2. Sucesiones, límites y continuidad en R

2.1 Sucesiones de números reales

$\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$ es una **sucesión**: a cada natural n corresponde un real a_n.

Matemáticamente, como una función asigna a cada elemento de un conjunto un único elemento de otro:

Def. $\boxed{\text{Una sucesión de números reales es una función de } \mathbf{N} \text{ en } \mathbf{R}}$ $\quad a: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $\; n \to a(n) \equiv a_n$

Una sucesión tiende hacia a si en todo entorno de a, por pequeño que sea, están casi todos los términos de la sucesión (todos salvo un número finito). Por ejemplo $\{\frac{1}{n}\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$ tiende hacia 0 ya que fijado un entorno cualquiera del origen todos los términos de la sucesión a partir de uno dado acaban metiéndose dentro. Precisando:

Def. $\{a_n\}$ **tiene por límite** a (o **tiende** hacia a o **converge** hacia a) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo natural $n \geq N$ es $|a_n - a| < \varepsilon$. Se representa por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ó $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Si una sucesión $\{a_n\}$ no es convergente se dice **divergente**.

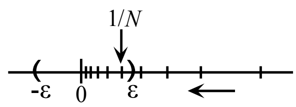
Esta definición es la primera de las definiciones rigurosas de límite de aspecto similar que veremos en los apuntes. Hagamos unas cuantas observaciones sobre ella:

Decir que $|a_n - a| < \varepsilon$ es equivalente a que $a_n \in B(a, \varepsilon)$. Para **todo** ε hemos de encontrar un N tal que $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, ...$ estén dentro del entorno.

El N no es único: si los $a_n \in B(a, \varepsilon)$ para $n \geq N$, también están dentro para $n \geq N^*$ si $N^* \geq N$. No se trata de hallar el menor N, basta con dar uno para el que se cumpla.

En sucesiones escribiremos simplemente $a_n \to a$, pues sólo tiene sentido el límite para $n \to \infty$ (en funciones, la x podrá tender a 0, a ∞, a $-\infty$,... y sí habrá que precisarlo).

Ej. Formalicemos que $\frac{1}{n} \to 0$: dado cualquier ε (por pequeño que sea) existe N tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Por tanto, si $n \geq N$, $|\frac{1}{n} - 0| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.
Se ve que N depende del ε dado (si $\varepsilon = 0.1$, basta tomar $N = 11$, pero si $\varepsilon = 0.001$ debemos tomar $N = 1001$ o un número mayor).



Ej. La sucesión $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, ...$ diverge, pues está claro que no todos sus términos a partir de un N están en todo entorno de -1, ni de 1, ni de cualquier otro real. Aunque haya infinitos términos en cualquier entorno de 1 (por ejemplo) otros infinitos se escapan. Si $\varepsilon = 2$ todos los a_n pertenecen al entorno $B(1, 2)$, pero esto debe ocurrir $\forall \varepsilon$ y no sólo para ε grandes.

El cálculo de límites con ε y N es, en general, complicado. Pero, gracias a los teoremas que veremos (demostrados utilizando los ε), sólo en contadas ocasiones y para sucesiones muy extrañas deberemos en el futuro acudir a la definición. Para manejar ésta (en ejemplos y en teoremas) se suele partir de lo que uno quiere hacer pequeño ($|a_n - a|$) y, tras algunos $<$ ó $\leq$ (la desigualdad triangular suele aparecer), se llega a una expresión de la que sea ya fácil decir para qué n es $< \varepsilon$:

Ej. Probemos sólo con la definición (pronto será innecesaria) que $\{a_n\} = \left\{\frac{2\sqrt{n}+5^{-n}}{\sqrt{n}+1}\right\} \to 2$.

$$\left|\frac{2\sqrt{n}+5^{-n}}{\sqrt{n}+1} - 2\right| = \frac{|5^{-n}-2|}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{5^{-n}+2}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{9}{\varepsilon^2}$$

Por tanto, dado cualquier ε, si N es un natural $> 9/\varepsilon^2$, para $n \geq N$ se cumple que $|a_n - 2| < \varepsilon$.
[No es la única forma de precisar el N, podríamos, por ejemplo, no haber quitado el 1 del denominador y habríamos llegado a otro N; lo que, desde luego, no funcionaría sería empezar haciendo $|a_n - 2| \leq |a_n| + 2$, pues no habría forma de hacer esto menor que cualquier ε].

Teorema: $\boxed{\{a_n\} \text{ convergente } \Rightarrow \{a_n\} \text{ acotada.}}$

Sea $\varepsilon=1$ (por fijar un número); sabemos que $\exists N$ tal que si $n\geq N \Rightarrow |a_n|-|a|\leq|a_n-a|<1$ $\Rightarrow |a_n|\leq|a|+1$. Por tanto, llamando $M=\text{máx}\{|a_1|,\dots,|a_{N-1}|,|a|+1\}$ se tiene $|a_n|\leq M \ \forall n$.

No es cierto que toda $\{a_n\}$ acotada sea convergente. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ es acotada y diverge. Lo que sí se deduce del teorema (no $q \Rightarrow$ no p) es que **diverge seguro una sucesión no acotada**.

Definimos ahora un par de tipos importantes de sucesiones **divergentes** (y no acotadas):

Def. $\{a_n\}$ diverge hacia $+\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty\right)$ si $\forall K\ \exists N\ /\ \forall n\geq N$ se cumple $a_n\geq K$.
$\{a_n\}$ diverge hacia $-\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty\right)$ si $\forall K\ \exists N\ /\ \forall n\geq N$ se cumple $a_n\leq K$.

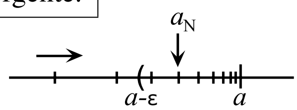
[$+\infty$ y $-\infty$ son sólo símbolos, no números; estas sucesiones no convergen a ningún número real].

Ej. $\frac{n^2+1}{2n}\to\infty$, pues $\forall K$, $\frac{n^2+1}{2n}\geq\frac{n}{2}>K$ si $n\geq N$ con N cualquier natural $\geq 2K$.
$-1,0,-2,0,-3,0,-4,\dots$ no diverge hacia $-\infty$. A pesar de contener términos tan pequeños como queramos, no es cierto que dado **cualquier** K queden a su izquierda todos los términos a partir de un N (para los $K<0$ es evidente que es falso). Claramente, tampoco tiende a 0 .

Def. $\{a_n\}$ es **creciente** si $a_n\leq a_{n+1}\ \forall n$. $\{a_n\}$ es **decreciente** si $a_n\geq a_{n+1}\ \forall n$.
Cualquiera de las dos se dice **monótona**.

Ej. $13,23,33,43,53,\dots$ (no acotada, divergente hacia $+\infty$) es creciente.
$1,1,1/2,1/2,1/3,1/3,1/4,1/4,\dots$ es decreciente (y tiende hacia 0).

Teorema: $\{a_n\}$ creciente y acotada superiormente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente.
$\{a_n\}$ decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente.



El axioma del extremo superior asegura que $\{a_n\}$ tiene supremo al que llamamos a . Veamos que a es el límite de $\{a_n\}$:
Sea $\varepsilon>0$, $\exists N$ tal que $a_N>a-\varepsilon$ (si no, habría cotas menores que a). Por tanto, si $n\geq N$, $a\geq a_n\geq a_N>a-\varepsilon \Rightarrow |a_n-a|=a-a_n<\varepsilon$. [Análoga la otra].

Dada una sucesión $\{a_n\}$, se llama **subsucesión** de $\{a_n\}$ a cualquier sucesión formada escogiendo ordenadamente infinitos términos de $\{a_n\}$, es decir:

Def. $\{a_{n_j}\}=a_{n_1},a_{n_2},\cdots$ con los $n_j\in\mathbf{N}$ tales que $n_1<n_2<\cdots$ es subsucesión de $\{a_n\}$.

Ej. $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}\dots$, $1,\frac{1}{11},\frac{1}{111},\frac{1}{1111},\frac{1}{11111}\dots$ ó $\frac{1}{25},\frac{1}{26},\frac{1}{27},\frac{1}{28},\dots$ son subsucesiones de $\{\frac{1}{n}\}$.
No lo es, en cambio, $\frac{1}{2},1,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\dots$, formada con elementos desordenados de $\{\frac{1}{n}\}$.

Está claro que si $\{a_n\}\to a$ también cualquier subsucesión suya $\{a_{n_j}\}\to a$. Por tanto, **una forma de probar que una sucesión no tiene límite es encontrar dos subsucesiones suyas que converjan hacia límites distintos o alguna subsucesión que no converja**.

