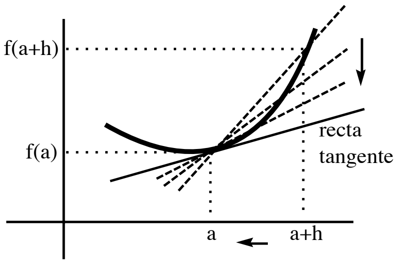
3. Derivadas en R

3.1. Definición y cálculo

Def. La función f es **derivable** en a (interior al $\text{dom} f$) si existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
En ese caso el límite se representa por $f'(a)$ y se llama **derivada** de f en a .

Dos aplicaciones.

Pendiente de la tangente a una curva: $[f(a+h)-f(a)]/h$ es la pendiente de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$. Cuando $h\to 0$, la secante tiende hacia la recta tangente y su pendiente tiende hacia $f'(a)$.



Así pues, la **ecuación de la recta tangente** a la gráfica de f en el punto a es (si $f'(a)$ existe, claro):

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

Velocidad instantánea: si $d(t)$ es la distancia recorrida por un móvil en el tiempo t , $\frac{d(a+h)-d(a)}{h}$ es su velocidad media en el intervalo $[a, a+h]$; por tanto, $d'(a)$ es su velocidad en el instante $t=a$. Más en general, la derivada indica el ritmo de cambio de una magnitud respecto de otra.

Se llama f', **función derivada** de f , a la que hace corresponder a cada $x\in \text{dom} f$ en que f es derivable el valor $f'(x)$; $f''(a)$ será la derivada de $f'(x)$ en el punto a (un número) y f'' la función derivada de f' ; ... En general, $f^{(n)}$ es la función derivada de $f^{(n-1)}$ [definida en los $x\in \text{dom} f^{(n-1)}$ tales que existe $f^{(n)}$].

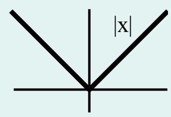
[Otra notación famosa es la de Leibniz: $f' = \frac{df}{dx}$, $f'(a) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$, $f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$].

Ej. $f(x)=c$ es derivable para todo a y $f'(a)=0$ ya que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$ [claro, tangente horizontal].

Ej. $g(x)=x^{7/3}$. Como existe $g'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h^{7/3}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h^{4/3} = 0$, g es derivable en $x=0$.
Si $a\neq 0$ también existirá $g'(a)$; es difícil verlo con la definición, pero pronto será muy sencillo.

Ej. $h(x) = |x|$. Si $a>0$, $h'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = 1$. $\left[\begin{array}{c}\text{Deducimos de paso}\\ \text{que } (x)'=1 .\end{array}\right]$

Si $a<0$, $h'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-a-h+a}{h} = -1$.



No existe $f'(0)$ porque $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ no existe (aunque sí existen los límites laterales).

Def. $f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $f'(a^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (**derivadas por la derecha e izquierda**, respectivamente)

Está claro que f **es derivable en** a **si y sólo si existen y coinciden** $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$.

Ej. $h(x)=|x|$, posee derivadas laterales en 0 pero no coinciden: $h'(0^+)=1$, $h'(0^-)=-1$.

Teorema: $\boxed{f \text{ derivable en } a \Rightarrow f \text{ continua en } a\,.}$

Hay funciones continuas no derivables
($h(x)=|x|$, por ejemplo; tienen 'picos').

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0}\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h = f'(a)\cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ continua en } a\,.$$

[Y como siempre (no $q \Rightarrow$ no p), **si** f **no es continua no puede ser derivable**].

Con el siguiente teorema podremos calcular casi todas las derivadas sin acudir a la definición:
Teorema:

f y g derivables en a y $c\in\mathbf{R} \Rightarrow c\cdot f$, $f\pm g$, $f\cdot g$ son derivables en a y se tiene:

$$(c\cdot f)'(a)=c\cdot f'(a)\ ;\ (f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)\ ;\ (f\cdot g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\ .$$

Si además $g(a)\neq 0$, $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$ son derivables en a y es

$$\left(\tfrac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\ ;\ \left(\tfrac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}\ .$$

g derivable en a y f derivable en $g(a) \Rightarrow f\circ g$ derivable en a y

$$(f\circ g)' = f'[g(a)]\,g'(a) \quad \textbf{[regla de la cadena]}.$$

f derivable en $f^{-1}(b)$ y $f'[f^{-1}(b)]\neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ derivable en b y $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'[f^{-1}(b)]}\ .$

$c\cdot f$ es caso particular de $f\cdot g$; de $c\cdot f$ y de la suma se deduce la de $f-g=f+(-1)\cdot g$.

