}$ tienen el mismo cardinal, pues:

$$f = \{(1,0),(2,1),(3,-1),(4,2),(5,-2),\dots\} \text{ es una biyección.}$$

Una **operación** (o 'ley de composición interna') en un conjunto A es una regla que asigna a cada par de elementos de A otro elemento del propio A (es, pues, una función de $A \times A$ en A). Son operaciones, por ejemplo, la suma y producto de números naturales. O la unión, intersección y diferencia de conjuntos en el conjunto de los conjuntos.

[Tras definir una operación en un conjunto suele interesar conocer sus propiedades. Por ejemplo, $\cup$ y $\cap$ cumplen la conmutativa $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$, la asociativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, se da la distributiva de la unión respecto de la intersección y viceversa $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, el vacío viene a cumplir el papel del 0 en los números: $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, ...].

Demos ahora unas mínimas ideas sobre lógica y proposiciones (tal vez innecesarias, porque las matemáticas no hacen otra cosa que formalizar el sentido común).

Una **proposición** p (o enunciado, o afirmación,...) es una frase (gramatical o matemática) cuya verdad o falsedad puede ser comprobada: 'Hypatia nació en Logroño', '5 es menor que 7', ...

La **implicación** '$p \Rightarrow q$' ('p implica q', 'si p entonces q', 'p es condición suficiente para q'), significa que si p es verdadera podemos estar seguros que q también es verdad.

Por ejemplo, es correcta la siguiente implicación para números naturales:

n termina en $5 \Rightarrow n$ múltiplo de 5 ('si n termina en 5 entonces n es múltiplo de 5').

Es evidente que **una afirmación equivalente a** '$p \Rightarrow q$' **es** '(no q) $\Rightarrow$ (no p)' .

(una es cierta si y sólo si lo es la otra; demostrada una de ellas, la otra queda demostrada).

Así es equivalente a la implicación de arriba (tan cierta como ella):

n no múltiplo de $5 \Rightarrow n$ no termina en 5.

Pero es otra afirmación totalmente distinta la '$q \Rightarrow p$' , o su equivalente '(no p) $\Rightarrow$ (no q)' :

n múltiplo de $5 \Rightarrow n$ termina en 5,

que es falsa (n podría acabar en 0), como lo es 'n no termina en $5 \Rightarrow n$ no múltiplo de 5'.

Que p y q son siempre ciertas a la vez o falsas a la vez se representa con la **doble implicación** '$p \Leftrightarrow q$' ('p si y sólo si q' , 'p es condición necesaria y suficente para q').

Para probar una doble implicación debemos comprobar dos implicaciones: '$p \Rightarrow q$' y '$q \Rightarrow p$'

(o también podríamos, si es más fácil, comprobar '$p \Rightarrow q$' y '(no p) $\Rightarrow$ (no q)').

Una doble implicación verdadera, por ejemplo, es:

n impar $\Leftrightarrow n^2$ impar (equivalente a 'n par $\Leftrightarrow n^2$ par').

[Parece clara, pero la demostramos. Para ello, probamos 'n impar $\Rightarrow n^2$ impar' y 'n par $\Rightarrow n^2$ par' :

n impar $\Leftrightarrow n=2k+1$ con k natural $\Rightarrow n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2$ impar.

n par $\Leftrightarrow n=2k$ con k natural $\Rightarrow n^2=4k^2=2(2k^2) \Rightarrow n^2$ par].

Demostrar una implicación puede exigir bastante trabajo: basarse en definiciones y resultados ya probados, utilizar argumentos lógicos, efectuar diferentes operaciones matemáticas... pero **para demostrar la falsedad de una implicación '$p \Rightarrow q$' basta encontrar un contraejemplo** (algo que cumpla p pero que no cumpla q). Por ejemplo, basta observar que 10 es múltiplo de 5 para probar la falsedad de 'n múltiplo de $5 \Rightarrow n$ termina en 5'.

Acabamos la sección con una breve descripción de cómo se construyen las teorías matemáticas.

Se parte de unos **axiomas** (o postulados) que se consideran evidentes y no se demuestran. Han de ser completos (el resto de la teoría se debe poder deducir de ellos), no ser contradictorios entre sí y deben ser independientes (ninguno de ellos se debe poder deducir de los demás).

De esos axiomas, utilizando razonamientos lógicos y matemáticos se van deduciendo progresivamente el resto de resultados: los **teoremas** (en libros de matemáticas se encuentran otras palabras, no usadas en estos apuntes, como 'proposición' o 'lema', teoremas de distinta complejidad).

La historia de la geometría ilustra muy bien la dificultad de elegir los axiomas. El postulado 5 de Euclides 'por todo punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a una recta dada' (que muchas veces se intentó deducir de sus otros 4 postulados) lleva a una geometría diferente de las 'no euclídeas' que sustituyen ese postulado (y que acabaron siendo tan útiles en física).

1.2. N, Z y Q. mcd y mcm. Progresiones. Binomio de Newton

Los números que básicamente vamos a tratar en estos apuntes son los reales $\mathbf{R}$. Pero antes de precisar qué son los reales vamos a hacer un breve repaso de los números más sencillos.

Llamaremos: $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,5,\dots\}$ al conjunto de los números **naturales** (sin incluir el 0),
$\mathbf{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ al de los **enteros**, y
$\mathbf{Q}=\{p/q,\ p,q \text{ enteros}, q\neq 0\}$ al conjunto de los **racionales**.

La suma y el producto de dos números naturales cualesquiera son también naturales, pero su diferencia puede no serlo. Sí es un entero la diferencia de dos enteros. El cociente de racionales es racional, pero no es entero, en general, el de dos enteros. Los tres conjuntos son conjuntos ordenados por la relación " $>$" (ser mayor que). Con palabras más matemáticas, y refiriéndonos al mayor de los tres conjuntos, se dice que $\mathbf{Q}$ es un **cuerpo ordenado**, es decir, que satisface las siguientes propiedades $(a,b,c\in\mathbf{Q})$:

Propiedades de cuerpo: Existen dos operaciones "$+$" y "$\cdot$" que cumplen:

1) $+$ y $\cdot$ son asociativas y conmutativas:

$$a+(b+c)=(a+b)+c\,,\quad a+b=b+a\,,$$
$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\,,\quad a\cdot b=b\cdot a\,.$$

2) Se cumple la propiedad distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

3) Hay elementos neutros 0 respecto a $+$ y 1 respecto a $\cdot$:

$$a+0=a\,,\quad a\cdot 1=a\ \ \forall a\,.$$

4) Existen elementos inversos respecto a $+$ y $\cdot$:

$$\forall a\ \exists -a \text{ tal que } a+(-a)=0\,,\quad \forall a\neq 0\ \exists\, a^{-1} \text{ tal que } a\cdot a^{-1}=1\,.$$

Propiedades de orden: Existe una relación " $>$" que satisface:

5) Dado cualquier a, o bien $a>0$, o bien $-a>0$, o bien $a=0$.

6) Si $a,b>0$ también $a+b>0$, $a\cdot b>0$.

$\mathbf{N}$ y $\mathbf{Z}$ no son un cuerpo: $\mathbf{N}$ no posee inverso siquiera respecto de la suma y $\mathbf{Z}$ no lo tiene respecto del producto. El conjunto $\mathbf{R}$ de los reales que trataremos en la próxima sección poseerá todas estas propiedades de cuerpo ordenado y además otra (el llamado 'axioma del extremo superior'). El conjunto de los complejos $\mathbf{C}$ que aparecerá en 1.5 será cuerpo, pero no estará ordenado.

A partir de las propiedades anteriores se pueden definir las otras conocidas operaciones básicas (diferencia, cociente y potencias) y desigualdades:

$$a-b=a+(-b)\,;\ \text{ si } b\neq 0,\ a/b=ab^{-1} \ \ \text{(el } \cdot \text{ no suele escribirse).}$$
$$\text{Si } n\in\mathbf{N},\ a^n=a\cdot\cdots\cdot a\,,\ n \text{ veces.}$$
$$b>a \text{ si } b-a>0\,;\ \ b<a \text{ si } a>b\,;\ \ b\geq a \text{ si } b>a \text{ ó si } b=a\,;\ \ b\leq a \text{ si } a\geq b\,.$$

Y utilizando exclusivamente las propiedades recuadradas se podrían probar las otras muchas que se utilizan resolviendo ecuaciones, trabajando con desigualdades,... (son entonces 'teoremas' que se deducen de esas propiedades básicas). Probemos, por ejemplo, que $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c\ \ \forall c$:

$$a<b \Leftrightarrow b-a=b-a+0=b-a+c+(-c)=(b+c)-(a+c)>0 \Leftrightarrow a+c<b+c\,.$$

'Demostremos' otro resultado de desigualdades $a<b,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$, que a veces se olvida:

$$(b-a)>0,\ (-c)>0 \ \Rightarrow\ \big(b+(-a)\big)(-c)=b(-c)+(-a)(-c)\underset{\uparrow}{=}-bc+ac>0 \Leftrightarrow ac>bc\,.$$
$$\big[\,b(-c)=-bc \ \text{ pues } \ 0=b\big(c+(-c)\big)=bc+b(-c)\,\big]$$

[No volveremos a operar tan despacio, se trataba sólo de mostrar que bastaba partir de 1), ..., 6)].

Repasemos otras definiciones y propiedades relacionadas con naturales, enteros y racionales:

Demostraciones por inducción

Supongamos que queremos demostrar una afirmación, que llamaremos $P(n)$, que depende de un número natural n. Demostrar $P(n)$ por inducción consiste en:

i) comprobar $P(1)$ (es decir, que la afirmación es cierta si $n=1$)
ii) probar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n$ (supuesta cierta para n se demuestra para $n+1$)

Hecho esto, como $P(1)$ es cierta, por ii) también lo es $P(2)$. Y por tanto $P(3)$. Y $P(4)$ ...

Ej. Probemos por inducción que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ [recordemos que el primer símbolo se lee 'sumatorio de k desde 1 hasta n']

$P(1)$ es cierta: $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Probemos ahora $P(n+1)$ suponiendo cierta $P(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \big[\text{estamos suponiendo cierta } P(n)\big] = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Dados dos naturales n y d se dice que n es **múltiplo** de d (o que d es **divisor** de n) si n/d es también un número natural. Desde luego, todo n tiene al menos dos divisores: el 1 y el propio n. Si estos son sus únicos divisores dice que n es **primo**. Un conjunto de enteros $n_1,\dots,n_k$ admite siempre un divisor común a todos: el 1. Se llama **máximo común divisor** al mayor natural que divide a todos ellos (y lo denotaremos por $\mathrm{mcd}[n_1,\dots,n_k]$). Por otra parte, dados los $n_1,\dots,n_k$ existen naturales que son múltiplos de todos ellos (por ejemplo el producto de todos). Se llama **mínimo común múltiplo** ($\mathrm{mcm}[n_1,\dots,n_k]$) al menor número con esta propiedad.

Hallar el mcd y el mcm de unos naturales es fácil una vez calculados todos los divisores primos de cada uno, lo que puede ser muy largo si los números son muy gordos.

[Para hallar estos divisores conviene conocer las reglas de divisibilidad por números sencillos: recordamos que un entero es divisible por 3 (y por 9) si y sólo si lo es la suma de sus cifras; divisible por 4 (por 8) si lo son sus dos (tres) últimas cifras; por 5 si acaba en 0 o en 5; por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan un lugar par y la suma de las que ocupan lugar impar es un múltiplo de 11 (incluido el 0)].