[A las subsucesiones de las sucesiones divergentes pueden pasarle, sin embargo, todo tipo de cosas. Por ejemplo, $1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,\dots$ tiene subsucesiones convergentes a infinitos límites distintos (a cada número natural), otras que divergen a $+\infty$ y otras que no tienen límite ni finito ni infinito; $-1,0,-2,0,-3,0,-4,\dots$ tiene subsucesiones que tienden a 0 y otras a $-\infty$; $1,2,3,4,\dots$ no tiene subsucesiones convergentes... Si $\{a_n\}$ es acotada veremos que sí podemos sacar alguna conclusión].

Con los siguientes teoremas podremos calcular un montón de límites de sucesiones sin usar ε y N (sólo los más sencillos, otros exigen técnicas de límites de funciones y habrá que esperar).

Teorema: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \{a_n\}\to a \text{ y } \{b_n\}\to b \text{ entonces:}\\ \{a_n+b_n\}\to a+b\,,\ \{a_n-b_n\}\to a-b\,,\ \{a_nb_n\}\to ab\,, \text{ y si } b\neq 0\,,\ \{\frac{a_n}{b_n}\}\to\frac{a}{b}\,.\end{array}}$

+) [casi igual −)]. Dado ε, $\exists N_a/\ n\geq N_a \Rightarrow |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ y $\exists N_b/\ n\geq N_b \Rightarrow |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, $|a_n+b_n-(a+b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon$, si $n\geq N=\text{máx}\{N_a,N_b\}$.

·) $|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-ab_n+ab_n-ab|\leq|a_n-a||b_n|+|b_n-b||a|$. Hagamos pequeño esto:

$\{b_n\}\to b \Rightarrow$ dado ε, $\exists N_b$ tal que $n\geq N_b\Rightarrow|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2|a|}$, suponiendo $a\neq 0$.

$\{b_n\}$ convergente $\Rightarrow$ acotada: $\exists B$ con $|b_n|<B$; como $\{a_n\}\to a$, $\exists N_a\,/\,n\geq N_a \Rightarrow |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2B}$.

Por tanto: $|a_nb_n-ab|<\frac{\varepsilon B}{2B}+\frac{\varepsilon|a|}{2|a|}=\varepsilon$. $\big($Si $a=0$, $|b_n-b||a|=0<\frac{\varepsilon}{2}\big)$.

/) $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|ba_n-ab+ab-ab_n|}{|bb_n|}<\frac{K\varepsilon}{2K}+\frac{|a||b|K\varepsilon}{2|a||b|K}=\varepsilon$, si $n\geq N=\text{máx}\{N_1,N_2,N_3\}$ donde:

como $\{b_n\}\to b\neq 0$, $\exists N_1\ /\ n\geq N_1 \Rightarrow |b_n|\geq K>0$; como $\{b_n\}\to b$, $\exists N_2\ /\ n\geq N_2$

$\Rightarrow |b_n-b|<\frac{|b|K\varepsilon}{2|a|}$; y como $\{a_n\}\to a$, $\exists N_3\ /\ n\geq N_3 \Rightarrow |a_n-a|<\frac{K\varepsilon}{2}$.

Las operaciones que involucran las sucesiones que tienden a $+\infty$ o $-\infty$ son sólo un poco más complicadas y vienen a formalizar la forma intuitiva en que se trabaja con los infinitos:

Teorema: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Sean } \{c_n\}\to 0\,,\ \{p_n\}\to p>0\,,\ \{q_n\}\to q<0\,,\ \{a_n\} \text{ acotada}\,,\ \{i_n\}\to\infty\,.\\ \text{Entonces: } \{a_n+i_n\}\to\infty\,,\ \{a_n-i_n\}\to-\infty\,,\ \{c_n a_n\}\to 0\,,\ \{a_n/i_n\}\to 0\,,\\ \qquad \{p_n i_n\}\to\infty\,,\ \{q_n i_n\}\to-\infty\,,\ \{i_n/p_n\}\to\infty\,,\ \{i_n/q_n\}\to-\infty\,,\ \dots\end{array}}$

[como $\{c_n\}$, $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ están acotadas, los resultados con $\{a_n\}$ son también ciertos con ellas].

Probemos para cansarnos poco sólo un par de ellas, por ejemplo la primera y la última:

Sea $|a_n|\leq A$, $\forall K$, $a_n+i_n\geq i_n-A\geq K$, pues $i_n\geq K+A$, si n es suficientemente grande.

Si n grande $i_n>0$ y $\exists Q/Q<q_n<0 \Rightarrow \forall K$, $i_n/q_n<i_n/Q<K$, pues $i_n>QK$ si n grande.

Podemos abreviar este teorema (¡pero recordando que es sólo una **notación**!) escribiendo:

$\boxed{\text{“acot}\pm\infty=\pm\infty\text{”},\ \text{“}0\cdot\text{acot}=0\text{”},\ \text{“}\frac{\text{acot}}{\infty}=0\text{”},\ \text{“}(\pm 1)\cdot\infty=\pm\infty\text{”},\ \text{“}\frac{\infty}{\pm 1}=\pm\infty\text{”},\dots}$

También es cierto: $\boxed{\text{“}\infty+\infty=\infty\text{"},\ \text{“}\infty\cdot(\pm\infty)=\pm\infty\text{"},\ \text{“}(-1)\cdot(\pm\infty)=\mp\infty\text{"},\dots}$

Es tentador escribir “ $\frac{1}{0}=\infty$ ", pero es **falso** en general $\big[\{(-1)^n/n\}\to 0$ y $\{(-1)^n n\}$ no tiene límite$\big]$. Sí es cierto que: $\boxed{\{p_n\}\to p>0\,,\ \{c_n\}\to 0 \text{ y } c_n>0 \Rightarrow \{p_n/c_n\}\to\infty}$.

Los límites con **potencias** se deducirán de los límites de funciones, pues probaremos teoremas que realacionarán unos y otros. Por ahora, admitimos:

Teorema: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Sean } \{b_n\}\to b\,,\ \{p_n\}\to p>0\,,\ \{q_n\}\to q<0\,,\ \{i_n\}\to\infty\,. \text{ Entonces:}\\ \{p_n^{b_n}\}\to p^b\,,\ \{i_n^{p_n}\}\to\infty\,,\ \{i_n^{q_n}\}\to 0\,,\ \{p_n^{i_n}\}\to\begin{cases}\infty \text{ si } p>1\\ 0 \text{ si } 0<p<1\end{cases}.\end{array}}$

[Por ejemplo, el primero será consecuencia de la continuidad de $f(x)^{g(x)}$ si $f>0$ y f,g continuas].

Podríamos resumir: $\boxed{\text{“}\infty^1=\infty\text{”},\ \text{“}\infty^{-1}=0\text{”},\ \text{“}2^\infty=\infty\text{” ó “}(1/2)^\infty=0\text{”}}$.

Obsérvese que en ninguna la base es negativa [no está $(-\infty)^1$ ni $(-2)^\infty$]: las potencias reales o racionales pueden no existir [la sucesión $\{(-2)^{1/2n}\}$, por ejemplo, no existe para ningún n].

A pesar de tanto teorema aún quedan las llamadas **indeterminaciones** que resumimos:

$$\boxed{\infty-\infty \ , \ 0\cdot\infty \ , \ \tfrac{0}{0} \ , \ \tfrac{\infty}{\infty} \ , \ 1^{\infty} \ , \ 0^0 \ , \ \infty^0}$$

Hay que leerlas en términos de sucesiones. Según la primera, si dos sucesiones $\to\infty$ no se puede, en principio, decir hacia qué tiende su diferencia $\big($por ejemplo: $n-n^2\to-\infty$, $n-n\to 0$ y $n^2-n\to\infty\big)$. Para resolver algunas bastará un truco algebraico como los de los ejemplos siguientes, pero en otros casos se necesitará L'Hôpital o Taylor para hallar los límites. Observemos que las tres de potencias (por la definición general de p^b) son en esencia del tipo $0\cdot\infty$: $e^{\log 1\cdot\infty}$, $e^{\log 0\cdot 0}$, $e^{\log\infty\cdot 0}$.

Ej. Gracias a todo el trabajo con los ε ahora ya casi nunca habrá que acudir a la definición.

$$\frac{n^2+(-1)^n}{2n-3n^3}=\frac{1/n+(-1)^n/n^3}{2/n^2-3}\to\frac{0+0}{3+0}=0\ ,\qquad \frac{n^3+(-1)^n}{2n-3n^3}=\frac{1+(-1)^n/n^3}{2/n^2-3}\to\frac{1+0}{0-3}=-\frac{1}{3}\ ,$$

$$\frac{n^4+(-1)^n}{2n-3n^3}=\frac{n+(-1)^n/n^3}{2/n^2-3}\to\text{“}\frac{\infty+0}{0-3}=-\infty\text{”}\ .$$

[Las tres son indeterminaciones y hemos reescrito la sucesión dividiendo por la potencia mayor del denominador. Y hemos utilizado varios teoremas: $n^3=n\cdot(n\cdot n)\to\infty$ porque el producto de dos sucesiones que tienden a ∞ tiende a ∞; $(-1)^n/n^3\to 0$ pues “acotado/$\infty=0$"; $1+(-1)^n/n^3\to 1$ porque suma de sucesiones tiende a la suma de los límites; límites de cocientes, ...].