Las demás:

$\boxed{f+g}$ $\quad \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \underset{h\to 0}{\to} f'(a)+g'(a)\ .$

$\boxed{f\cdot g}$ $\quad \frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h} = f(a+h)\,\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\to} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

(puesto que f es continua en a por ser derivable).

$\boxed{1/g}$ $\quad \frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h} = \frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a)g(a+h)} \underset{h\to 0}{\to} -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$ $\quad$ (g continua en a , $g(a)\neq 0 \Rightarrow$ $g(a+h)\neq 0$ si h pequeño)

$\boxed{f/g}$ $\quad \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\,\frac{1}{g(a)} - \frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\,f(a)$

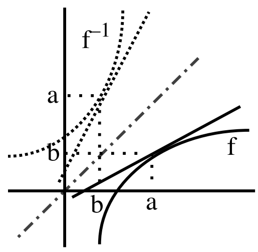
$\boxed{f\circ g}$ $\quad \frac{f[g(a+h)]-f[g(a)]}{h} = \frac{f[g(a)+g(a+h)-g(a)]-f[g(a)]}{g(a+h)-g(a)}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \underset{h\to 0}{\to} f'[g(a)]\cdot g'(a)\ ,$

ya que $k=g(a+h)-g(a) \underset{h\to 0}{\to} 0$ por ser g continua.

[Esta demostración necesita correcciones (ver Spivak), pues $g(a+h)-g(a)$ podría hacerse 0 infinitas veces para valores muy pequeños de h].

$\boxed{f^{-1}}$ Sea $b=f(a)$; por ser $f'(a)\neq 0$, es f inyectiva $\Rightarrow \exists f^{-1}$ en un entorno de a ; entonces para cada h pequeño hay un único k tal que $f(a+k)=b+h$. Por tanto:

$$\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h} = \frac{f^{-1}(f(a+k))-a}{b+h-b} = \frac{k}{f(a+k)-f(a)} \underset{h\to 0}{\to} \frac{1}{f'(a)}$$



Las dos últimas reglas de derivación adoptan una forma sugerente, pero imprecisa, con la notación de Leibniz:

$$\text{Si } z=g(y)\,,\ y=f(x):\ \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\ ;\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}\ ,\ \text{si } \frac{dx}{dy}\neq 0\ .$$

(no dejan claro que las diferentes derivadas están evaluadas en puntos diferentes).

Derivadas de las funciones elementales:

$\boxed{\left[x^b\right]' = bx^{b-1}}$ para todo b real, $x>0$. Podemos ya demostrarlo si $b\in\mathbf{Q}$. Varios pasos:

Si $b=n\in\mathbf{N}$ [la fórmula es válida entonces $\forall x$], lo probamos por inducción:

Cierto para $n=1$: $1=[x^1]'=1x^{1-1}=1$.

Supuesto cierto si $n-1$: $[x^n]'=[x\cdot x^{n-1}]'=x^{n-1}+x(n-1)x^{n-2}=nx^{n-1}$, cierto para n.

Si $b=0$ está visto. Si $b=-n$, $n\in\mathbf{N}$, $\left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$ [válido $\forall x\neq 0$].

Si $b=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbf{Z}$, utilizamos la formula para el cálculo de derivadas de funciones inversas:

$f^{-1}(x)=x^{1/n}$ es la inversa de $f(x)=x^n$ cuya derivada $f'(x)=nx^{n-1}$ conocemos.

Por tanto: $[x^{1/n}]' = \frac{1}{n\,x^{n-1}\big|_{x^{1/n}}} = \frac{1}{n\,x^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}\,x^{1/n-1}$.

Si $b=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{Z}$, $\left[(x^{1/n})^m\right]' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{regla de la cadena}}}{=} m(x^{1/n})^{m-1}\,\frac{1}{n}\,x^{(1-n)/n} = \frac{m}{n}\,x^{(m-n)/n}$.