Otra forma de hallar el $\mathrm{mcd}[m,n]$ es utilizar el **algoritmo de Euclides**:

Sea $m>n$. Dividamos m entre n y llamemos q_1 al cociente y r_1 al resto: $m=q_1n+r_1$. Dividamos ahora n entre r_1: $n=q_2r_1+r_2$. A continuación r_1 entre r_2: $r_1=q_3r_2+r_3$. Luego r_2 entre r_3 ..., y proseguimos dividiendo de esta forma hasta que el resto sea 0. El $\mathrm{mcd}[m,n]$ es entonces **el último resto no nulo**.

Calculado el mcd, se puede hallar el mcm utilizando que: $\mathrm{mcm}[m,n] = \frac{m\cdot n}{\mathrm{mcd}[m,n]}$.

Ej. Sean 2340 y 6798.

Como $2340=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot13$ y $6798=2\cdot3\cdot11\cdot103$, $\mathrm{mcd}=6$ y $\mathrm{mcm}=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11\cdot13\cdot103=2651220$.

Euclides: $6798=2\cdot2340+2118$, $2340=1\cdot2118+222$, $2118=9\cdot222+120$, $222=1\cdot120+102$, $120=1\cdot102+18$, $102=5\cdot18+12$, $18=1\cdot12+6$, $12=2\cdot6$.

$$\Rightarrow\ \mathrm{mcd}=6,\quad \mathrm{mcm}=\frac{2340\cdot6798}{6}=2651220.$$

[Para hallar el $\mathrm{mcd}[n_1,\dots,n_k]$ se puede calcular m_1=$\mathrm{mcd}[n_1,n_2]$, luego m_2=$\mathrm{mcd}[m_1,n_3]$, ...].

Progresiones aritméticas

Son un conjunto de números tales que cada uno se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija d ('razón' de la progresión). Es decir, si llamamos a_k al término que ocupa el lugar k y son n términos, la progresión es:

$$a_1\ ,\ a_2=a_1+d\ ,\ a_3=a_1+2d\ ,\ \ldots,\ a_n=a_1+(n-1)d\ .$$

Es fácil ver (ej. de inducción) que la suma de estos n términos es: $S=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{a_1+a_n}{2}n$.

Progresiones geométricas

Cada número se obtiene aquí del anterior multiplicando por la razón fija r :

$$a_1\ ,\ a_2=a_1r\ ,\ a_3=a_1r^2\ ,\ \ldots,\ a_n=a_1r^{n-1}\ .$$

Su suma es $S=a_1\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a_1-a_nr}{1-r}$, pues es $1+r+\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$, como se ve por inducción:

cierto para 1 : $1=\frac{1-r}{1-r}$; cierto si $n\Rightarrow 1+\cdots+r^{n-1}+r^n=\frac{1-r^n}{1-r}+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, cierto si $n+1$.

Ej. $1+4+7+\cdots+301=\frac{1+301}{2}101=15251$. $1+3+9+\cdots+6561=1\frac{1-3^9}{1-3}=\frac{1-6561\cdot 3}{1-3}=9841$.

Factoriales, números combinatorios y binomio de Newton

Para $n\in\mathbf{N}$ se define **factorial de** n como: $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$, y además $0!=1$.
Si k es otro natural con $0\le k\le n$, el **coeficiente binomial** o **número combinatorio** es

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$\Big[\binom{n}{k}$ se lee 'n sobre k'; obsérvese que $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, que $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$, y que $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n\Big]$.

[n! representa el número de formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de n elementos y el número combinatorio (que siempre es un número natural) es el número de formas distintas en que se pueden escoger grupos distintos de k elementos (sin importar su orden) entre los n de un conjunto].

La fórmula más famosa en que aparecen estos números es la de **binomio de Newton**:

$$\boxed{(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Demostrémosla por inducción. Es claramente cierta si $n=1$: $(a+b)^1=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^0b^1$.

Suponiendo que es cierta para n , probémosla ahora para $n+1$:

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\big[a^n+\cdots+\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n\big]$$
$$=a^{n+1}+\big[\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\big]a^nb+\cdots+\big[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\big]a^{n+1-k}b^k+\cdots+b^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k,$$

pues se cumple: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=n!\frac{(n-k+1)+k}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}$.

Los coeficientes binomiales forman las filas del 'triángulo de Tartaglia' (o de Pascal) de la derecha, en el que cada número se obtiene sumando los dos superiores (eso asegura la propiedad recién probada). Para n pequeño mejor acudimos al triángulo, pero para n grande serán preferibles las fórmulas de arriba (sobre todo, la segunda).

$$\begin{array}{c} 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Ej. $(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$, pues $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=3\cdot 5=\binom{6}{4}$, $\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=5\cdot 4$.
[Estábamos a sólo una fila de escribirlo con el triángulo de Tartaglia].

Existen infinitos números racionales e irracionales

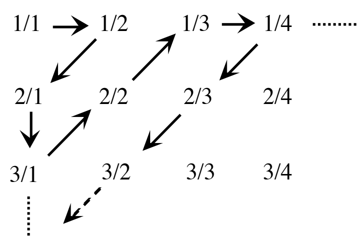
Entre dos racionales $p>q$, por cercanos que estén entre sí, existen infinitos racionales. En efecto, $r_1=(q+p)/2$ es otro racional que se halla entre los dos. Otros infinitos, por ejemplo, son $r_2=(q+r_1)/2$, $r_3=(q+r_2)/2$, ... Recordamos que una forma de precisar de forma única un racional es dar su expresión decimal, que o bien tiene sólo un número finito de decimales o bien tiene además un número finito de decimales que se repiten periódicamente ($7/8=0.875$ es un ejemplo de la primera situación y $8/7=1.142857142857...$ lo es de la segunda). Pensando en la expresión decimal vuelve a estar muy claro que entre dos racionales existen otros infinitos y que podemos encontrar racionales tan próximos como queramos a uno dado.

Sin embargo, a pesar de estar tan juntos los racionales, aparecen de forma natural (ya desde los griegos) otros números que no son racionales (es decir, **irracionales**; su expresión decimal tendrá infinitos decimales no repetidos periódicamente). Por ejemplo, el teorema de Pitágoras asegura que la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ unidades de longitud. Es fácil probar que $\sqrt{2}$ no es racional (demostrar que otros números famosos como π ó e son irracionales es bastante más complicado). Para hacerlo, vamos a suponer que lo es y llegaremos a una contradicción (es lo que se llama demostración por reducción al absurdo).

Como se sabe, un racional puede ser expresado de infinitas maneras diferentes como fracción p/q. De ellas, se llama irreducible a la que tiene el denominador más pequeño posible, o sea, aquella con p y q sin divisores comunes. Supongamos que $\sqrt{2}=p/q$ fracción irreducible. Entonces $p^2=2q^2$. Así p^2 es par, con lo que también debe serlo p (los cuadrados de pares son pares e impares los de los impares) y por tanto es de la forma $p=2m$. Así pues, $2m^2=q^2$ y q también es par, en contradicción con la suposición de que p/q fuese irreducible.

Observemos que la suma $z=p+x$ con p racional y x irracional es necesariamente otro número irracional (si fuese z racional, sería $x=z-p$ también racional). Y lo mismo sucede, si el racional $p\neq 0$, con su producto (se prueba casi igual; que conste que suma y producto de irracionales puede ser racional, por ejemplo, $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ y $\sqrt{2}\sqrt{2}=2$). Conocemos ya, pues, infinitos irracionales: todos los de la forma $p+q\sqrt{2}$, con $p,q\in\mathbf{Z}$. Con esto podemos ya ver que también entre dos racionales cualesquiera, por muy próximos que estén entre sí, existen infinitos irracionales (por ejemplo, si $p>q$ son racionales, $q+(p-q)\sqrt{2}/n$, con $n=2,3,\ldots$, son infinitos irracionales y es fácil ver que están entre uno y otro). También entre dos irracionales hay infinitos racionales e irracionales (parece bastante claro con la expresión decimal). O entre un racional y un irracional.

Aunque existan infinitos racionales e infinitos irracionales, el número de irracionales es un infinito 'más gordo' que el de los racionales. El número de racionales es el mismo que el de enteros (o el de naturales, que también es el mismo), ya que se puede hacer corresponder a cada entero un racional y viceversa (matemáticamente se dice que $\mathbf{Q}$ es numerable) como sugiere el esquema de la derecha. Los irracionales (y por tanto los reales), sin embargo, no se pueden poner en biyección con $\mathbf{N}$ (pero esto es algo más difícil probarlo).



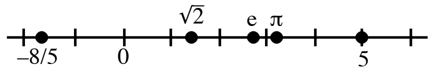
1.3. El conjunto R . Desigualdades. Valor absoluto

¿Qué son exactamente los números reales? Sabemos que $5, -\frac{8}{5}, \sqrt{2}, \pi$, e, ... lo son, que los tres últimos no se pueden poner como una fracción, que tienen infinitos decimales no repetidos... Podríamos usar una idea intuitiva, pero en matemáticas a veces la intuición engaña. Conviene dar una definición rigurosa del **conjunto R de los números reales**. Lo mas serio (pero muy largo) sería construir **R** a partir de **Q**. Para ahorrar tiempo, definiremos **R** como un conjunto de objetos básicos que cumplen unas propiedades que tomaremos como axiomas (si se construyese **R** las propiedades serían teoremas que habría que demostrar). Así pues, definimos a partir de las propiedades vistas para **Q**:

Axiomas del conjunto R — **R** es un conjunto que posee las propiedades 1), ... , 6) de **cuerpo ordenado** y además satisface el **axioma del extremo superior.**

El último axioma (que veremos algo más adelante, pues exige alguna definición) distingue **R** de **Q** .

Gracias al orden de **R** tiene sentido la representación usual de **R** como una línea recta, asociando a cada número real un punto de la recta. Es tan común que se utilizan indistintamente los términos 'conjunto de números reales' y 'recta real'; 'número real' y 'punto'.



Repasemos (sin probarlas a partir de los axiomas) algunas propiedades de las **desigualdades**:

Teorema:

$a<b \Rightarrow a+c<b+c\,,\ a-c<b-c$	$a<b\,,\, c<d \Rightarrow a+c<b+d\,,\ a-d<b-c$
$a<b\,,\, c>0 \Rightarrow ac<bc\,,\ a/c<b/c$	$a<b\,,\, c<d \Rightarrow ac<bd$, si $a,b,c,d>0$
$a<b\,,\, c<0 \Rightarrow ac>bc\,,\ a/c>b/c$	$a/c<b/d \Leftrightarrow ad<bc$, si $a,b,c,d>0$
$1<a \Rightarrow a<a^2\,;\ 0<a<1 \Rightarrow a>a^2$	$a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\,,\ a^2<b^2,\ \sqrt{a}<\sqrt{b}$, si $a,b>0$

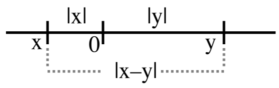
Todas las desigualdades son válidas sustituyendo los $<$ por $\leq$ (menos los >0 ó <0).

[En estos apuntes (y como siempre se hace) $\sqrt{a}$ representará siempre sólo la **raíz positiva** del número $a\geq 0$; el otro número real cuyo cuadrado es ese número a se debe representar por $-\sqrt{a}$].