[No se divide por la mayor potencia del numerador para evitar la posible aparición de expresiones del tipo “1/0” que son fuente de errores; otra forma válida de actuar es sacar factor común la potencia dominante del numerador y denominador].

Ej. $a_n=\dfrac{\sqrt{n^3-1}-n}{5n^2-7\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}}-\frac{1}{n}}{5-\frac{7}{n\sqrt{n}}}\to\dfrac{0-0}{5-0}=0$, o bien, $a_n=\dfrac{n^{3/2}}{n^2}\,\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{5-\frac{7}{n\sqrt{n}}}\to 0\cdot\dfrac{1}{5}=0$.

$\big[$Aquí hemos utilizado además que $\sqrt{a_n}\to\sqrt{a}$ y “$\sqrt{\infty}=\infty$”, casos particulares de los límites de potencias vistos (y que no son difíciles de probar directamente)$\big]$.

Como se ve, **para calcular límites de cocientes de polinomios o raíces de ellos basta comparar los términos con la máxima potencia** de numerador y denominador (y se pueden hacer a ojo: si el numerador es más pequeño, el cociente $\to 0$, si ambos son del mismo orden aparecen los coeficientes de los términos más gordos y si el numerador es mayor el límite será + o – infinito).

Ej. $(-1)^n\,\dfrac{3n+\cos n}{n^2+ne^{-n}}=(-1)^n\,\dfrac{3+n^{-1}\cos n}{n+e^{-n}}\to 0$ $\left[\text{“acot}\cdot 0\text{”, pues } \begin{array}{c}\text{numerador}\to 3+0=3\\ \text{denominador}\to\infty+0=\infty\end{array}\right]$.

Ej. $(-1)^{n+1}\dfrac{13n}{n+1}$ diverge, ya que tiene subsucesiones con distintos límites $\left[\begin{array}{l}\text{pares}\to -13\\ \text{impares}\to 13\end{array}\right]$.

Ej. $\sqrt{n^3-1}-2n=n\big[\sqrt{n-n^{-2}}-2\big]\to\infty$ $\big[\text{“}\infty\cdot(\infty-2)=\infty\text{"}\big]$. $\big($O sacando factor común $n^{3/2}\big)$.

$\sqrt{n+\arctan n}-n=n\Big[\sqrt{\tfrac{1}{n}+\tfrac{\arctan n}{n^2}}-1\Big]\to-\infty$ $\big[\text{“}\infty\cdot(\sqrt{0}-1)=-\infty\text{"},\ \arctan n$ está acotado$\big]$.

$\big[$Hemos sacado factor común (lo habitual para $\infty-\infty$) para dejar claro qué término mandaba$\big]$.

Ej. $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{[\sqrt{n}-\sqrt{n-1}][\sqrt{n}+\sqrt{n-1}]}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\to 0$.

[Los ∞ eran del mismo orden y hemos tenido que racionalizar; sacar factor común daba $\infty\cdot 0$].

Ej. $\dfrac{n^4}{(n-7)!}=\dfrac{n^4}{(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}\,\dfrac{1}{(n-11)!}\to 1\cdot 0=0$. [El factorial crece muy muy deprisa].

Ej. $\dfrac{1+\cdots+n}{n^2+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}\to\dfrac{1}{2}$. [El número de sumandos crece con n; no es cierto que como $n/n^2\to 0$ nuestra sucesión también lo haga].

Además de los límites de potencias, otros serán consecuencia de los de funciones [se verá que si f es continua $\lim f(a_n)=f(\lim a_n)$]. Por ejemplo, de la continuidad de las funciones se infiere:

$$\boxed{\{a_n\}\to a \;\Rightarrow\; \{\cos a_n\}\to\cos a\,,\ \{\operatorname{sen} a_n\}\to\operatorname{sen} a\,,\ \{\log a_n\}\to\log a\ \ (a_n>0)\,,\ldots}$$

Ej. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\cos 0=1$, pues $\frac{\sqrt{n}}{n+1}\to 0$; $\{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1}\}\to\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$; $\{\log\frac{n+5}{n}\}\to\log 1=0$.

Otro teorema que probaremos será: $\boxed{f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}L \;\Rightarrow\; f(n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}L}$.

Ej. $\dfrac{n\arctan n}{e^{1/n}-\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n}\arctan n}{\frac{e^{1/n}}{\sqrt{n}}-1}\to-\infty$ $\left[\frac{\infty\times(\pi/2)}{\frac{1}{\infty}-1}\right.$, pues $\arctan n\to\frac{\pi}{2}$, ya que $\arctan x\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}\Big]$.

[Si se divide por n se puede caer en el error de escribir "$\frac{1}{0}=\infty$"].

Admitimos estos otros límites indeterminados de sucesiones (por ahora sabemos calcular pocos) porque los necesitaremos en las series del capítulo 4 (exigen resultados de derivadas):

$$\boxed{\frac{\log n}{n^a}\to 0\,,\ \forall a>0\,;\qquad \sqrt[n]{n}\to 1\,;\qquad \big\{(1+c_n)^{1/c_n}\big\}\to e\,,\ \text{si }\{c_n\}\to 0\,.}$$

El primero ($\frac{\infty}{\infty}$), será consecuencia de que: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}\underset{\text{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=0$.

De él se obtiene el segundo (∞^0): $x^{1/x}=e^{\log x/x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}e^0=1$.

El último (1^∞) se deducirá del límite $(1+x)^{1/x}=e^{\log(1+x)/x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}e$.

En vez de utilizar integrales, se puede definir el número e como el límite de la sucesión creciente y acotada $(1+\frac{1}{n})^n$.

Hallemos los límites de alguna sucesión más utilizando los anteriores y/o resultados ya vistos:

Ej. $\dfrac{\sqrt[3]{n}+\log n}{\sqrt[3]{n+\log n}}=\dfrac{1+n^{-1/3}\log n}{\sqrt[3]{1+n^{-1}\log n}}\to 1$ [hemos admitido que $\log n$ es mucho menor que n^a, $a>0$].

Ej. $\big[(-1)^n+\sqrt{n}\,\big]^3\to\infty$ ["$(\text{acot}+\infty)^3=\infty^3=\infty$"] ; $n^{1/(n-1)}=(n^{1/n})^{\frac{n}{n-1}}\to 1^1=1$;

$n^{1/n-1}\to$ "$\infty^{-1}=0$" ; $(7n^3-1)^{1/n}=\big(n^{1/n}\big)^3\big(7-\frac{1}{n^3}\big)^{1/n}\to 1^3\cdot 7^0=1$.

[primero y tercero son fáciles; en los otros usamos $(a^b)^c=a^{bc}$ y el límite admitido $n^{1/n}\to 1$].

Ej. $\left[\dfrac{6n+1}{3n+2}\right]^{-n^2}\to$ "$2^{-\infty}=\frac{1}{2^\infty}=0$" ; $\left[\dfrac{3n^2+1}{3n^2+2}\right]^{-n^2}=\left[\Big(1-\frac{1}{3n^2+2}\Big)^{-(3n^2+2)}\right]^{\frac{n^2}{3n^2+2}}\to e^{1/3}$.

[El primero otra vez era sencillo, pero como $1^{-\infty}$ es indeterminado, en el segundo buscamos el número e identificando la $\{c_n\}\to 0$ y poniendo lo que sobra fuera del corchete].

Ej. $\dfrac{3^n+2^{n+1}}{3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1+2(2/3)^n}{3+(2/3)^n}\to\frac{1+0}{3+0}=\frac{1}{3}$ [dividiendo por la potencia que manda 3^n (o por 3^{n+1})].

Ej. Hallemos el límite de a^n para todos los $a\in\mathbf{R}$ sin hacer uso de teoremas no demostrados:

si $a>1$, $a=1+h$, con $h>0\Rightarrow a^n=(1+h)^n=1+nh+\cdots>nh>K$, $\forall K$ si n gordo $\Rightarrow a^n\to\infty$;

si $a=1$, $\{1^n\}=1,1,1,...\to 1$; si $a=0$, $\{0^n\}=0,0,0,...\to 0$ (no son indeterminaciones);

si $a\in(0,1)$, $1/a>1$, $a^n=\frac{1}{(1/a)^n}\to$ "$\frac{1}{\infty}=0$" ; si $a\in(-1,0)$, $a^n=(-1)^n(-a)^n\to$ "acot$\cdot 0=0$" ;

si $a=-1$, $\{(-1)^n\}=-1,1,-1,1,...$ diverge;

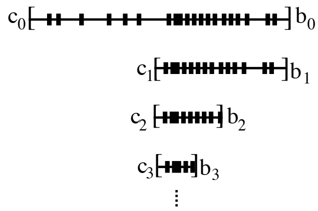
si $a<-1$, como $(-a)^n\to\infty$, $a^n=(-1)^n(-a)^n$ toma valores grandes positivos y negativos

$\Rightarrow$ diverge (ni siquiera tiende a $+\infty$ o $-\infty$).