$\boxed{[\log|x|]' = \frac{1}{x}}$, $x\neq 0$: Si $x>0$, $[\log x]' = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{dt}{t} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{teoremas de integrales}}}{=} \frac{1}{x}$. Si $x<0$, $[\log(-x)]' = \frac{-1}{-x}$.

$\boxed{[e^x]' = e^x\,,\ \forall x \ \ ; \ \ [b^x]' = b^x\log b\,,\ \forall x, b>0 \ \ ; \ \ [\log_b x]' = \frac{1}{x\log b}\,,\ x>0, b>0, b\neq 1}$

$f^{-1}(x)=e^x$ inversa de $f(x)=\log x$ con $f'(x)=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $[e^x]' = \frac{1}{1/e^x}$.

$\left[e^{x\log b}\right]' = e^{x\log b}\log b$ (regla de la cadena de nuevo). $\left[\frac{\log x}{\log b}\right]' = \frac{1}{x\log b}$.

Además se deduce: $\left[x^b\right]' = \left[e^{b\log x}\right]' = \frac{b}{x}\,e^{b\log x} = bx^{b-1}$ para cualquier b real y $x>0$.

$\boxed{[\mathrm{sh}\,x]' = \mathrm{ch}\,x\,,\ [\mathrm{ch}\,x]' = \mathrm{sh}\,x\,,\ [\mathrm{th}\,x]' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1-\mathrm{th}^2 x\,,\ \forall x}$

Las primeras triviales: $[\mathrm{sh}\,x]' = \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\,x$ $\big($casi igual $[\mathrm{ch}\,x]'\big)$.

Entonces: $\left[\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\right]' = \frac{\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}$ y sabemos desde 1.4 que $\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$.

$\boxed{[\mathrm{sen}\,x]' = \cos x\,,\ [\cos x]' = -\,\mathrm{sen}\,x\,,\ \forall x\,;\ \ [\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x\,,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi}$

$\frac{1}{h}[\mathrm{sen}\,(x+h)-\mathrm{sen}\,x] = \frac{2}{h}\,\mathrm{sen}\,\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos x$ $\left[\frac{\mathrm{sen}(h/2)}{h/2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1\right.$ y $\cos x$ es continua$\Big]$.

$\left[\mathrm{sen}(x+\frac{\pi}{2})\right]' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\,\mathrm{sen}\,x$; $\left[\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos^2 x+\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}$.

$\boxed{[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2}\,,\ \forall x\,;\ \ [\mathrm{arc\,sen}\,x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ [\mathrm{arc\,cos}\,x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall x\in(-1,1)}$

$f^{-1}(x)=\arctan(x)$ inversa de $f(x)=\tan x$ $\Rightarrow$ $[\arctan x]' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$.

Análogamente: $[\mathrm{arc\,sen}\,x]' = \frac{1}{\cos(\mathrm{arc\,sen}\,x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\mathrm{arc\,sen}\,x)}}$ $\left[\begin{array}{c}\mathrm{arc\,sen}\,x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\\ \text{por eso raíz positiva}\end{array}\right]$.

$[\mathrm{arc\,cos}\,x]' = \frac{1}{-\,\mathrm{sen}(\mathrm{arc\,cos}\,x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\mathrm{arc\,cos}\,x)}}$.

Con estas derivadas de las funciones elementales y sabiendo cómo se derivan sumas, productos, composiciones, ... ya es fácil derivar cualquier función, salvo en casos excepcionales.

Ej. Para $\boxed{g(x)=x^{7/3}}$ sólo sabíamos hallar $g'(0)$. Pero ya es fácil escribir todas sus derivadas.

$$g'(x)=\tfrac{7}{3}x^{4/3}\ \forall x\ \big(\text{en particular, } g'(0)=0,\ g'(-1)=\tfrac{7}{3},\dots\big).\quad g''(x)=\tfrac{28}{9}x^{1/3}\ \forall x.$$

La tercera es $g'''(x)=\frac{28}{27}x^{-2/3}\ \forall x\neq 0$, pero $g'''(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g''(h)-g''(0)}{h}$ ya no existe.