A cada $x\in\mathbf{R}$ podemos asociar un real positivo $|x|$, **valor absoluto** de x, definido por:

$$\boxed{|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x\leq 0\end{cases}}$$

$|x|$ representa la distancia de x al origen y $|x-y|$ la distancia de x a y (tanto si $y>x$ como si $x>y$).

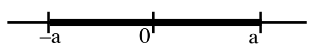


El primer teorema es inmediato a partir de la definición. Probamos los otros dos:

Teorema: $\boxed{\sqrt{x^2}=|x|\,,\quad |x|^2=x^2\,,\quad |x|=|-x|\,,\quad |xy|=|x||y|\,,\quad -|x|\leq x\leq |x|\,.}$

Teorema: $\boxed{\text{Sea } a>0:\ |x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a\,;\ |x|<a \Leftrightarrow -a<x<a\,.}$

$\Rightarrow$) si $|x|\leq a \Rightarrow -|x|\geq -a \Rightarrow -a\leq -|x|\leq x\leq |x|\leq a\,.$



$\Leftarrow$) sea $-a\leq x\leq a$; si $x\geq 0$, $|x|=x\leq a$; si $x\leq 0$, $|x|=-x\leq a$; por tanto, $\forall x,\ |x|\leq a\,.$

[con el $<$ se demostraría igual; del teorema se deduce, desde luego, que $\boxed{|x|\geq a \Leftrightarrow x\leq -a \text{ ó } a\leq x}$, pues la afirmación '$p\Leftrightarrow q$' equivale a la '(no p) $\Leftrightarrow$ (no q)']

Teorema: $\boxed{|x+y|\leq |x|+|y| \quad ; \quad |x|-|y|\leq |x-y|\leq |x|+|y| \quad ; \quad \big||x|-|y|\big|\leq |x-y|\ .}$ **(desigualdad triangular)**

$$(|x+y|)^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\leq |x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2 \Rightarrow |x+y|\leq |x|+|y|\,.$$

$$|x|=|x-y+y|\leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y|\leq |x-y|\,;\quad |x-y|=|x+(-y)|\leq |x|+|-y|=|x|+|y|\,.$$

$$|x|-|y|\leq |x-y|\,,\ |y|-|x|\leq |x-y| \Rightarrow |x|-|y|\geq -|x-y| \Rightarrow \big||x|-|y|\big|\leq |x-y|\,.$$

Ej. Probar que si $a,b,c,d>0$ y $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ entonces es $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$. Encontrar i) un racional y ii) un irracional que sean mayores que $\frac{11}{17}$ y menores que $\frac{9}{13}$.

$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow ab+ad<ab+bc$
$\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad+cd<bc+cd$ desigualdades ciertas pues sabemos que $ad<bc$ $\left[\Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right]$.

i) En particular: $\frac{11}{17}<\frac{11+9}{17+13}=\boxed{\frac{2}{3}}<\frac{9}{13}$. $\left[\text{Otro sería } \frac{1}{2}\left(\frac{11}{17}+\frac{9}{13}\right)\right]$.

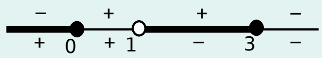
ii) Sumamos al racional $\frac{11}{17}$ un irracional que sea menor que su distancia a $\frac{9}{13}$: $\frac{9}{13}-\frac{11}{17}=\frac{10}{251}$.

$$0<\frac{\sqrt{2}}{2}<1 \Rightarrow 0<\frac{5\sqrt{2}}{251}<\frac{10}{251} \Rightarrow \frac{11}{17}<\boxed{\frac{11}{17}+\frac{5\sqrt{2}}{251}}<\frac{11}{17}+\frac{10}{251}<\frac{9}{13}.$$

Ej. Calculemos todos los números reales x que que cumplen la desigualdad: $\boxed{\frac{3-x^2}{1-x}\leq 3}$.

Nuestra desigualdad equivale a: $\frac{3-x^2}{1-x}-3=\frac{3x-x^2}{1-x}=\frac{x(3-x)}{1-x}\leq 0$ [sumar o restar a ambos lados no cambia el signo].

Es $x(3-x)\geq 0$ si $0\leq x\leq 3$ (ambos factores positivos) y es ≤ 0 si $x\leq 0$ ó $x\geq 3$ (distinto signo).
El denominador es positivo si $x\leq 1$ y negativo si $x\geq 1$. Para $x=1$ el cociente no está definido.
El cociente será negativo si y sólo si el numerador y el denominador tienen distinto signo.
Por tanto, los x buscados son los representados en el dibujo:



De otra forma: multiplicamos los dos miembros por $1-x$, pero recordando que **al multiplicar por números negativos las desigualdades se invierten**.

Si $x<1$, la desigualdad equivale a $3-x^2\leq 3-3x$, $x(3-x)\leq 0 \Rightarrow x\leq 0$, en esa región.

Si $x>1$, cambia la desigualdad: $x(3-x)\leq 0 \Rightarrow 1<x\leq 3$, en la región tratada ahora.

Ej. Determinemos los x que satisfacen: $\boxed{|\sqrt{x}-2|=x}$.

Si $x<0$, la raíz no está definida. Desarrollando (para $x\geq 0$) el valor absoluto tenemos:

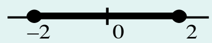
$$|\sqrt{x}-2|=\begin{cases}\sqrt{x}-2 & \text{si } \sqrt{x}\geq 2\text{, es decir, si } x\geq 4\\ 2-\sqrt{x} & \text{si } \sqrt{x}\leq 2\text{, es decir, si } 0\leq x\leq 4\end{cases}$$

Y, por tanto, $|\sqrt{x}-2|=x \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=x+2 \text{ si } x\geq 4 \Rightarrow x^2+3x+4=0\\ \sqrt{x}=2-x \text{ si } 0\leq x\leq 4 \Rightarrow x^2-5x+4=0\end{cases}$

El primer polinomio de segundo grado no se anula para ningún x real. El segundo para $x=1$ y $x=4$ (ambos en la región $0\leq x\leq 4$ en que estamos). Pero sólo es válido $x=1$ ($|1-2|=1$). El otro real $x=4$ no cumple la igualdad: $|2-2|\neq 4$ (nos lo hemos inventado al elevar al cuadrado).

Ej. Hallemos los x que cumplen: $\boxed{|x^2-1|\leq 3} \Leftrightarrow -3\leq x^2-1\leq 3 \Leftrightarrow -2\leq x^2\leq 4$.

Ambas desigualdades se cumplen si y sólo si $|x|\leq 2$ ($\Leftrightarrow x^2\leq 4$; la otra es cierta $\forall x$). Llegamos a lo mismo discutiendo el valor absoluto (más largo):



$$3\geq |x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 \text{ si } x^2\geq 1\\ 1-x^2 \text{ si } x^2\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2\leq 4 \text{ si } |x|\geq 1 \to 1\leq |x|\leq 2\\ x^2\geq -2 \text{ si } |x|\leq 1 \to \text{todo } |x|\leq 1\end{cases}$$

Ej. Sea $\boxed{f(x)=\frac{|2x+6|}{x-2}}$. Determinemos los reales x que cumplan: i) $f(x)=1$, ii) $f(x)<4$.
Como $2x+6$ cambia de signo en $x=-3$ es:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+6}{x-2}, & x\geq -3, x\neq 2\\ -\frac{2x+6}{x-2}, & x\leq -3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{2x+6}{x-2}=1 \to x=-8\ (<-3)\\ \frac{2x+6}{2-x}=1 \to x=-\frac{4}{3}\ (>-3)\end{cases} \Rightarrow \textbf{ningún } x \text{ cumple i).}$$

ii) $\begin{cases}\frac{2x+6}{x-2}<4 \Leftrightarrow \frac{2(7-x)}{x-2}<0 \Leftrightarrow x<2 \text{ ó } x>7\text{, y además debe ser } x\geq -3 \searrow\\ \frac{2x+6}{2-x}<4 \Leftrightarrow \frac{2(3x-1)}{2-x}<0 \to x<\frac{1}{3} \text{ ó } x>2\text{, siendo además } x\leq -3 \nearrow\end{cases}$ $\boxed{x<2 \text{ ó } x>7}$.

Ej. Probemos ahora que para todo x se cumple $\boxed{-8\leq |x-5|-|x+3|\leq 8}$.

Los teoremas aseguran: $|x|-5\leq |x-5|\leq |x|+5$, $|x|-3\leq |x+3|\leq |x|+3$. Por tanto:

$$|x-5|-|x+3|\leq |x|+5-[|x|-3]=8 \text{ (mayor–menor) y}$$
$$|x-5|-|x+3|\geq |x|-5-[|x|+3]=-8 \text{ (menor–mayor)}$$

También lo podríamos haber hecho expresando los valores absolutos según los valores de x.

A partir exclusivamente de los axiomas de los números reales se podrían demostrar todas las propiedades que se habrán utilizado en cursos anteriores. Repasamos ahora algunas referentes las **raíces de polinomios** sencillos, empezando por los de segundo grado ($a\neq 0$):

Las raíces de $\boxed{P_2(x)=ax^2+bx+c}$ vienen dadas por $x_\pm=\frac{1}{2a}\left[-b\pm\sqrt{\Delta}\,\right]$, $\underbrace{\Delta=b^2-4ac}_{\text{discriminante}}$.

El tipo de raíces de P_2 depende del signo del discriminante Δ . Si $\Delta>0$ tiene dos reales y distintas, si $\Delta=0$ una raíz doble real y si $\Delta<0$ dos raíces complejas conjugadas ($p\pm q\,\mathrm{i}$). Conocidas sus raíces x_+ y x_- puede escribirse $P_2(x)=a(x-x_+)(x-x_-)$.

Aunque el **teorema fundamental del álgebra** asegura que **todo polinomio de grado n posee n raíces** (reales o complejas, repetidas o no), otra cosa es cómo hallarlas. Nos gustaría tener fórmulas para el cálculo de las raíces de los $P_n(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ de cualquier grado similares a las de P_2 . Hacia 1500 se descubrieron fórmulas para las raíces de los de grado 3 y 4 (no muy útiles en la práctica). Pero en el siglo XIX se probó que es imposible expresar mediante radicales las raíces de los de grado ≥ 5 .

Si encontramos una raíz x^* de un P_n , dividiendo por $(x-x^*)$ reducimos el problema de hallar sus raíces al de hallar las de un P_{n-1} . Por este camino se puede, en pocas ocasiones, calcularlas todas. Si casualmente un P_n con coeficientes enteros tiene raíces enteras, son fáciles de hallar:

$\boxed{\text{Si existe raíz entera de } P_n \text{ se encuentra entre los divisores del término independiente } a_0 .}$

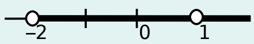
Si c es raíz entera, entonces $a_0=-c[a_nc^{n-1}+\cdots+a_1]$, con lo que a_0 es múltiplo de c .

Ej. Determinemos todos los reales x que satisfacen: $\boxed{3x-x^3<2}$.

Esto equivale a $x^3-3x+2>0$. Para precisar el signo del polinomio necesitamos hallar sus raíces. Aunque es complicado en general, es claro aquí que $x=1$ es una. Dividiendo por $(x-1)$ tenemos:

$$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)>0 .$$

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	0

Los x buscados son: $\boxed{\{x : x>-2 \text{ y } x\neq 1\}}$. 