Otros temas más teóricos de sucesiones

Damos para acabar definiciones y teoremas importantes en matemáticas avanzadas (las usaremos en las demostraciones de 2.3). El primer teorema es uno de esos típicos de matemáticas que aseguran que existe algo pero no dicen ni cómo es ese algo ni cómo buscarlo (y parecen no servir para nada):

Teorema: $\boxed{\text{Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.}}$



Como $\{a_n\}$ es acotada, existe un intervalo cerrado $[c_0,b_0]\supset\{a_n\}$. Dividimos $[c_0,b_0]$ en otros dos iguales. En uno de ellos, al menos, hay infinitos términos de $\{a_n\}$. Le llamamos $[c_1,b_1]$. Volvemos a dividir y a elegir $[c_2,b_2]$ con infinitos a_n ... Tenemos así una sucesión de intervalos $[c_k,b_k]$, cada uno con infinitos términos de la sucesión. La sucesión $c_0,c_1,\ldots$ es creciente y acotada superiormente por b_0 . La $b_0,b_1,\ldots$ es decreciente y acotada inferiormente por c_0 . Así ambas tienen límite y es intuitivamente claro que el límite de las dos es el mismo. Le llamamos a . Construimos una subsucesión de $\{a_n\}$ que tiende hacia a : elegimos $a_{n_0}\in[c_0,b_0]$, $a_{n_1}\in[c_1,b_1]$ con $n_1>n_0$ (podemos, pues hay infinitos a_n en $[c_{n_1},b_1]$),... No es difícil formalizar que $a_{n_j}\to a$.

Ej. $\{\operatorname{sen} n\}$ = 0.841.., 0.909.., 0.141.., –0.757.., –0.959.., –0.279.., 0.656.., 0.989.., 0.412.., . . .
[funciones trigonométricas siempre en radianes]; parece no tener límite y se prueba (es difícil) que es así. Como es acotada, tendrá subsucesiones convergentes, pero no sabemos cuáles.

La siguiente definición tampoco tendrá mucha utilidad práctica para nosotros:

Def. $\boxed{\{a_n\} \text{ es sucesión de } \textbf{Cauchy} \text{ si } \forall\varepsilon\ \exists N\in\mathbf{N} \text{ tal que } \forall n,m\geq N \text{ se tiene que } |a_n-a_m|<\varepsilon\,.}$

[la diferencia entre dos términos suficientemente altos es tan pequeña como queramos]

Parece claro que si todos $\{a_n\}$ se acercan a un límite se acercarán también entre sí, es decir, que toda sucesión convergente será de Cauchy. Lo contrario también es cierto para las sucesiones en **R**:

Teorema: $\boxed{\{a_n\} \text{ converge} \Leftrightarrow \{a_n\} \text{ es de Cauchy}}$

$\Rightarrow$) $\forall\varepsilon\ \exists N\,/\,k\geq N\ \Rightarrow\ |a_k-a|<\frac{\varepsilon}{2}$; así pues, si $n,m\geq N$, $|a_n-a_m|\leq|a_n-a|+|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$\Leftarrow$) Se puede probar que: $\{a_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ acotada (la demostración es parecida a la de las convergentes). Por lo tanto, existe subsucesión $\{a_{n_j}\}$ convergente hacia algún real a . Veamos que toda la sucesión $\{a_n\}$ tiende hacia ese a :

$\{a_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow$ $\exists N_1$ tal que $n,n_j\geq N_1\ \Rightarrow\ |a_n-a_{n_j}|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$\{a_{n_j}\}$ convergente $\Rightarrow$ $\exists N_2$ tal que $n_j\geq N_2\ \Rightarrow\ |a_{n_j}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto: $|a_n-a|\leq|a_n-a_{n_j}|+|a_{n_j}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ si $n\geq N=\text{máx}\{N_1,N_2\}$.

Un conjunto se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy converge hacia un elemento del propio conjunto. Acabamos de ver que **R** lo es. Pero, por ejemplo, **Q** no lo es: hay sucesiones de Cauchy en **Q** que no convergen a un racional (como la 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, ... obtenida añadiendo decimales de π , que es de Cauchy pero su límite se escapa de **Q**). Ello se debe a la inexistencia en **Q** del axioma del extremo superior (por esta misma razón, en **Q** hay sucesiones monótonas y acotadas sin límite en **Q** o sucesiones acotadas sin subsucesiones convergentes en **Q**). La definición de conjunto completo es importante en 'análisis funcional'.

El último resultado relaciona conjuntos cerrados y sucesiones y lo utilizaremos en demostraciones:

Teorema: $\boxed{\text{Si } \{a_n\}\to a \text{ y } \{a_n\}\subset A \text{ cerrado } \Rightarrow\ a\in A\,.}$

Pues el límite de una sucesión, si tiene infinitos términos distintos, es un punto de acumulación de ella, y, por tanto, también de A que es cerrado. Y si $\{a_n\}$ toma sólo un número finito de valores, debe ser $a_n=a$ a partir de un N, con lo que, claramente, $a\in A$.

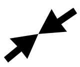
[Para abiertos es falso: hay $\{a_n\}\subset A$ abierto cuyo límite $\notin A$, como le ocurre a $\{\frac{1}{n}\}\subset(0,1)$].

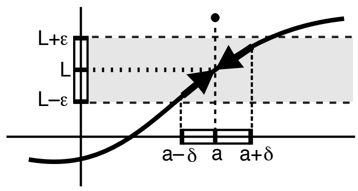
2.2 Límites de funciones y funciones continuas

Def. f **tiende a** L (o **tiene por límite** L) **cuando** x **tiende hacia** a si
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si x cumple $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.
Esto se representa: $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow} L$ o bien $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

$\big[$Es decir, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $x\in B^*(a,\delta)\ \Rightarrow\ f(x)\in B(L,\varepsilon)\ \big]$.

[En la definición está implícito que a es punto interior de $\operatorname{dom} f\cup\{a\}$ para que f tenga sentido en $B^*(a,\delta)$; también está claro que no importa nada el valor de f en a, ni siquiera si f está o no definida en el punto; esto si lo tendremos en cuenta para la definición de continuidad, pero el límite más importante del cálculo, la derivada, será de este tipo].

Gráficamente: Para todo  debe ser posible encontrar  tal que  esté dentro de la banda 



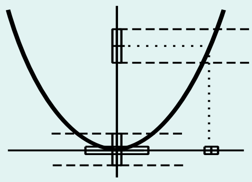
[evidentemente el δ no es único: si hemos encontrado un δ nos vale también cualquier δ^* más pequeño].

Ej. $f_1(x)=x^2$. Gráficamente parece claro que $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=a^2\ \forall a$. Comprobémoslo para $a=0$:

Dado cualquier ε debe ser $|x^2-0^2|=|x|^2<\varepsilon$ si $|x-0|=|x|$ es suficientemente pequeño. Tomando $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ se tiene que:

$$0<|x|<\delta\ \Rightarrow\ |x|^2<\varepsilon .$$

Para otros a no es fácil hallar el límite utilizando simplemente la definición, pero será un límite trivial cuando dispongamos de los teoremas que veremos. Lo mismo podemos decir del siguiente:



Ej. $f_2(x)=x+\sqrt{x}$. Comprobemos que $f_2(x)\underset{x\to 4}{\to} 6=f_2(4)$ [esto significará f_2 continua en $x=4$].

$$|f_2(x)-6|=|x-4+\sqrt{x}-2|\le|x-4|+|\sqrt{x}-2|=|x-4|+\tfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}\le|x-4|+\tfrac{|x-4|}{2}=\tfrac{3}{2}|x-4|$$

Por tanto, escogiendo $\delta=\frac{2}{3}\varepsilon$ (o cualquier δ más pequeño) garantizamos que $|f_2(x)-6|\le\varepsilon$.

[No podemos hablar del límite de f_2 para $x\to 0$ por no ser el punto interior al dominio $\{x\ge 0\}$.

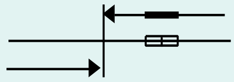
Ej. $f_3(x)=x^3\arctan\frac{1}{x}$. Esta función no está definida en 0, pero veamos que $f_3(x)\to 0$ si $x\to 0$.