Ej. $\boxed{k(x)=\left(\frac{\log[7+\text{ch}(3^x+x)]}{5+\arctan(x-2)}\right)^3}$ derivable $\forall x$, al ser suma, cociente, composición,... de funciones derivables (el log se evalúa en valores ≥ 7 y el denominador es mayor que 0 porque el arco tangente vale mas que $-\frac{\pi}{2}>-2$).

Sabemos derivarla a pesar de su aspecto terrible (no con la definición, desde luego):

$$k'(x)=3\,\frac{\frac{\text{sh}(3^x+x)(3^x\log 3+1)}{7+\text{ch}(3^x+x)}[5+\arctan(x-2)]-\frac{\log[7+\text{ch}(3^x+x)]}{1+(x-2)^2}}{[5+\arctan(x-2)]^2}\left(\frac{\log[7+\text{ch}(3^x+x)]}{5+\arctan(x-2)}\right)^2.$$

Ej. $\boxed{l(x)=\log\left|e^{\cos x}-1\right|}$. Su dominio $D=\mathbf{R}-\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ (esos son los valores que anulan $\cos x$).

Para hallar sus derivadas no necesitamos discutir el valor absoluto $\big([\log|x|]'=\frac{1}{x}\ \forall x\neq 0\big)$:

$$l'(x)=\frac{-\text{sen}\,x\,e^{\cos x}}{e^{\cos x}-1},\quad l''(x)=\frac{(\text{sen}^2x-\cos x)\,e^{\cos x}(e^{\cos x}-1)-\text{sen}^2x\,e^{2\cos x}}{(e^{\cos x}-1)^2}=\frac{(\cos x-\text{sen}^2x-\cos x\,e^{\cos x})\,e^{\cos x}}{(e^{\cos x}-1)^2},\dots$$

Tiene infinitas derivadas en D, pues cada una es cociente de derivables con denominador $\neq 0$.

Ej. $\boxed{m(x)=x|x-x^2|}$ es continua $\forall x$ por ser producto, composición... de continuas $\forall x$ $\big[\,|x|$ lo es$\big]$.

Aquí sí hay que discutir el valor absoluto (no tiene delante un logaritmo):

$$m(x)=\begin{cases}x^2-x^3 & \text{si } x\in[0,1]\\ x^3-x^2 & \text{si } x\notin(0,1)\end{cases};\quad m'(x)=\begin{cases}2x-3x^2 & \text{si } x\in(0,1)\\ 3x^2-2x & \text{si } x\notin[0,1]\end{cases};\quad m''(x)=\begin{cases}2-6x & \text{si } x\in(0,1)\\ 6x-2 & \text{si } x\notin[0,1]\end{cases}$$

Utilizando las expresiones del intervalo adecuado deducimos que:

$m'(0^-)=0=m'(0^+)$, m derivable en $x=0$; $m'(1^-)=-1\neq 1=m'(1^+)$, no derivable en $x=1$.

$m''(0^-)=-2\neq 2=m''(0^+)$, m'' no existe si $x=0$; tampoco existe $m''(1)$ por no existir $m'(1)$.

Ej. $\boxed{p(x)=x^x=e^{x\log x}}$ $\big($recordamos que se define $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\log[f(x)]}\big)$. Sus derivadas son:

$$p'(x)=e^{x\log x}[\log x+1]\ ;\ p''(x)=e^{x\log x}\big([\log x+1]^2+\tfrac{1}{x}\big)\ ;\ \dots\ \forall x>0.$$

Ej. $\boxed{q(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}}$. Hallemos q' y q'', precisando su dominio, y veamos para qué x se anulan.
q es continua en todo el $\text{dom}\,q=(-2,\infty)$ [el de la raíz donde se anula].

Siempre que podamos (como en este ejemplo) **derivaremos potencias mejor que cocientes**:

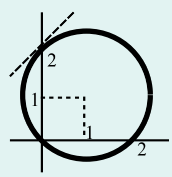
$$q(x)=x(x+2)^{-1/2},\ q'(x)=(x+2)^{-1/2}-\tfrac{x}{2}(x+2)^{-3/2},\ q''(x)=-(x+2)^{-3/2}+\tfrac{3x}{4}(x+2)^{-5/2}$$

Están definidas también si $x>-2$. Para ver dónde se anulan recuperamos los cocientes:

$$q'(x)=\frac{x+4}{2(x+2)^{3/2}},\ q''(x)=\frac{-x-8}{4(x+2)^{5/2}}\to \text{no se anulan para ningún } x\ (-4,-8\notin\text{dom}\,q).$$

Ej. Hallemos la derivada de la función definida implícitamente por la curva $\boxed{x^2+y^2-2x-2y=0}$ en un entorno del punto $(0,2)$.