[Una forma habitual de tratar las desigualdades es hallar primero los x en que se da la igualdad y luego dar valores concretos en puntos intermedios viendo si se cumple o no. Pero esto, que funciona bien con funciones continuas, tiene el riesgo de olvidar ceros de denominadores y otras discontinuidades].

Dos tipos sencillos de **polinomios de orden 4 con raíces calculables** son:

Las raíces del polinomio bicuadrado $\boxed{P_4(x)=ax^4+bx^2+c}$ se hallan haciendo $z=x^2$.

Las raíces de $\boxed{P_4(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a}$ se calculan mediante el cambio $z=x+\frac{1}{x}$:

$$a\big(x^2+\tfrac{1}{x^2}\big)+b\big(x+\tfrac{1}{x}\big)+c=a\big(x+\tfrac{1}{x}\big)^2+b\big(x+\tfrac{1}{x}\big)+c-2a=0 \to az^2+bz+c-2a=0 .$$

Halladas sus raíces $z_\pm$, basta resolver los dos polinomios de segundo grado: $x^2-z_\pm x+1=0$.

Ej. Hallemos las raíces del polinomio $\boxed{P_4(x)=x^4-2x^2-15}$ $\xrightarrow{z=x^2}$ $z^2-2z-15=0$ $\to$

$z=1\pm\sqrt{1+15}=5,-3$ $\left[\text{las raíces de } ax^2+2bx+c=0 \text{ simplificadas son } x_\pm=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}\right]$.

Como $\mathrm{i}^2=-1$ (en 1.5 repasaremos los complejos), las 4 raíces son: $\boxed{x=\pm\sqrt{5}\,,\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

Como ocurrió en este ejemplo, es fácil ver que en general **si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces complejas, éstas aparecen como parejas** $p\pm qi$.

[Ninguna de las raíces es entera, pero esto lo podíamos saber desde un principio, pues las únicas posibles eran $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$ y ninguna de ellas anula el polinomio. No olvidemos que, en general, no sabremos hallar las raíces de un polinomio de grado ≥ 3 (por ejemplo, no sabemos resolver $x^4-2x-15=0$). En la sección 3.3 veremos cómo actuar cuando sea esa la situación].

Para enunciar el **axioma del extremo superior** necesitamos unas definiciones previas:

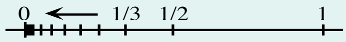
> Un conjunto $A\subset\mathbf{R}$ se dice **acotado superiormente** (**inferiormente**) si existe $k\in\mathbf{R}$ tal que $a\le k$ ($a\ge k$) para todo $a\in A$.
> A un real k con esa propiedad se le llama **cota superior** (**inferior**) de A .
> A se dice **acotado** si lo está superior e inferiormente.

[Es decir, A está acotado si existen k_1 y k_2 tales que $k_1\le a\le k_2$ para todo $a\in A$.
Esto es equivalente a que exista un k tal que $|a|\le k$ (o sea $-k\le a\le k$), $\forall a\in A$].

Ej. $\mathbf{R}_+\equiv\{x : x\ge 0\}$ no es acotado, pero sí lo está inferiormente (por $-\pi$, por el propio $0\ldots$).

$A=\{x : 0\le x<7\}$  está acotado

[cotas superiores: $\sqrt{93}$, 7 (la menor), . . . ; cotas inferiores: -13, 0 (la mayor), . . .].

$B=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbf{N}\right\}$ 

también lo está

[cotas superiores: π , 1 (la menor), . . . ; cotas inferiores: -3, 0 (la mayor), . . .].

Extremo superior (o supremo) de A es la menor de sus cotas superiores. Es decir:

> $s\in\mathbf{R}$ es el **extremo superior** o **supremo** de A [$\sup A$] si:
> i) s es cota superior de A , ii) si k es cota superior de A entonces $s\le k$.

[Se define análogo extremo inferior o ínfimo de A [$\inf A$], mayor de las cotas inferiores].

El $\sup A$ puede pertenecer o no a A ; si pertenece se le llama máximo, es decir:

> $M\in\mathbf{R}$ es el **máximo** de A [$\max A$] si $M\in A$ y $a\le M$, $\forall a\in A$

(análogamente, $\min A$).

Ej. $\mathbf{Z}$, sin cotas superiores ni inferiores, no puede tener ni supremo ni ínfimo.

El mínimo de $\mathbf{R}_+$ es 0 (y su ínfimo). No tiene supremo (ni máximo).

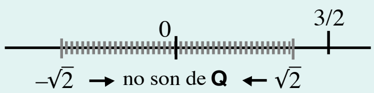
7 es el supremo del A de antes (es la cota superior más pequeña), pero no es máximo, pues $7\notin A$; 0 es su mínimo (y, por tanto, su ínfimo).

Para B , 1 es el máximo (y supremo) y 0 el ínfimo (no mínimo).

Axioma del extremo superior:

> Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee extremo superior.

[No es difícil demostrar que la afirmación: 'todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee extremo inferior' es equivalente al axioma].



Este axioma precisa la idea intuitiva de que los números reales 'llenan del todo' la recta real. Como ocurría en $\mathbf{Q}$, entre cualquier par de reales distintos existen infinitos reales (infinitos racionales e infinitos irracionales). Pero a pesar de estar también los elementos de $\mathbf{Q}$ 'tan cerca unos de otro como queramos', dejan sin embargo 'huecos' entre ellos (los puntos ocupados por los infinitos irracionales). Por eso hay conjuntos acotados en $\mathbf{Q}$ sin supremo. Por ejemplo, $\{x\in\mathbf{Q} : x^2<2\}$ es un subconjunto de $\mathbf{Q}$ con cotas superiores racionales ($3/2$, por ejemplo) pero no existe ninguna en $\mathbf{Q}$ que sea la más pequeña. Dada cualquier cota racional siempre puedo dar otra menor (más cercana al irracional $\sqrt{2}$). El mismo conjunto, visto como subconjunto de $\mathbf{R}$, debe tener supremo (por el axioma del extremo superior): $\sqrt{2}$ lo es.

Los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}$ van a aparecer un montón de veces en estos apuntes:

Intervalos. Dados $a<b$ se define:

$\boxed{\text{intervalo abierto } (a,b)=\{x: a<x<b\} \text{ ; intervalo cerrado } [a,b]=\{x: a\leq x\leq b\}}$

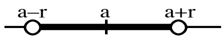
a y b no pertenecen 

a y b sí pertenecen 

$$\begin{array}{|l|} \hline [a,b)=\{x: a\leq x<b\} \ ; \ \ (a,\infty)=\{x: a<x\} \ ; \ \ (-\infty,b)=\{x: x<b\} \\ (a,b]=\{x: a<x\leq b\} \ ; \ \ [a,\infty)=\{x: a\leq x\} \ ; \ \ (-\infty,b]=\{x: x\leq b\} \\ \hline \end{array}$$

[∞ no es ningún número real, es sólo notación].

Se llama $\boxed{\textbf{entorno} \text{ de centro } a \text{ y radio } r>0 \text{ a } B(a,r)=\{x: |x-a|<r\}=(a-r,a+r)}$

[es decir, al intervalo abierto de longitud $2r$ centrado en a : 

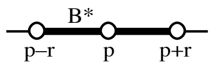
]

Los intervalos abiertos y cerrados son casos particulares tipos de conjuntos que son importantes en matemáticas más avanzadas: los **conjuntos abiertos y cerrados** que vamos a definir:

Def. Sea $A\subset\mathbf{R}$ y $a\in A$. a es punto **interior** a A si existe $r>0$ tal que $B(a,r)\subset A$. A es **abierto** si todos sus puntos son interiores.

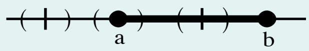
Def. Sea $A\subset\mathbf{R}$. p es **punto de acumulación** de A si en todo entorno de p existen puntos de A distintos de p. [p no tiene que estar en A].

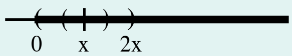
Es decir, si llamamos $B^*(p,r)=B(p,r)-\{p\}=\{x: 0<|x-p|<r\}$, p es de acumulación de A si para todo $r>0$ es $A\cap B^*(p,r)\neq\varnothing$.



Def. A es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Ej. $[a,b]$ no es abierto porque no todos sus puntos son interiores; hay dos de ellos que no lo son: a y b (los demás sí lo son); por muy pequeño que sea r, $B(a,r)\not\subset[a,b]$ (hay puntos de $B(a,r)$, los de la izquierda de a, que no son de $[a,b]$). Para ver si es cerrado, localicemos sus puntos de acumulación: cualquier $p\notin[a,b]$ no lo es, ya que un entorno suyo suficientemente pequeño no contiene ningún punto del intervalo; todo $p\in[a,b]$ (incluidos a y b) es de acumulación pues cualquier entorno suyo contiene infinitos puntos de $[a,b]$. Como $[a,b]$ contiene a todos sus puntos de acumulación, es cerrado.

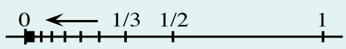




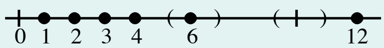
$(0,\infty)$ sí es abierto, pues todos sus puntos son interiores. En efecto, sea $x\in(0,\infty)$. $\exists r=x$ (o cualquier $r<x$) tal que $B(x,r)=(0,2x)\subset(0,\infty)$.

$(0,\infty)$ no es cerrado, pues $0\notin(0,\infty)$ y es de acumulación del conjunto.

$\{\frac{1}{n}: n\in\mathbf{N}\}$ tiene un único punto de acumulación (el 0) que no pertenece al conjunto: no es cerrado. Tampoco es abierto, pues tiene puntos no interiores (ninguno lo es).



$\{n\in\mathbf{N}: n \text{ es divisor de } 12\}=\{1,2,3,4,6,12\}$ es claro que tampoco es abierto (puntos no interiores), pero este conjunto sí es cerrado, pues contiene a todos sus puntos de acumulación (al conjunto $\varnothing$ (no hay ninguno)).



Teorema: $\boxed{A \text{ es cerrado si y solo si su complementario } \mathbf{R}-A \text{ es abierto.}}$

Sea A cerrado: tomemos cualquier $a\in\mathbf{R}-A\Leftrightarrow a\notin A \Rightarrow a$ no es de acumulación de A $\Rightarrow \exists r$ tal que $B(a,r)\cap A=\varnothing \Rightarrow B(a,r)\subset\mathbf{R}-A \Rightarrow \mathbf{R}-A$ es abierto.

Sea $\mathbf{R}-A$ abierto. Probemos que A es cerrado probando: '$a\notin A\Rightarrow a$ no es de ac. de A': $a\notin A \Rightarrow a\in\mathbf{R}-A$ abierto $\Rightarrow \exists r/B(a,r)\subset\mathbf{R}-A \Rightarrow B(a,r)\cap A=\varnothing \Rightarrow a$ no es de ac.

1.4. Repaso de las funciones elementales

Funciones reales de variable real

Vimos en 1.1 las funciones en general. Casi todas las de este curso serán funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$:

Def. Una **función** real de variable real f es una regla que asigna a cada uno de los números x de un conjunto $D\subset R$ un único número real $f(x)$. A $D\equiv \mathrm{dom}f$ se le llama **dominio** de f. $y\equiv f(x)$ es el **valor** de f en x. **Imagen** o **recorrido** de f es $f(D)\equiv \mathrm{im}f \equiv \{f(x): x\in D\}$.

$$f: D\to f(D)$$
$$x\to y\equiv f(x)$$

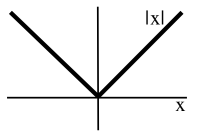
(Si no se precisa más, $\mathrm{dom}f$ será el conjunto de x para los que f tiene sentido).