Como $|x^3\arctan\frac{1}{x}|\le\frac{\pi}{2}|x^3|=\frac{\pi}{2}|x|^3$, bastará tomar $|x|<\delta=\sqrt[3]{\frac{2\varepsilon}{\pi}}$ para que $|x^3\arctan\frac{1}{x}|<\varepsilon$.

[Como siempre, trabajamos con estas definiciones partiendo de lo que se quiere hacer pequeño y utilizando desigualdades crecientes hasta que sea claro el δ que garantiza que lo inicial es $<\varepsilon$].

Ej. $f_4(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$. Es claro que $f_4(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\begin{cases}-1 & \text{si } a<0\\ 1 & \text{si } a>0\end{cases}$ (basta tomar $\delta<|a|$).

Pero no hay límite si $x\to 0$. Para $\varepsilon<1$ hay x con $|x|<\delta$ para los que $|f_4(x)-L|\ge\varepsilon$, por pequeño que sea δ, sea $L=1$, $L=-1$ u otro real.



Sin embargo, f_4 se acerca a 1 ó -1 cuando $x\to 0$ si sólo miramos los x positivos o negativos.

[La negación de que $f\to L$ si $x\to a$ es esta afirmación: existe un ε tal que para todo δ existen x con $|x-a|<\delta$ pero cumpliendo $|f(x)-L|\ge\varepsilon$ (la negación de que 'en toda clase hay algún estudiante que, si se examina, aprueba', es que 'hay una clase en la que todos los estudiantes que se examinan suspenden')].

El último ejemplo y lo dicho sobre el dominio de f_2 nos lleva a definir los **límites laterales**:

Def. $f \to L$ **por la derecha** (**izquierda**) cuando $x \to a$ $\Big[\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \ \Big(\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \Big) \Big]$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si x cumple $0<x-a<\delta$ ($0<a-x<\delta$) $\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

Como $0<|x-a|<\delta \Leftrightarrow 0<x-a<\delta$ y $0<a-x<\delta$, es inmediato que:

Teorema: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ existen $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, y coinciden con L .

Por tanto, **si no existe un límite lateral, o si existiendo no coinciden, no existe el límite**.

Ej. $f_4(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, pues $\forall\varepsilon$, para cualquier δ que escojamos, si $0<x<\delta$ es $|f_4(x)-1| = 0 < \varepsilon$.

$f_4(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1$, pues $\forall\varepsilon$ para cualquier δ , $0<-x<\delta \Leftrightarrow -\delta<x<0 \Rightarrow |f_4(x)-(-1)| = 0 < \varepsilon$.

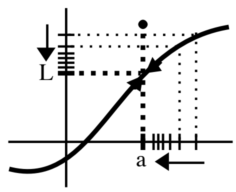
Esto prueba que no existe el $\lim\limits_{x\to 0} f_4(x)$. $\Big[$Sí existen $\lim\limits_{x\to 1^-} f_4(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f_4(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1} f_4(x) \Big]$.

En general, **para ver si f tiene límite no será necesario calcular los laterales**. Sólo lo haremos cuando la f sea diferente a ambos lados de a (como en el ejemplo anterior en $x=0$).

Este teorema será muy útil para demostrar fácilmente bastantes otros usando las propiedades de las sucesiones y, en el futuro, para calcular límites de sucesiones que aún no sabemos hacer:

Teorema: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ **toda** sucesión $\{a_n\} \subset \mathrm{dom} f - \{a\}$ con $\{a_n\} \underset{n\to\infty}{\to} a$ satisface $\{f(a_n)\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$.

$\Rightarrow$) Sabemos que $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ / si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.
Como $a_n \to a$, $\exists N$ / $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n)-L|<\varepsilon$,
con lo que la sucesión $\{f(a_n)\} \to L$.

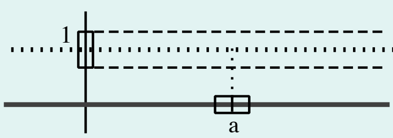


$\Leftarrow$) Si $f(x)$ no tiende a L existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $\delta>0$ existe algún x con $0<|x-a|<\delta$ pero con $|f(x)-L|>\varepsilon$.
En particular, para todo n existe algún a_n con $0<|a_n-a|<\frac{1}{n}$ pero $|f(a_n)-L|>\varepsilon$:
existe, pues, $\{a_n\}$ que converge hacia a pero con $\{f(a_n)\} \not\to L$.

Gracias al teorema, **para ver que una f no tiene límite en a bastará encontrar una $\{a_n\}$** (formada por puntos de dom$f$) **que tienda hacia a y tal que $\{f(a_n)\}$ diverja**, o bien **encontrar dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ tiendan hacia distintos límites**. Esto puede permitir formalizar de forma sencilla la no existencia de límites sin tener que acudir a la negación de la definición:

Ej. Como $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ pero $\{f_4(a_n)\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$ diverge $\Rightarrow f_4$ no tiene límite en $x=0$.
[Para otras $b_n \to 0$ sí tiene límite $\{f_4(b_n)\}$ (por ejemplo, para cualquier $\{b_n\}$ con $b_n>0$ dicho límite es 1); pero el teorema pide que **todas** converjan y que el límite de **todas** sea el mismo].

Ej. $f_5(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$. Intuitivamente parece claro que f_5 no tiene límite para ningún a (racional o irracional). Por ejemplo, no puede tender f_5 hacia 1 cuando $x \to a$ pues por pequeño que sea el δ hay x del entorno (los irracionales) con $|f_5(x)-1|>\varepsilon$ (para los $\varepsilon<1$). Lo mismo sucede con otros posibles límites. Esto es mucho más fácil de formalizar con sucesiones: f_5 no tiene límite en a pues si $\{a_n\}$ es una sucesión de racionales y $\{b_n\}$ de irracionales tendiendo hacia a , se tiene que $f_5(a_n) \to 1$ mientras que $f_5(b_n) \to 0$. (Estas sucesiones siempre existen, pues en todo entorno de a hay infinitos racionales e irracionales).



Las siguientes definiciones incluyen "∞" (**no son límites normales**; como siempre ∞ es sólo un símbolo; en sentido estricto no tiene límite una f que tiende a $+\infty$ o a $-\infty$):

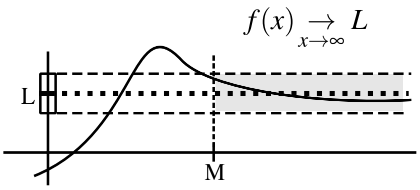
Def. $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L\ \left[\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L\right] \text{ si } \forall\varepsilon>0\ \exists M \text{ tal que si } x>M\ [\,x<M\,] \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon}$

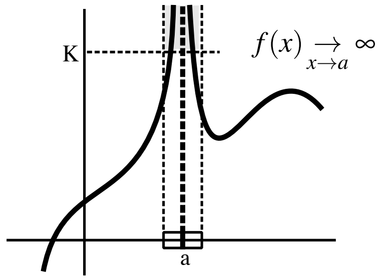
Def. $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty\ [\,-\infty\,] \text{ si } \forall K\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } 0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow\ f(x)>K\ \ [\,f(x)<K\,]}$

Def. $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \text{ si } \forall K\ \exists M \text{ tal que si } x>M \ \Rightarrow\ f(x)>K}$

[Análogamente $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, ...]

Un par de interpretaciones geométricas:





Ej. La función $f_6(x)=\frac{1}{x}\to 0$ si $x\to\infty$ pues $\forall\varepsilon>0\ \exists M=\frac{1}{\varepsilon}$ tal que si $x>\frac{1}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$,

y tiende a ∞ cuando $x\to 0^+$ pues $\forall K\ \exists\delta=\frac{1}{K}$ tal que si $0<x-0<\frac{1}{K}\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}>K$.

$\big[$Análogamente se vería que $f_6 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ y que $f_6 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$. No existe el $\lim\limits_{x\to 0} f_6(x)\big]$.

Ej. $f_7(x)=\sqrt[3]{x}+\operatorname{th}x \underset{x\to\infty}{\to}\infty$, porque $\forall K\ \exists M$ tal que $f_7(x)>\sqrt[3]{x}-1>K$ si $x>M=(K+1)^3$.

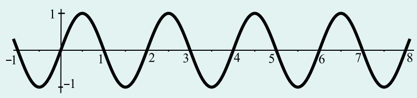
Se pueden probar relaciones entre estos nuevos 'límites' y los de sucesiones. Por ejemplo:

Teorema:

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \text{ toda sucesión } \{a_n\}\subset \operatorname{dom} f \text{ con } a_n \underset{n\to\infty}{\to}\infty \text{ cumple } f(a_n)\underset{n\to\infty}{\to} L .}$

En particular, como la sucesión $\{n\}\to\infty$, deducimos que $\boxed{f(x)\underset{x\to\infty}{\to} L \ \Rightarrow\ f(n)\underset{n\to\infty}{\to} L}$.