Muchas veces f admite una expresión algebraica como $f(x)=|x|$, $f(x)=\mathrm{sen}\,x, \dots$), pero otras no será expresable ni con palabras. Por eso dimos en 1.1 una definición más teórica y más precisa:

f es un conjunto de pares ordenados que no contiene dos distintos con el mismo primer elemento.

$\big[$Según esta definición, la 'función $|x|$' sería $\{(x,|x|): x\in\mathbf{R}\}$ $\big]$.

Geométricamente, f se puede representar en un sistema de coordenadas como un conjunto de puntos (**gráfica** de f) en el plano xy. Así, la gráfica de $f(x)=|x|$ es el conjunto de puntos que forman las semirrectas $y=x$ e $y=-x$ que coinciden en el origen.



Dadas dos funciones f y g se pueden definir otras funciones $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g y $f\circ g$:

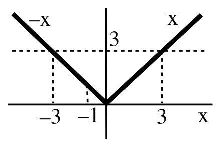
Def. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ para $x\in \mathrm{dom}f\cap \mathrm{dom}g$. $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ para $x\in \mathrm{dom}f\cap\mathrm{dom}g\cap\{x: g(x)\neq 0\}$. $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$ (**composición** de f y g) para x con $x\in\mathrm{dom}g$ y $g(x)\in\mathrm{dom}f$.

Es inmediato ver que suma y producto de funciones son conmutativas, asociativas y se da la distributiva. La composición es asociativa, pero no conmutativa:

Ej. Si $f(x)=x^2$, $g(x)=2x-1$ se tiene que $(f\circ g)(x)=4x^2-4x+1\neq 2x^2-1=(g\circ f)(x)$.

Def. f es **inyectiva** en $A\subset\mathbf{R}$ si $f(x)=f(x^*) \Rightarrow x=x^*$, $\forall x,x^*\in A$ $\big[$o lo que es lo mismo, si $x\neq x^* \Rightarrow f(x)\neq f(x^*)$ $\big]$.

Ej. $f(x)=|x|$ no es inyectiva en $A=\mathbf{R}$ (a -3 y 3, por ejemplo, les corresponde el mismo valor). Sí lo es en $A=[0,\infty)$, o en $A=[-3,-1]$.



La gráfica de una función inyectiva no corta más de una vez cualquier recta horizontal.

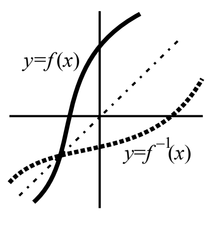
Def. Si $f: x\to y=f(x)$ es inyectiva en A existe la **función inversa** $f^{-1}: f(A)\to A$
$y=f(x)\to x=f^{-1}(y)$

En términos de pares ordenados, la función inversa es $f^{-1}=\{(y,x):(x,y)\in f\}$.

Propiedades inmediatas son:

$$\mathrm{dom}f^{-1}=\mathrm{im}f\,,\ \mathrm{im}f^{-1}=\mathrm{dom}f\,,\ (f^{-1}\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$$

Las gráficas de $y=f(x)$ y de $y=f^{-1}(x)$ son **simétricas respecto a la recta** $y=x$ [pues (x,y) e (y,x) lo son]. Para escribir $y=f^{-1}(x)$ explícitamente (cuando se pueda; en general será imposible) se despeja x en función de y de la expresión $y=f(x)$ y se cambia el nombre a las variables.

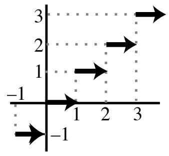


Ej. La inversa de $y=x^3-5$ es $y=(x+5)^{1/3}$ $\big[$pues $x=(y+5)^{1/3}$ al despejar$\big]$.

Def. f es **estrictamente creciente** en $A \subset \mathbf{R}$ si $\forall x, x^* \in A$ con $x < x^*$ se tiene $f(x) < f(x^*)$. Es **estrictamente decreciente** si $f(x) > f(x^*)$. Es **creciente** si $f(x) \leq f(x^*)$. Es **decreciente** si $f(x) \geq f(x^*)$. Cualquiera de ellas se dice **monótona** (**estrictamente monótonas**, las dos primeras).

Ej. $f(x) = [x] =$ máximo entero menor o igual que x [llamada 'parte entera de x'] es creciente en todo $\mathbf{R}$ [no estrictamente].

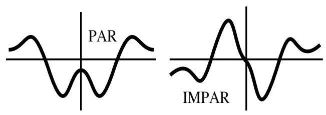
Ej. $f(x) = |x|$ es estrictamente decreciente en $\{x \leq 0\}$ y es estrictamente creciente en $\{x \geq 0\}$.



Teorema: $\boxed{f \text{ estrictamente monótona en } A \Rightarrow f \text{ inyectiva en } A}$ [y existe su f^{-1}].
[Si $x \neq x^*$ o bien es $f(x) < f(x^*)$ o bien $f(x) > f(x^*)$].

[Para ver si una f es monótona (y por tanto inyectiva) acudiremos en el futuro a las derivadas. También las necesitaremos para conocer la imagen de funciones que no sean muy sencillas].

Def. f es **par** si $f(-x) = f(x)$ e **impar** si $f(-x) = -f(x)$.
f es de **periodo** T o T-**periódica** si $f(x+T) = f(x)\ \forall x$.



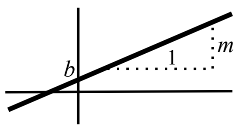
[Su gráfica, respectivamente, es simétrica respecto al eje $x=0$, es simétrica respecto del origen o se repite cada T unidades].

Es muy fácil comprobar que **el producto de dos funciones pares o de dos impares es una función par** y que **el producto de una función par por una impar es impar**.

[Por ejemplo, si f, g impares, $(f \cdot g)(-x) = f(-x)\,g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$].

Rectas

La gráfica de $\boxed{y = mx+b}$ es una recta de **pendiente** m que corta el eje $x=0$ en el punto $y=b$. Las rectas **paralelas** a ella son de la forma $y = mx+C$. La pendiente de las rectas **perpendiculares** es $-\frac{1}{m}$.



La recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene pendiente m es $\boxed{y = y_0 + m(x - x_0)}$.

La recta que pasa por (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es $\boxed{y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$.

Ej. i) Dibujar y hallar la ecuación de la recta R que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 3)$.
ii) Hallar la función inversa $y = f^{-1}(x)$ de la función $y = f(x)$ definida por la recta R.
iii) Hallar la ecuación de la recta paralela a R que pasa por el punto $(1, -1)$.
iv) Hallar la ecuación de la perpendicular a R que pasa por ese mismo punto.

La pendiente de R es $\frac{3}{2}$ y pasa por $(-1, 0)$. Su ecuación:

$$\boxed{y = \tfrac{3}{2}(x+1)} = f(x) \quad \text{(rojo)}$$

Despejando x en función de y, y cambiando nombres:

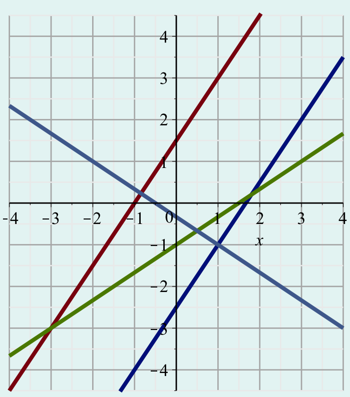
$$x = \tfrac{2}{3}y - 1 \;\to\; \boxed{f^{-1}(x) = \tfrac{2}{3}x - 1} \quad \text{(verde).}$$

La paralela, con la misma pendiente, pasa por $(1, -1)$:

$$y = -1 + \tfrac{3}{2}(x-1) \;\to\; \boxed{y = \tfrac{3}{2}(3x-5)} \quad \text{(azul oscuro).}$$

La perpendicular tiene por pendiente $-\frac{2}{3}$:

$$y = -1 - \tfrac{2}{3}(x-1) \;\to\; \boxed{y = -\tfrac{1}{3}(2x+1)} \quad \text{(azul claro).}$$

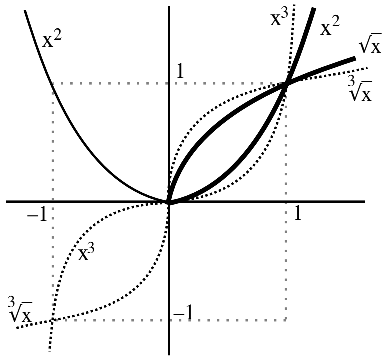


Potencias, raíces, exponenciales y logaritmos

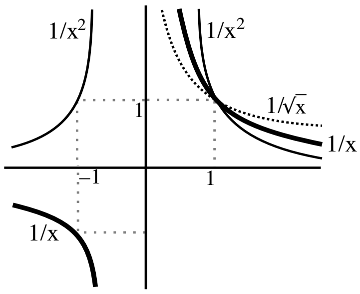
$\boxed{y=x^n\,,\ \ y=x^{1/n}=\sqrt[n]{x}\,,\ n\in\mathbf{N}}$

Si n **impar**, $y=x^n$ es inyectiva en todo $\mathbf{R}$ y es $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$. Su inversa $y=x^{1/n}$ está definida en $\mathbf{R}$ y su imagen es $\mathbf{R}$. Si n **par**, no es inyectiva en $\mathbf{R}$. Se llama entonces $y=x^{1/n}$ a la inversa de $y=x^n$ restringida al intervalo $[0,\infty)$, con lo que en ese caso tiene por dominio e imagen $[0,\infty)$.

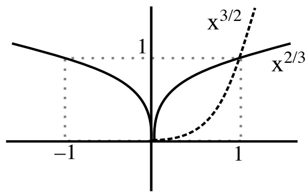
(La función $y=-x^{1/n}$ para n par, es la inversa de $y=x^n$ restringida a $(-\infty,0]$).



$$\boxed{\begin{array}{c} y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}\\ y=x^{-1/n}=\frac{1}{x^{1/n}}\\ n\in\mathbf{N}\end{array}}\ \rightarrow$$



$\boxed{y=x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}\,,\ m,n\in\mathbf{N}}$



b^x es fácil de definir si $x\in\mathbf{Q}$ $\left[\,b^{m/n}=\sqrt[n]{b^m}\,\right]$, pero no cuando x es irracional (¿qué es 2^π ?) y por tanto $\log_b x$ tampoco tiene sentido. Definimos primero el logaritmo neperiano así:

$\boxed{\log x\equiv\ln x\equiv\int_1^x\frac{dt}{t}}$, para $x>0$ [$\log x$ será siempre neperiano, el decimal $\log_{10}x$ no se utilizará].

que es la forma más corta de hacerlo, aunque no podemos aún deducir sus propiedades. Nos creemos que $\log x$ es estrictamente creciente en $\{x>0\}$ y que su imagen es $\mathbf{R}$. Y también que:

$\boxed{\log(a\cdot b)=\log a+\log b\ ,\ \ \log\frac{a}{b}=\log a-\log b\ ,\ \ \log(a^c)=c\log a}$, si $a,b>0$.

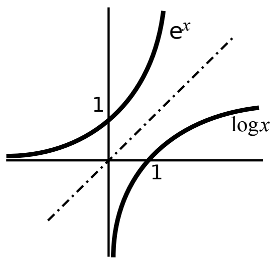
[Observemos que no es cierto $\forall x$, por ejemplo, que $\log x^2=2\log x$, pues si $x<0$ el segundo miembro carece de sentido; sí es cierto $\forall x\neq 0$ que $\log x^2=2\log|x|$].

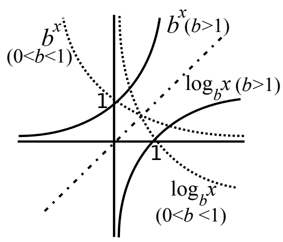
A partir de la función logaritmo, definimos:

$\boxed{e^x}$ es la inversa de $\log x$, con lo que su dominio es $\mathbf{R}$ y su imagen $\{x>0\}$.

$\boxed{x^b\equiv e^{b\log x}}$, $x>0$; $\boxed{b^x\equiv e^{x\log b}}$, $b>0$, $\forall x$;

$\boxed{\log_b x\equiv\frac{\log x}{\log b}}$, $\begin{array}{c}b>0\\ b\neq 1\end{array}$, $x>0$. [O también: inversa de b^x].





De estas definiciones se podrían deducir:

$\boxed{b^0=1\,,\ \ b^{x+y}=b^xb^y\,,\ \ b^{-x}=\frac{1}{b^x}\,,\ \ (b^x)^y=b^{xy}}$ $\left[\,b^{x^y}\text{ representa siempre } b^{(x^y)}\,\right]$.

Las definiciones son naturales, si han de satisfacerse estas propiedades. Así, por ejemplo:

$x^b=$ [exponencial inversa del logaritmo] $=\left(e^{\log x}\right)^b=$ [pues $(b^x)^y=b^{xy}$] $=e^{b\log x}$

$\left[\,x^b\right.$ sólo vale para $x>0$ si b es un real cualquiera, pero si $b=7$ ó $b=\frac{1}{3}$ está definida $\left.\forall x\,\right]$.

[Según la definición dada, el número e sería aquel que cumpliese $\log e=\int_1^e\frac{dt}{t}=1$. Utilizando las propiedades de la integral se podría aproximar su valor, pero esto será mucho más corto hacerlo cuando estudiemos Taylor. Admitimos que aproximadamente es $e\approx 2.7182818...$].

Más en general, se define: $\boxed{f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\log[f(x)]}}$, para los x tales que $f(x)>0$.

Ej. Sea $f(x)=\log\left(4x-3\sqrt{x}\right)$. Hallar su dominio D y determinar los reales x que hacen $f(x)=0$. ¿Tiene D supremo, máximo, ínfimo o mínimo? ¿Es f inyectiva en su dominio?

f está definida si $x\geq 0$ (por la raíz) y si (por el logaritmo) $4x-3\sqrt{x}>0 \underset{\sqrt{x}>0}{\Longleftrightarrow} 4\sqrt{x}>3 \Leftrightarrow x>\frac{9}{16}$.

Por tanto, el dominio de f es $\boxed{D=\left(\frac{9}{16},\infty\right)}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow 4x-3\sqrt{x}=1 \underset{t=\sqrt{x}}{\Longleftrightarrow} 4t^2-3t-1=0,\ t=\frac{3\pm\sqrt{16}}{8}=1,-\frac{1}{4}=\sqrt{x} \Rightarrow \boxed{x=1}$.

$\left[\text{que sea } \sqrt{x}=-\frac{1}{4} \text{ es imposible}\right]$.

D no tiene supremo, ni máximo, ni mínimo. Su extremo inferior (que no pertenece a D) es $\frac{9}{16}$.

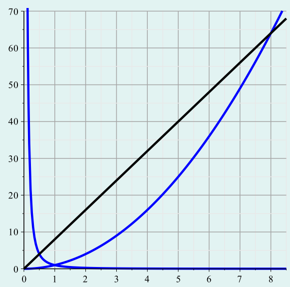
Como se dijo, el estudio de la inyectividad (de la monotonía) es complicado por ahora. El instrumento adecuado para abordarlo es la derivada, pero lo vemos sin ella. Parece ser estrictamente creciente, pues en el argumento del logaritmo x crece más que $\sqrt{x}$. Lo probamos:

Si $\frac{9}{16}\leq x<y \underset{\sqrt{x}\text{ crece}}{\Longrightarrow} \sqrt{x}<\sqrt{y},\ 4\sqrt{x}-3<4\sqrt{y}-3 \Rightarrow 4x-3\sqrt{x}<4y-3\sqrt{y} \underset{\log\text{ crece}}{\Longrightarrow} f(x)<f(y)$.

Por ser estrictamente creciente en D, es f inyectiva (y posee función inversa).

$\left[\text{Las cosas serán más mecánicas con su derivada } f'(x)=\frac{8\sqrt{x}-3}{2x(4\sqrt{x}-3)}>0 \text{ si } x>\frac{9}{16} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{estrictamente}\\ \text{creciente}\end{array}\right].$

Ej. Hallar todos los números reales x tales que $\boxed{e^{2|\log x|}<8x}$.



Es $|\log x|=\begin{cases}\log x \text{ si } x\geq 1 & \text{(cuando el logaritmo es positivo)}\\ -\log x \text{ si } 0<x\leq 1 & \text{(si está definido y es negativo)}\end{cases}$

Para $x\geq 1$, $e^{2|\log x|}=e^{\log x^2}=x^2<8x \underset{x>0}{\Rightarrow} x<8$ (y $x\geq 1$).

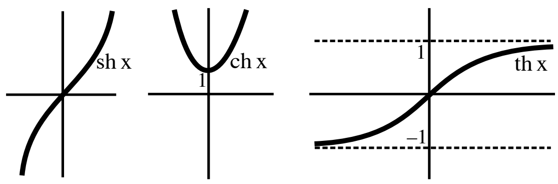
Para $0<x\leq 1$, $e^{-2\log x}=e^{\log x^{-2}}=x^{-2}<8x,\ x^3>\frac{1}{8},\ x>\frac{1}{2}$.

Los x buscados son: $\boxed{x\in\left(\frac{1}{2},8\right)}$. [Los que sugieren las gráficas].

Las **funciones hiperbólicas** son funciones que se definen a partir de exponenciales y aparecen muchas veces en matemáticas (porque ni e^x ni e^{-x} tienen simetrías y ellas sí la tienen).

Seno, coseno y tangente hiperbólicas son:

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\\ \operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ \forall x\end{array}}$$



El dominio de todas es todo **R**. La imagen del seno hiperbólico es también todo **R**, la del coseno es $[1,\infty)$ y la de la tangente es $(-1,1)$.

Tienen propiedades similares a las trigonométricas (muy fáciles de comprobar) como:

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x,\ \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x,\ \operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th}x,\ \operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\ 1-\operatorname{th}^2x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},\\ \operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,\ \operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.\end{array}}$$

Probemos, por ejemplo, la cuarta y la sexta:

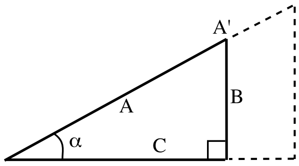
$$\tfrac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2=\tfrac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}\right)=1$$

$$\tfrac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)+\tfrac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y-e^{-y}\right)=\tfrac{1}{2}\left(e^{x+y}-e^{-x-y}\right)$$

[El nombre del seno y coseno hiperbólicos vienen del hecho de que se podrían definir de forma análoga a como vamos a definir el seno: son la ordenada y abscisa de un punto situado a distancia x del punto $(1,0)$ sobre la parte con $x>0$ de la hipérbola $x^2-y^2=1$.].

Funciones trigonométricas (siempre en **radianes**)

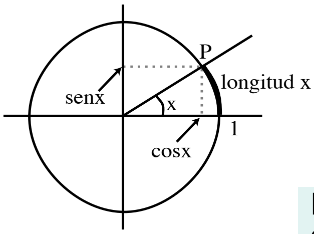
Seno, coseno y tangente aparecen primero como cocientes entre lados de un triángulo rectángulo. Para $0<\alpha<90^o$ es:



$\boxed{\operatorname{sen}\alpha=\frac{B}{A}}$, $\boxed{\cos\alpha=\frac{C}{A}}$ y $\boxed{\tan\alpha=\frac{B}{C}}$.

También $\operatorname{sen}\alpha=\frac{B'}{A'}$ [triángulos semejantes tienen lados proporcionales].

Interesa definirlas para cualquier ángulo, positivo o negativo, y además expresado en radianes:



Sea x la longitud (medida en sentido horario o antihorario) del arco que une $(1,0)$ con un punto P de la circunferencia unidad. El ángulo orientado (positivo hacia arriba, negativo hacia abajo) formado por las semirrectas que unen $(0,0)$ con ambos puntos es el ángulo de x **radianes** y $\boxed{\operatorname{sen}x}$ es la **ordenada** de P.

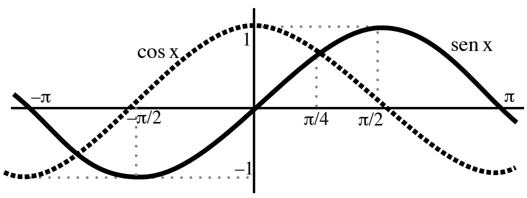
[Esta definición es poco rigurosa, por basarse en el concepto de longitud de una curva cuya definición no tenemos bien establecida; se le puede dar rigor utilizando integrales, lo mismo que a $\operatorname{sen}x$: ver Spivak].

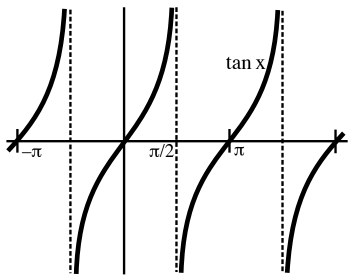
A partir del $\operatorname{sen}x$ definimos:

$$\boxed{\cos x=\operatorname{sen}(x+\tfrac{\pi}{2})}\ ,\ \forall x\ ;\quad \boxed{\tan x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}\ ,\ \text{si } x\neq\tfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

[Nos será más útil esta definición de $\cos x$ que la equivalente 'abscisa del punto P'. Las otras clásicas funciones trigonométricas $\operatorname{cotan}x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{1}{\tan x}$, $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ y $\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\operatorname{sen}x}$ no serán utilizadas en estos apuntes, puesto que se pueden expresar fácilmente en términos de las dadas].

Admitimos que las gráficas de estas funciones son las de abajo:





$\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ son de periodo 2π, $\operatorname{sen}x$ es impar y $\cos x$ es par, $\tan x$ es π-periódica e impar.

Repasemos algunas propiedades trigonométricas clásicas [algunas otras se verán en problemas].

Recordemos en primer lugar la equivalencia entre grados y radianes. Como un ángulo recto son $\frac{\pi}{2}$ radianes (la longitud de la circunferencia unidad es 2π) o bien $90°$, es $\boxed{\alpha° = \frac{\alpha\pi}{180}\text{ radianes}}$.