La afirmación contraria a la anterior es claramente falsa.
Por ejemplo, para $f(x)=\operatorname{sen}\pi x$ es $\{f(n)\}=0,0,\cdots\to 0$,
pero ni 0 ni ningún otro L es el ímite de f cuando $x\to\infty$.



Teorema:

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \text{ toda sucesión } \{a_n\}\subset \operatorname{dom} f-\{a\} \text{ con } a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \text{ cumple } f(a_n)\underset{n\to\infty}{\to}\infty .}$

Como consecuencia de los límites de sucesiones se puede demostrar ahora fácilmente:

Teorema:

$$f(x)\underset{x\to a}{\to} L\ ,\ g(x)\underset{x\to a}{\to} M \ \Rightarrow\ f\pm g \underset{x\to a}{\to} L\pm M\ ,\ f\cdot g\underset{x\to a}{\to} L\cdot M\ .$$

Si además $M\neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{f}{g}\underset{x\to a}{\to}\frac{L}{M}$.

Lo anterior es válido si se sustituye a por a^+ , a^- , $+\infty$ ó $-\infty$.

Todas se demuestran igual, relacionando sucesiones y funciones. Por ejemplo, la primera:
Sea cualquier $a_n\to a$, $a_n\neq a$. Por tender la suma de sucesiones a la suma de los límites:

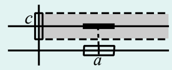
$$\lim_{n\to\infty}(f\pm g)(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\pm\lim_{n\to\infty} g(a_n)=L\pm M \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}(f\pm g)(x)=L\pm M .$$

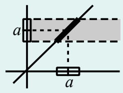
La **continuidad** se define usando el concepto de límite. Ahora sí importa el valor de $f(a)$:

Def. f es **continua** en un punto a interior al dominio de f si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, o sea, si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si x cumple $|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

[Luego f **no es continua si no existe límite o no existe** $f(a)$ **o si existiendo no coinciden**].

Ej. Tres sencillas funciones continuas en cualquier punto a son:





$f(x)=c$: $\forall\varepsilon>0$ vale cualquier δ para que $|x-a|<\delta \Rightarrow |c-c|=0<\varepsilon$.

$f(x)=x$: $\forall\varepsilon>0$ basta tomar $\delta=\varepsilon$ para que $|x-a|<\delta=\varepsilon \Rightarrow |x-a|<\varepsilon$.

$f(x)=|x|$: $\forall\varepsilon>0$ tomando $\delta=\varepsilon$ es $\big||x|-|a|\big|\leq|x-a|<\varepsilon$ si $|x-a|<\delta$.

Ej. $f_3(x)=x^3\arctan\frac{1}{x}$ no es continua en 0 , pues no está definida $f_3(0)$. Pero si definimos $f_3(0)=0$ sí lo es, pues vimos que $f_3(x)\underset{x\to 0}{\to}0$. Si fuese $f_3(0)=7$ sería discontinua.

f_4 no puede hacerse continua en 0 definiendo adecuadamente $f_4(0)$, pues no existe $\lim\limits_{x\to 0} f_4(x)$.

De los teoremas para límites se deducen:

Teorema:

f es continua en $a \Leftrightarrow$ **toda** sucesión $\{a_n\}\subset\mathrm{dom}f$ con $a_n\underset{n\to\infty}{\to}a$ cumple $f(a_n)\underset{n\to\infty}{\to}f(a)$.

[Por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f\big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\big)$ **si** f **es continua** (no, si es discontinua)].

Teorema: Si f y g son continuas en a entonces $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ son continuas en a . Si además $g(a)\neq 0$, también f/g es continua en a .

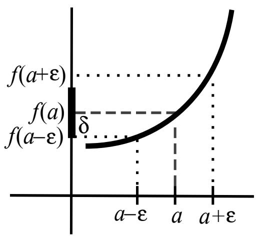
Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) \underset{\text{de límites)}}{\overset{\text{(propiedad}}{=}} \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)\cdot g(a)$. Las otras igual.

[Se podrían probar directamente a partir de la definición; la de la suma por ejemplo:
$\forall\varepsilon,\ |f(x)+g(x)-f(a)-g(a)|\leq|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|<\varepsilon$ si $|x-a|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,
siendo δ_1 y δ_2 tales que: $|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$ si $|x-a|<\delta_1$, $|g(x)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$ si $|x-a|<\delta_2$,
y estos δ existen por ser f y g continuas en a].

Teorema: g continua en a y f continua en $g(a)$ $\Rightarrow$ $f\circ g$ continua en a .

$a_n\to a \underset{g \text{ cont. en } a}{\Longrightarrow} g(a_n)\to g(a) \underset{f \text{ cont. en } g(a)}{\Longrightarrow} (f\circ g)(a_n)=f(g(a_n))\to f(g(a))=(f\circ g)(a)$.

Teorema: f continua en a y estrictamente monótona en un entorno de a $\Rightarrow$ f^{-1} continua en $f(a)$.



Sea f estrictamente creciente (análogo si fuera decreciente).

$\forall\varepsilon$ buscamos δ tal que $|y-f(a)|<\delta \Rightarrow |f^{-1}(y)-a|<\varepsilon$

[o sea, $f(a)-\delta<y<f(a)+\delta \Rightarrow a-\varepsilon<f^{-1}(y)<a+\varepsilon$].

El dibujo sugiere $\delta=\min\{f(a+\varepsilon)-f(a), f(a)-f(a-\varepsilon)\}>0$.

Entonces: $f(a)-\delta<y<f(a)+\delta \underset{\uparrow}{\Rightarrow} f(a-\varepsilon)<y<f(a+\varepsilon) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} a-\varepsilon<f^{-1}(y)<a+\varepsilon$.

$\big[$porque $f(a)+\delta\leq f(a+\varepsilon)$, $f(a-\varepsilon)\leq f(a)-\delta\big]$ [porque f^{-1} creciente].

Hemos definido continuidad en un punto. En **intervalos** las definiciones son de este tipo:

Def. f es continua en (a,b) si es continua en todo x de (a,b) .
f es continua en $[a,b]$ si es continua en (a,b) , $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

[No podemos decir simplemente ‘continua en todo $x\in[a,b]$’, pues a y b no son puntos interiores].

Probemos que **todas las funciones elementales** (de 1.4) **son continuas en su dominio**.

Los **polinomios** $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ son continuos en todo $\mathbf{R}$

(ya que son sumas y productos de funciones continuas en todo a de $\mathbf{R}$).

Las **funciones racionales** $\big($cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}\big)$ son continuas $\forall a$ con $Q(a)\neq 0$.

Las **raíces** $\sqrt[n]{x}$ son continuas en su dominio: $\mathbf{R}$ si n impar, $\mathbf{R}_+$ si n par (en $x=0$ hablamos de $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[2n]{x}$), por ser inversas de funciones estrictamente crecientes y continuas.

Las **funciones trigonométricas y sus inversas** también son continuas en su dominio:

Comencemos probando que $f(x)=\operatorname{sen}x$ es continua $\forall a\in\mathbf{R}$: $\forall\varepsilon>0$, si $|x-a|<\delta=\varepsilon$

se cumple: $|\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a|=|2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}|\leq 2|\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}|\leq 2\frac{|x-a|}{2}<\varepsilon$.

$\cos x=\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})$ es continua $\forall a$ por ser composición de funciones continuas $\forall a$.

$\tan x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ es continua si $\cos x\neq 0$, es decir, si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

$\operatorname{arc\,sen}x$, $\arccos x$ en $[-1,1]$ y $\arctan x$ $\forall x$ son inversas de monótonas continuas.

Para probar la continuidad de **exponenciales** y **logaritmos** debemos esperar al estudio de las integrales. El teorema fundamental de cálculo integral que demostraremos en 5.2 asegurará que

$\log x\equiv\int_1^x\frac{dt}{t}$ es continua $\forall x>0$. De ahí deducimos la continuidad de las demás:

e^x es continua en $\mathbf{R}$ por ser inversa de continua. Y por ser composición de continuas:

$x^b\equiv e^{b\log x}$ continua en $(0,\infty)$ $\big[$si $b>0$ en $[0,\infty)$, tomando 0 como su valor en $0\big]$,

$b^x\equiv e^{x\log b}$ $(b>0)$ continua $\forall x$, $\log_b x\equiv\frac{\log x}{\log b}$ $(b>0, b\neq 1)$ continua $\forall x>0$.

Las **funciones hiperbólicas**, sumas, diferencias y cocientes con denominadores no nulos de funciones continuas, son también continuas en todo su dominio $\mathbf{R}$.