En particular, los famosos ángulos de $30°$, $45°$ y $60°$ son, respectivamente, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Las funciones trigonométricas tienen una infinidad de valores exactos conocidos como:

$$\operatorname{sen}(k\pi)=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=\tan(k\pi)=0\ ,$$
$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos(2k\pi)=1\ ,\ \ \operatorname{sen}\left(-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos[(2k-1)\pi]=-1\ ,$$

que son inmediatos, y los siguientes que se deducen fácilmente del teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{6}=\cos\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{1}{2}\ ,\ \ \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}=\cos\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \ \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3}=\cos\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\tan\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \ \tan\tfrac{\pi}{4}=1\ ,\ \ \tan\tfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\ .$$

De ellos salen los similares de otros cuadrantes, por ejemplo:

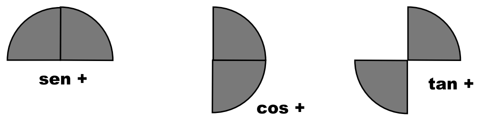
$$\operatorname{sen}\tfrac{5\pi}{6}=\tfrac{1}{2}\ ;\ \ \operatorname{sen}\tfrac{7\pi}{6}=\operatorname{sen}\tfrac{11\pi}{6}=-\tfrac{1}{2}\ \left[\text{o si se prefiere: } \operatorname{sen}(-\tfrac{5\pi}{6})=\operatorname{sen}(-\tfrac{\pi}{6})=-\tfrac{1}{2}\ \right].$$

De Pitágoras también se deduce: $\boxed{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \;\Rightarrow\; 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}}$.

Ej. A partir de aquí es fácil hallar, dada cualquiera de las razones trigonométricas de un ángulo y el cuadrante en el que se encuentra (sin este dato hay 2 posibilidades), los valores de las restantes:
Por ejemplo, si $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$ y $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, los valores del seno y el coseno de este ángulo son:

$$\cos\alpha=+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+(16/9)}}=\frac{3}{5}\,,\quad \operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha\,\tan\alpha=-\frac{4}{5}\,.$$

Seno, coseno y tangente son positivos en los cuadrantes dibujados a la derecha:



Más difíciles de probar son las siguientes importantes identidades (válidas $\forall a,b$):

$$\boxed{\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen}a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen}b\,,\;\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b},$$

pero a partir de ellas ya es fácil comprobar todas las siguientes (de hecho, nos bastaban las fórmulas para $a+b$, pues las de $a-b=a+(-b)$ son consecuencia inmediata de ellas, por la imparidad y paridad de seno y coseno). Por ejemplo:

$$\boxed{\operatorname{sen}2a=2\operatorname{sen}a\cos a}\,,\quad \boxed{\cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}=1-2\operatorname{sen}^2 a=2\cos^2 a-1$$

$$\Rightarrow\; \boxed{\operatorname{sen}^2 a=\tfrac{1}{2}[1-\cos 2a]\,,\;\cos^2 a=\tfrac{1}{2}[1+\cos 2a]}\,.$$

Casi inmediata es: $\boxed{\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}\;\Rightarrow\;\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}$.

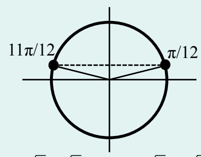
Aquí basta desarrollar los segundos miembros:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b&=\tfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]\\ \cos a\cos b&=\tfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]\\ \operatorname{sen}a\cos b&=\tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)]\end{aligned}}$$

En la última, llamando $A=a+b$ y $B=b-a$, resulta ser $a=\frac{A-B}{2}$ y $b=\frac{A+B}{2}$ con lo que:

$$\boxed{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\tfrac{A-B}{2}\cos\tfrac{A+B}{2}}\,.$$

Ej. Calculemos usando las igualdades anteriores el $\boxed{\cos\frac{35\pi}{12}}$.



Primero observemos que $\cos\frac{35\pi}{12}=\cos(\frac{35\pi}{12}-2\pi)=\cos\frac{11\pi}{12}=-\cos\frac{\pi}{12}$.

Como $\cos^2(\frac{\pi}{12})=\frac{1}{2}[1+\cos\frac{\pi}{6}]=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\;\Rightarrow\;\cos\frac{35\pi}{12}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Podemos dar una expresión más bonita: $-\cos\frac{\pi}{12}=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

[Ambas expresiones coinciden, claro: $\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{16}\left(2+6+2\sqrt{12}\right)$].

Ej. Encontremos todos los reales x que satisfacen $\boxed{6\tan x=\operatorname{sen}2x}$.

$$\frac{6\operatorname{sen}x}{\cos x}=2\operatorname{sen}x\cos x\Leftrightarrow\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos x}[3-\cos^2 x]=0\Leftrightarrow\operatorname{sen}x=0\text{ ó }\cos^2 x=3\text{ (imposible).}$$

Los x buscados son, pues, $\boxed{x=k\pi}$, $k\in\mathbf{Z}$.

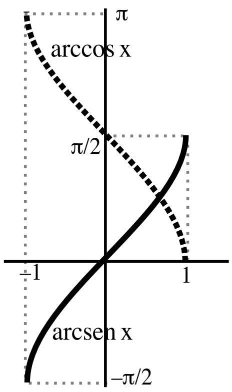
Ej. Hallemos todos los reales x tales que $\boxed{\cos 4x-2\cos 2x=3}$.

$$2\cos^2 2x-2\cos 2x-1=3\,,\;\cos^2 2x-\cos 2x-2=0\to\cos 2x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=2\,,-1\,.$$

$\cos 2x=2$ es imposible y $\cos 2x=-1$ se cumple si $2x=(2k+1)\pi\;\Rightarrow\;\boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,k\in\mathbf{Z}}$.

[Con algo de vista: las únicas soluciones posibles son los x que, a la vez, hacen $\cos 2x=-1$ y $\cos 4x=1$. No es conveniente en este caso, desde luego, expresarlo todo en función de $\cos x$].

Dada una razón trigonométrica no queda precisado el ángulo del que proviene. Por ejemplo hay infinitos x con $\tan x = -1$, incluso hay dos $\left(x = \frac{3\pi}{4} \text{ y } x = \frac{7\pi}{4}\right)$ si sólo nos preocupamos de los x de $[0, 2\pi)$. Por eso hay que tener cuidado con las **funciones trigonométricas inversas**:



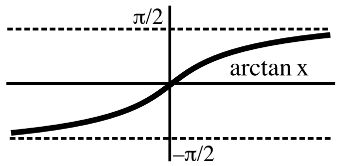
Para definirlas debemos restringir los intervalos de definición para que $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\tan x$ sean inyectivas:

$\operatorname{arc\,sen} x$ $\left(\text{dom} = [-1, 1],\ \text{im} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$
es la inversa de $\operatorname{sen} x$ restringida a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\arccos x$ $\left(\text{dom} = [-1, 1],\ \text{im}\,[0, \pi]\right)$
es la inversa de $\cos x$ restringida a $[0, \pi]$.

(El arco seno de x no es simplemente 'el ángulo cuyo seno vale x'; infinitos x tienen el mismo seno).

$\arctan x$ $\left[\text{dom} = \mathbf{R},\ \text{im} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right]$
es la inversa de $\tan x$ definida en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Ej. $\arctan(\tan \frac{3\pi}{4}) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

[La función $\arctan x$ aparece muchas veces en el cálculo, por ejemplo hallando primitivas].

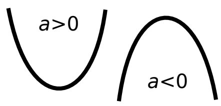
Cónicas

Son las curvas descritas por expresiones que contienen a lo más potencias de orden 2 en x ó y:

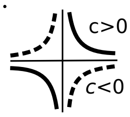
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$$

No nos ocupamos de todas las posibilidades que se pueden dar en general y de cómo distinguir entre ellas (es más típico de cursos de álgebra, digamos aquí simplemente que en su clasificación es muy importante el signo de $B^2 - 4AC$). Nos limitamos a identificar las más simples.

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$, son **parábolas** con el eje vertical. El signo de a indica si es de forma $\smile$ o $\frown$, y como $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, está claro (sin usar derivadas) que su vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.



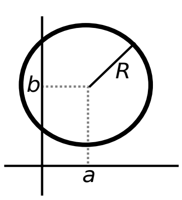
Son también sencillas las **hipérbolas** $\boxed{xy = c}$ $\left(\text{o sea, } y = \frac{c}{x}\right)$:

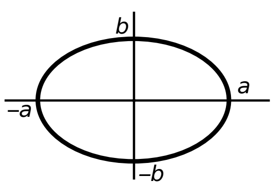


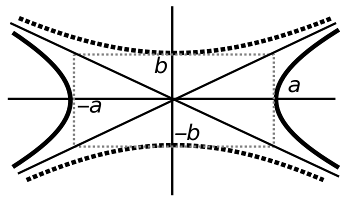
Las siguientes cónicas no definirán una única función, sino dos:

$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$, $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$.

(circunferencia) **(elipse)** **(hipérbolas)**







La elipse, por ejemplo, define las funciones $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$.

[Aunque estas curvas son las que se obtienen al cortar un cono con diferentes planos (origen de la palabra 'cónica'), en la expresión general se pueden esconder objetos más sencillos. Por ejemplo, $y^2 - 3xy + 2x^2 = 0$ representa dos rectas ($y = x$ e $y = 2x$), $x^2 + y^2 = -1$ es el conjunto vacío $\varnothing$ ...].

1.5. El conjunto $\mathbf{C}$. Operaciones con complejos

No hay ningún número real x tal que $x^2+1=0$. Para que esa ecuación tenga solución es necesario introducir el número imaginario i : $\mathrm{i}^2=-1$. Veamos algunas propiedades del conjunto de los números complejos $\mathbf{C}=\{z=a+\mathrm{i}b:\, a,b\in\mathbf{R}\}$.

En $\mathbf{C}$ están definidas las operaciones suma y producto:

$$\boxed{(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)=(a+c)+\mathrm{i}(b+d)\ ,\ \ (a+\mathrm{i}b)\cdot(c+\mathrm{i}d)=(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)\ .}$$

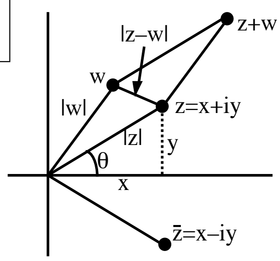
Con estas dos operaciones $\mathbf{C}$ es un **cuerpo**: $+$ y $\cdot$ son asociativas y conmutativas, existe la distributiva, existen elementos neutros ($z+0=z$ y $z\cdot 1=z$) e inversos:

$$\forall z=a+\mathrm{i}b\ \exists -z=-a-\mathrm{i}b \text{ tal que } z+(-z)=0\,,$$
$$\forall z\neq 0\ \exists z^{-1}=\tfrac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\tfrac{b}{a^2+b^2} \text{ tal que } z\cdot z^{-1}=1\,.$$

Se define diferencia y cociente de complejos como: $z-w=z+(-w)$, $\frac{z}{w}=z\cdot w^{-1}$ si $w\neq 0$.

[No se puede, a diferencia de $\mathbf{R}$, definir un orden en $\mathbf{C}$ compatible con las operaciones anteriores].

Si $z=x+\mathrm{i}y$, su parte real $\mathrm{Re}(z)=x$, su parte imaginaria $\mathrm{Im}(z)=y$, su **conjugado** es $\bar{z}\equiv z^*=x-\mathrm{i}y$ y su **módulo** es $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.



Representando cada complejo $z=x+\mathrm{i}y$ como el punto del plano de coordenadas (x,y) , es fácil ver que el complejo suma $z+w$ está en el vértice opuesto al origen de un paralelogramo dos de cuyos lados son los segmentos que unen z y w con $O=(0,0)$. El conjugado $\bar{z}$ es la reflexión de z respecto de $y=0$. El módulo es la distancia desde z al origen. La distancia de z a w viene dada por $|z-w|$.

Algunas propiedades de demostración inmediata son:

$$\boxed{\bar{\bar{z}}=z\,,\ \overline{z+w}=\bar{z}+\overline{w}\,,\ \overline{-z}=-\bar{z}\,,\ \overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\overline{w}\,,\ \overline{z^{-1}}=(\bar{z})^{-1}\,,\ |z|^2=z\cdot\bar{z}\,,\ |z\cdot w|=|z|\cdot|w|\,.}$$

Más difícil es probar la desigualdad triangular (geométricamente es clara): $\boxed{|z+w|\leq|z|+|w|}$.

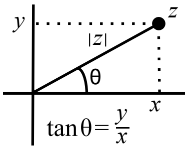
Ej. Calcular $\left|\frac{\mathrm{i}(3-4\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}\right|$. Basta hacer uso de las propiedades del módulo: $|\ \ |=\frac{|\mathrm{i}||3-4\mathrm{i}|}{|2+\mathrm{i}|}=\frac{1\cdot 5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

Vamos ahora a hacerlo dando un rodeo, calculando el complejo que está dentro del módulo:

$\frac{\mathrm{i}(3+4\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}\underset{\uparrow}{=}\frac{(3\mathrm{i}-4)(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{3-8+6\mathrm{i}+4\mathrm{i}}{5}=-1+2\mathrm{i}$, cuyo módulo es, desde luego, $\sqrt{5}$.

multipicando por el conjugado del denominador

Un z se puede escribir en coordenadas **polares**: $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, con $r=|z|$ y θ el ángulo que forma el segmento Oz con el eje x positivo. El θ no es único: todos los $\theta+2k\pi$ nos dan el mismo z . Cualquiera de ellos se llama **argumento** de z . El **argumento principal** es el θ con $0\leq\theta<2\pi$. El θ se halla utilizando que $\tan\theta=\frac{y}{x}$ y mirando el cuadrante en que está el z .



Más adelante veremos que si θ es cualquier real: $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$ (complejo de módulo 1). Esto nos proporciona una forma más corta de expresar un complejo en polares:

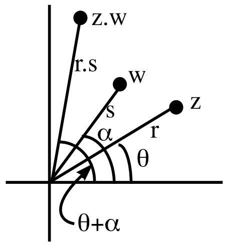
$$\boxed{z=re^{\mathrm{i}\theta}}\ ,\ \text{donde } r=|z| \text{ y } \theta \text{ es un argumento de } z\,.$$

Ej. Para $z=-2+2\mathrm{i}$ es $|z|=2\sqrt{2}$. Como $\tan\theta=-1$ y z está en el segundo cuadrante, se puede escribir z (con el argumento principal) en la forma $z=2\sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right]=2\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}3\pi/4}$

$\big($ó con otro θ : $z=2\sqrt{2}\left[\cos\frac{11\pi}{4}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{4}\right]=2\sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}11\pi/4}\big)$.

Las formas polares son muy útiles para efectuar productos, potencias y raíces:

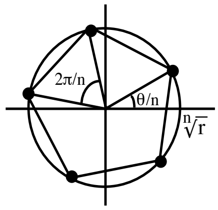
$$\boxed{\begin{gathered}\text{Si } z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\ ,\ w=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\ \text{ entonces:}\\ z\cdot w=rs\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)}=rs\,[\cos(\theta+\alpha)+\mathrm{i}\ \mathrm{sen}(\theta+\alpha)]\ ,\\ \tfrac{z}{w}=\tfrac{r}{s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\alpha)}=\tfrac{r}{s}\,[\cos(\theta-\alpha)+\mathrm{i}\ \mathrm{sen}(\theta-\alpha)]\ ,\\ z^n=r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,n\theta)\,.\end{gathered}}$$



[Las dos primeras son inmediatas y la de z^n se prueba por inducción].

Todo $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq 0$ tiene exactamente n raíces n-simas distintas dadas por

$$\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}\ \text{ con }\ \phi=\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\ ,\ k=0,\dots,n-1}\ .$$



[basta elevar a n y observar que si $k=n,n+1,\dots$ se repiten los ángulos; vemos que las n raíces están en los vértices de un polígono regular].

Hagamos una serie de operaciones de repaso de la aritmética compleja:

Ej. Expresar el número complejo $\boxed{z=\overline{1-\mathrm{i}+\frac{1}{1+\mathrm{i}}}}$, como $x+\mathrm{i}y$ y como $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ y hallar $\boxed{|z^2|}$.

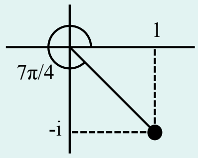
$z=\overline{1-\mathrm{i}+\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})}=\boxed{\frac{3}{2}+\mathrm{i}\,\frac{3}{2}}$. $|z|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}$, $\tan\theta=1$ y primer cuadrante $\to$ $\boxed{z=\frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}}$.

$z^2=\frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/2}=\frac{9}{2}\,\mathrm{i}$ $\big($o bien $z^2=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\,\mathrm{i}^2+\frac{9}{2}\,\mathrm{i}\big)$. $|z^2|=\big|\frac{9}{2}\,\mathrm{i}\big|=\boxed{\frac{9}{2}}$ $\big($debía ser $|z^2|=|z\cdot z|=|z||z|\big)$.

Ej. Calcular $\boxed{w=(1-\mathrm{i})^6}$, directamente y en polares.

Escribiendo una fila más del triángulo de Tartaglia de 1.2 o hallando $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}$, $\binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}$:

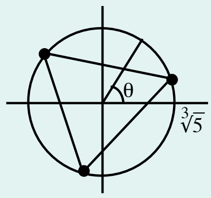
$$\begin{aligned}w&=1+6(-\mathrm{i})+15(-\mathrm{i})^2+20(-\mathrm{i})^3+15(-\mathrm{i})^4+6(-\mathrm{i})^5+(-\mathrm{i})^6\\ &=1-6\mathrm{i}-15+20\mathrm{i}+15-6\mathrm{i}-1=8\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$



$r=\sqrt{2}$, $\tan\theta=-1$ $\to$ $\theta=\frac{7\pi}{4}$ $\big($ó $\theta=-\frac{\pi}{4}$, es del cuarto cuadrante$\big)$

$$\to\ \big(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,7\pi/4}\big)^6=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,21\pi/2}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/2}=8\mathrm{i}\,.$$

Ej. Hallar las **raíces cúbicas** de $\boxed{z=\frac{7+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}}$.



Podemos hacer: $z=\frac{(7+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{6+8\mathrm{i}}{2}=3+4\mathrm{i}=5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(4/3)}$. O bien,

$7+\mathrm{i}=5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(1/7)}$, $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}7\pi/4}\to z=5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,[\arctan(1/7)+\pi/4]}$

$\big[$las dos expresiones de z coinciden: $\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$ en $\big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)\big]$.

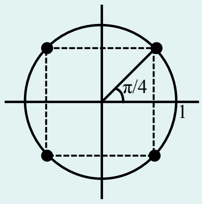
Por tanto, $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ donde $\phi=\frac{\arctan(4/3)+2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$. Con calculadora:

$\theta=\arctan\frac{4}{3}\approx 0.927$; $\phi\approx 0.309,\ 2.403,\ 4.498$; $z\approx 1.63+0.52\,\mathrm{i}\,,\ -1.26+1.15\,\mathrm{i}\,,\ -0.36-1.67\,\mathrm{i}\,.$

Ej. Escribir el polinomio real $\boxed{x^4+1}$ como producto de polinomios reales de segundo grado.

Las raíces del polinomio son las cuatro raíces de $-1=1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$,

que son $\sqrt[4]{1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ con $\phi=\frac{\pi}{4}\,,\ \frac{3\pi}{4}\,,\ \frac{5\pi}{4}\,,\ \frac{7\pi}{4}$.



Es decir, $z_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,[1\pm\mathrm{i}]$, $z_{3,4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,[-1\pm\mathrm{i}]$, complejos conjugados dos a dos, como debían (a lo mismo llegaríamos buscando $z=a+\mathrm{i}b$ con $z^2=\pm\mathrm{i}$, pero sería mucho más largo). Así pues:

$$x^4+1=\big[(x-z_1)(x-z_2)\big]\big[(x-z_3)(x-z_4)\big]=\big[x^2-(z_1+z_2)x+z_1z_2\big]\big[x^2-(z_3+z_4)x+z_3z_4\big]$$

$$\to\ \boxed{x^4+1=\big[x^2-\sqrt{2}x+1\big]\big[x^2+\sqrt{2}x+1\big]}$$

Ej. Hallar las raíces de la ecuación $\boxed{z^2 - \mathrm{i}z - 1 - \mathrm{i} = 0}$ $\to$ $z = \frac{1}{2}\big[\mathrm{i} \pm \sqrt{3+4\mathrm{i}}\,\big]$.

$\big[$La fórmula $z = \frac{1}{2a}\big[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\big]$ sigue siendo válida interpretando $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ como las dos raíces del complejo (no tiene sentido decir 'la raíz positiva' de un complejo)$\big]$.

Trabajemos en cartesianas. Buscamos $w = x+\mathrm{i}y$ tal que $w^2 = x^2-y^2+2xy\mathrm{i} = 3+4\mathrm{i}$.

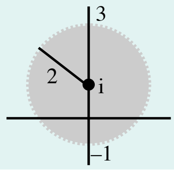
Debe ser $\begin{array}{l} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \ \to \ y=\frac{2}{x} \nearrow \end{array}$ $x^4-3x^2-4 = (x^2-4)(x^2+1) = 0$

Hay dos soluciones reales de este sistema: $x=2, y=1$ y $x=-2, y=-1$.

$\big[$En polares se obtendría $w = \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi = \frac{\arctan(4/3)}{2} + k\pi$, $k=0,1$, que con una calculadora se ve que coinciden con $\pm(2+\mathrm{i})\,\big]$.

Las raíces buscadas son: $z = \frac{1}{2}\big[\mathrm{i}+(2+\mathrm{i})\big] = \boxed{1+\mathrm{i}}$ y $z = \frac{1}{2}\big[\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})\big] = \boxed{-1}$.

Ej. Representar en el plano complejo los z que cumplen $\boxed{|z-\mathrm{i}|<2}$.



Si $z = x+\mathrm{i}y$, esto equivale a $|x+\mathrm{i}(y-1)| < 2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 < 4$.

Los z buscados son los del círculo sin borde de centro $(0,1)$ y radio 2 (claro, los z que distan del complejo i menos que 2).

Ej. Expresar $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ utilizando potencias de complejos.

$$\cos 3\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen} 3\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]^3 = [\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta]^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + \mathrm{i}\,[3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta} \quad \text{y} \quad \boxed{\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta}$$

[sale usando sólo propiedades reales de senos y cosenos de sumas, pero es bastante más largo].

En la sección 4.6 definiremos las funciones complejas $f(z) = \mathrm{e}^z$, $f(z) = \operatorname{sen} z$ y $f(z) = \cos z$ a partir de series de potencias $\big[$y probaremos la igualdad $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta\,\big]$.

Pero ya podríamos definir así para cualquier complejo z: $\boxed{\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\operatorname{sen} y)}$.