Con todo lo anterior podemos afirmar que muchísimas funciones son continuas en casi todos los puntos **sin usar la definición** (el trabajo con los ε lo hemos hecho en los teoremas, sobre todo en sucesiones, y sólo para funciones muy raras habrá que acudir a ella).

Ej. $f_8(x)=\dfrac{e^{x/(x-1)}+\arctan[\log(x^2+1)]-\cos^3x+\sqrt[4]{x}}{[3+\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}]\operatorname{sh}x}$ es continua en $(0,1)\cup(1,3]$:

el numerador lo es en $[0,\infty)-\{1\}$, pues $\arctan[\log(x^2+1)]-\cos^3x$ es continua en $\mathbf{R}$ (suma de composiciones de continuas), la raíz en $\mathbf{R}_+$ y la exponencial si $x\neq 1$; el denominador es continuo en $[-3,3]$ (por el $\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}$) y sólo se anula en 0 (arcsen como mucho vale $-\frac{\pi}{2}$ y sólo $\operatorname{sh}0=0$).

Con tantas funciones continuas el **cálculo** de límites es casi siempre un cálculo tonto, pues basta sustituir x por a en la expresión de la función: $f_8(x)\to f_8(2)$ si $x\to 2$, por ejemplo, por ser f_8 continua en 2.

También son sencillos algunos límites con **infinitos**, utilizando propiedades como las de sucesiones (demostrables basándose en ellas y los teoremas que relacionan funciones y sucesiones o directamente):

“$c\pm\infty=\pm\infty$”, “$\text{acot}\pm\infty=\pm\infty$”, “$\infty+\infty=\infty$”, “$\infty\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$”, “$0\cdot\text{acot}=0$”,

“$\frac{c}{\pm\infty}=0$”, “$\frac{\text{acot}}{\pm\infty}=0$”, “$p\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$” $(p>0)$, “$\frac{\pm\infty}{p}=\pm\infty$” $(p>0)$, “$\frac{p}{\pm 0}=\pm\infty$” $(p>0)$,

“$\log(+0)=-\infty$”, “$\log(\infty)=\infty$”, “$e^{\infty}=\infty$”, “$e^{-\infty}=0$”, “$\arctan(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}$”, ...

Como siempre, hay que leerlo en sentido de límites; por ejemplo, “$c\pm\infty=\pm\infty$” significa que si f tiende a c y g hacia $+\infty$ ó $-\infty$ (cuando $x\to a$, a^+, a^-, $+\infty$ ó $-\infty$), la suma $f+g$, respectivamente, tiende a $+\infty$ ó $-\infty$. La notación $+0$ (-0) significa aquí que $f\to 0$ siendo $f>0$ $(f<0)$.

$\Big[$ Con esto, se tiene que $\lim\limits_{x\to 1^+}f_8(x)=\infty$ $\big(\frac{c+\infty}{p}\big)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-}f_8(x)=\frac{\arctan[\log 2]-\cos^3 1+1}{\operatorname{sh}1\,[3+\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}]}$ $\Big]$.

Como en sucesiones, a pesar de tanto teorema quedan límites difíciles: los **indeterminados**, la mayoría de los cuales (los que no admitan trucos algebraicos como los de sucesiones) sólo sabremos hallar una vez que estudiemos las derivadas (por ejemplo, el límite de f_8 cuando $x\to 0^+$, que es de la forma $\frac{0}{0}$).

El siguiente teorema permite calcular un límite indeterminado que pronto necesitaremos:

Teorema: $\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } f(x) \le g(x) \le h(x) \text{ y } \lim f = \lim h = L \Rightarrow \lim g = L. \\ (\, x \to a,\ a^+,\ a^-,\ +\infty \text{ ó } -\infty, \text{ todos valen).}\end{array}}$

Como $f, h \to L$, es $L-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L+\varepsilon \Rightarrow |g(x)-L| < \varepsilon$.

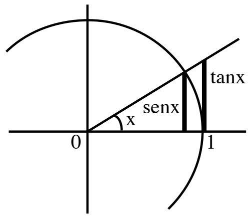
Deducimos el siguiente límite indeterminado (será inmediato con L'Hôpital o Taylor), usando sólo propiedades trigonométricas (basadas en la no muy rigurosa definición dada de $\operatorname{sen} x$):

$\boxed{\frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1}$. Si $x>0$, por el significado geométrico de $\operatorname{sen} x$ y $\tan x$:

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Como $\cos x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, el teorema anterior prueba el límite para $x>0$.

Si $x<0$, por ser $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}$, reducimos el límite al anterior.



Mucho más fáciles de calcular serían (no son indeterminados):

Ej. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$, por ser esta función continua en $x=\frac{\pi}{2}$.

[Hay una idea errónea que suele estar muy extendida: esta función (como otras) no es continua en el punto porque al sustituir x por $\frac{\pi}{2}$ salga $f(\frac{\pi}{2})$ (faltaría más). Lo es (y por eso es fácil el límite y basta con sustituir) porque se ha demostrado que $\operatorname{sen} x$ y x son continuas y que el cociente de continuas con denominador no nulo también lo es].

Ej. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$, pues sabemos que "$\frac{\text{acot}}{\pm\infty} = 0$".

De cada límite de funciones se deducen infinitos **límites de sucesiones**. Del indeterminado anterior:

Ej. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n^2)}{1/n^2} = 1$, puesto que $\frac{1}{n^2} \to 0$ y $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$.

Ej. Calculemos el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{n^k - n^2 \operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n} - n \arctan n}$, para i) $k=2$, ii) $k=1$.

Si $k=2$, $a_n = \dfrac{n\,(1-\operatorname{sen}\frac{1}{n})}{n^{-2/3} - \arctan n} \to \frac{\infty(1-0)}{0-\pi/2} = -\infty$ [$\operatorname{sen} x$ es continua en $x=0$].

Si $k=1$, $a_n = \dfrac{1 - n \operatorname{sen}\frac{1}{n}}{n^{-2/3} - \arctan n} \to \frac{1-1}{0-\pi/2} = 0$, pues $\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1$.

Hallando límites será, en ocasiones, conveniente realizar **cambios de variable** como:

Teorema: $[t=g(x)]$ $\boxed{g \text{ continua en } a,\ g(x) \ne g(a) \text{ si } x \ne a \text{ y } \lim\limits_{t\to g(a)} f(t) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = L}$

[Casi igual que la demostración de la continuidad de $f \circ g$].

Ej. Con este teorema podemos deducir del límite indeterminado hallado algún otro del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to -5} \frac{\operatorname{sen}(x+5)}{x+5} = 1 \quad \left[\, t = g(x) = x+5 \text{ es continua, no se anula si } x \ne -5 \text{ y } \frac{\operatorname{sen} t}{t} \to 1 \,\right].$$

Otro que exige algo de ingenio (pero que será muy fácil con los desarrollos de Taylor):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^2 = \frac{1}{2}.$$

Complicándolo un poco: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\cos x^2} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0$.

Como ningún teorema nos dice nada sobre el siguiente, tendremos que acudir a la definición:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\tan x^2}{x}$ no existe porque la función se va a $\pm\infty$ infinitas veces $\big($si $x = [\frac{\pi}{2} + k\pi]^{1/2}\big)$

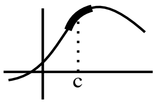
y por tanto su gráfica se sale de la banda limitada por $y = L+\varepsilon$ e $y = L-\varepsilon$ sea cuál sea el L.

2.3 Teoremas sobre funciones continuas en intervalos

Teorema:

$\boxed{f \text{ continua en } c \text{ y } f(c)>0\ [<0] \ \Rightarrow\ \exists\delta>0 \text{ tal que } f(x)>0\ [<0] \text{ si } x\in(c-\delta,c+\delta)}$

Dado $\varepsilon = f(c)$, $\exists\delta > 0/$ si $|x-c| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(c)| < f(c) \ \Rightarrow$ $f(x)-f(c) > -f(c) \ \Rightarrow\ f(x) > 0$ [si $f(c)<0$ tomamos $\varepsilon = -f(c)$]

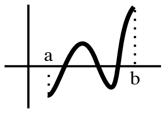


Teorema de Bolzano para funciones continuas:

$\boxed{f \text{ continua en } [a,b]\,,\ f(a)<0<f(b) \ \Rightarrow\ \text{existe algún } c\in(a,b) \text{ tal que } f(c)=0\,.}$

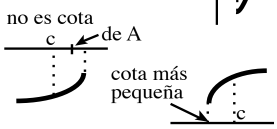
[La gráfica corta el eje x en algún punto (el teorema no dice dónde), quizás en más de uno].

Sea $A = \{x\in[a,b] : f(x)\leq 0\} \neq \varnothing$ $(a\in A)$ y acotado superiormente (por b) $\Rightarrow$ existe $c = \sup A$. Probemos que $f(c)=0$:



Si $f(c)<0 \ \Rightarrow\ \exists\delta/f(x)<0$ en $(c-\delta,c+\delta)$ y c no sería cota de A .

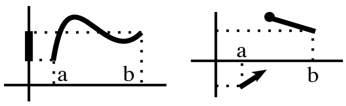
Si $f(c)>0 \ \Rightarrow\ \exists\delta/f(x)>0$ en $(c-\delta,c+\delta)$ y habría cotas menores.



En ninguno de los dos casos c podría ser el supremo de A .

Teorema:

$\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \ \Rightarrow\ f \text{ toma todos los valores comprendidos entre } f(a) \text{ y } f(b)\,.}$

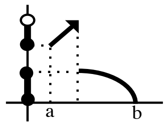


[Normalmente tomará más y si f no es continua, no tiene que tomarlos, como muestran los dibujos de la izquierda].

Si $f(a)<f(b)$, sea p con $f(a)<p<f(b)$. La función $g=f-p$ es continua en $[a,b]$ con $g(a)<0<g(b)$. El teorema de Bolzano asegura que existe $c\in(a,b)$ con $g(c)=0$, es decir, con $f(c)=p$. Si $f(a)>p>f(b)$, como $-f$ es continua y $-f(a)<-p<-f(b) \ \Rightarrow\ \exists c\in(a,b)$ tal que $-f(c)=-p$.

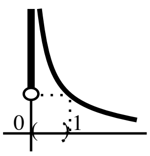
Hemos hablado de conjuntos acotados y del máximo de un conjunto, pero no de una función. De modo natural, f se dice **acotada** en $A\subset\mathbf{R}$ si lo está el conjunto $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ y se define **valor máximo** de f en A como el máximo del conjunto $f(A)$ (en caso de que exista). Análogamente se define **valor mínimo** de f en A .

Ej. La función del dibujo (que sí es acotada) no tiene valor máximo en $[a,b]$, aunque sí valor mínimo (se alcanza en b y su valor es 0); está claro que no es continua en $[a,b]$.



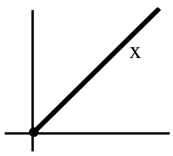
Teorema: $\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \ \Rightarrow\ f \text{ acotada en } [a,b]\,.}$

Si f no estuviese acotada superiormente podríamos escoger un $x_n\in I\equiv[a,b]$ con $f(x_n)>n$ para cada $n\in\mathbf{N}$. Como $\{x_n\}$ acotada, existe $\{x_{n_j}\}\to x_o\in I$ (por ser cerrado). Como f es continua en x_o tendríamos $f(x_{n_j})\to f(x_o)$, lo que es imposible pues $\{f(x_{n_j})\}$ no está acotada $(>n_j)$ y no puede converger. [Análogamente se vería que está acotada inferiormente].

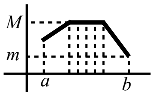


El teorema **no es cierto** para (a,b) ó $[a,\infty)$:

Ej. $f(x)=\frac{1}{x}$ es continua pero no acotada en $(0,1)$ y le pasa lo mismo a $f(x)=x$ en $[0,\infty)$.



Teorema: $\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow \text{ existen los valores máximo y mínimo de } f \text{ en } [a,b]\,.}$



O sea, existen $y,z\in[a,b]$ tales que $f(z)\le f(x)\le f(y)$ para todo $x\in[a,b]$.
[Estos y,z pueden no ser únicos, desde luego].

Sea $M=\sup f(I)$. Existe $\{y_n\}\subset I$ tal que $M-\frac{1}{n}<f(y_n)\le M\ \forall n \Rightarrow f(y_n)\to M$. Podría $\{y_n\}$ no converger pero, siendo acotada, hay seguro una $\{y_{n_j}\}$ subsucesión convergente hacia un $y\in I$. Como f continua en I, $f(y)=\text{lím} f(y_{n_j})=M$ y, por tanto, el supremo pertenece a $f(I)$. Análogamente, o considerando $-f$, se ve que el ínfimo también se alcanza.

[En la demostración se ve que el teorema es válido en conjuntos cerrados y acotados (se les llama **compactos** y son importantes en el cálculo más avanzado)].

Tampoco este teorema es cierto sustituyendo $[a,b]$ por (a,b) o por $[a,\infty)$:

Ej. $f(x)=1/x$ es continua en $(0,1)$ pero no alcanza su máximo ni su mínimo en $(0,1)$.

Ej. $f(x)=x$ no tiene máximo en $[0,\infty)$ (su valor mínimo existe y vale 0).

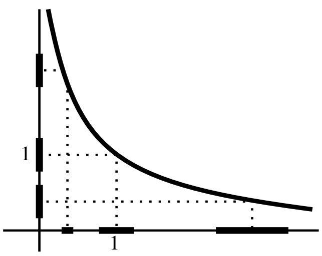
Funciones uniformemente continuas en un intervalo I

[Definimos este concepto porque aparecerá en la demostración de algún teorema].

f era continua en I si lo era en cada x de I (límites laterales en los posibles extremos de I), es decir, si $\forall x\in I$ y $\forall\varepsilon$ existe un $\delta(\varepsilon,x)$ tal que $\forall y\in I$ si $|y-x|<\delta$ entonces $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

Ej. Consideremos $f(x)=\frac{1}{x}$. En $(0,1)$ sabemos que es continua:

$\forall x$ y $\forall\varepsilon$ existe un δ tal que si $|y-x|<\delta \Rightarrow |\frac{1}{y}-\frac{1}{x}|<\varepsilon$.



Pero dado un ε se ve que el δ que debemos tomar es más pequeño según elijamos un x más pequeño. Intuitivamente está claro que no podemos encontrar un δ que valga para todos los x de $(0,1)$: por pequeño que sea δ, si x es muy pequeño, la función tomará valores muy diferentes en $(x-\delta,x+\delta)$. Pero para la misma f en $[1,\infty)$ se ve que dado un ε existe un δ válido para cualquier x del intervalo (el que valga para $x=1$ valdrá para también para los $x>1$).

Def. f es **uniformemente continua** en I si
$\forall\varepsilon$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que $\forall x,y\in I$ si $|y-x|<\delta$ entonces $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

Ej. Acabemos de formalizar que $f(x)=\frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0,1)$:
Sea $\varepsilon=1$. Por pequeño que sea δ encontramos $x,y\in(0,1)$ con $|y-x|<\delta$ pero $|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}|>\varepsilon$.
Por ejemplo, $x=\frac{\delta}{4}$, $y=\delta$ satisfacen $|y-x|=\frac{3\delta}{4}<\delta$ pero $|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}|=\frac{3}{\delta}>1$ (pues $\delta<1$).

Formalizamos ahora que $f(x)=\frac{1}{x}$ sí es uniformemente continua en $[1,\infty)$:
$\forall\varepsilon\ \exists\delta=\varepsilon$ tal que $\forall x,y\in[1,\infty)$ con $|y-x|<\delta \Rightarrow |\frac{1}{y}-\frac{1}{x}|=\frac{|y-x|}{xy}\le|y-x|<\varepsilon$.

Evidentemente: $\boxed{f \text{ uniformemente continua en } I \Rightarrow f \text{ continua en } I\,.}$

La implicación $\Leftarrow$ es falsa en general; aunque sí es válida cuando $I=[a,b]$:

Teorema: $\boxed{f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow f \text{ uniformemente continua en } [a,b]\,.}$

Por reducción al absurdo. Supongamos a la vez f continua y no uniformemente continua en $[a,b]$. Existe, pues, $\varepsilon>0$ tal que $\forall\delta>0$ podemos encontrar x,y con $|y-x|<\delta$ pero $|f(y)-f(x)|\ge\varepsilon$. En particular, para cada $\delta=\frac{1}{n}$ tenemos $\{x_n\},\{y_n\}\subset[a,b]$ con $|y_n-x_n|<\frac{1}{n}$ y $|f(y_n)-f(x_n)|\ge\varepsilon\ \forall n$. $\{x_n\}$ acotada $\Rightarrow \exists\{x_{n_j}\}$ convergente a un c ($\in[a,b]$ por ser cerrado) $\Rightarrow f(x_{n_j})\to f(c)$ (f es continua). Como $|y_{n_j}-x_{n_j}|<1/n_j\to 0$ también $f(y_{n_j})\to f(c)$ y por tanto $|f(y_{n_j})-f(x_{n_j})|\to 0$, lo que está en clara contradicción con el hecho de que $|f(y_{n_j})-f(x_{n_j})|\ge\varepsilon\ \forall n_j$.

[En la demostración se ve que también este teorema será válido en cualquier conjunto compacto].