$\big[$Se trata de la circunferencia $(x-1)^2+(y-1)^2=2\,\big]$.



Una posibilidad es escribir explícitamente la función que define:

$y=1+\sqrt{1+2x-x^2}$ $\big(y=1-\sqrt{\ }$ no pasa por el punto$\big)$

y derivarla: $y'(0)=(1-x)(1+2x-x^2)^{-1/2}\big|_{x=0}=1$.

Pero más corto, y válido en casos en que no podamos despejar, es **derivar implícitamente**:

$$2x+2y(x)y'(x)-2-2y'(x)=0\to y'(x)=\frac{1-x}{y-1},\ \text{que para } (x,y)=(0,2) \text{ nos da } y'(0)=1.$$

[Derivar implícitamente se puede si se obtiene una y' finita (aquí si $y\neq 1$). En cálculo de varias variables se prueba que entonces la curva define una función $y(x)$ derivable].

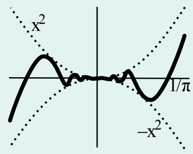
Def. Se dice que f es **derivable** en un intervalo abierto I [finito o infinito] si lo es en todos los puntos del intervalo; $f \in C^1(I)$ [es **de clase** 1 en I] si además f' es continua en I. Diremos que $f \in C^n(I)$ [**de clase** n] si f tiene n derivadas en I y $f^{(n)}$ es continua en I, y que $f \in C^\infty(I)$ [**de clase infinito**] si hay derivadas de cualquier orden de f en I.

[Para intervalos cerrados, como siempre, hay que preocuparse de los extremos:
f es derivable en $[a,b]$ si lo es en (a,b) y existen $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$;
$f \in C^1[a,b]$ si $f \in C^1(a,b)$, $f'(x) \to f'(a^+)$ si $x \to a^+$ y $f'(x) \to f'(b^-)$ si $x \to b^-$].

Todas las funciones elementales descritas en 1.4 son de C^∞ en su dominio, con excepción de $\operatorname{arc\,sen} x$ y $\operatorname{arc\,cos} x$, que no tienen siquiera una derivada en $x = \pm 1$, y x^b con $b > 0$ y $b \notin \mathbf{N}$, para la que ya no existe $f^{(n)}$ en $x = 0$ cuando el exponente de $f^{(n-1)}$ pasa a estar entre 0 y 1, que es lo que le pasa a la función g de la página anterior.

Ej. $\boxed{s(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x},\ s(0) = 0}$. Veamos que **es derivable en todo R, pero no de $C^1(\mathbf{R})$**.

Si $x \neq 0$ es producto de composiciones de derivables y las técnicas de cálculo de derivadas nos dan la expresión: $s'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

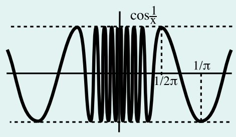


Pero para $x = 0$, un denominador se anula y debemos usar la definición:

$$s'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0 \ (0 \times \text{acot}) \ \Rightarrow \ \exists s'(0) = 0 .$$

Era previsible, pues su gráfica es la dibujada (véase 3.5) y las secantes oscilan, pero acercándose a $y = 0$.

s' no es continua en 0 por no tener s' límite: $2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\to} 0$, pero $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ no tiende a nada $\big[$por ejemplo, las sucesiones $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $b_n = \frac{1}{(2n-1)\pi} \to 0$, pero $f(a_n) = 1$ y $f(b_n) = -1 \big]$.



Por tanto, s no es $C^1(\mathbf{R})$ $\big[$aunque sí sea $C^1(-\infty, 0)$ y $C^1(0, \infty) \big]$.

Como s' no es continua en 0, no puede existir $s''(0)$. Sí existen todas las derivadas $\forall x \neq 0$:

$$s''(x) = [2 - \tfrac{1}{x^2}] \operatorname{sen} \tfrac{1}{x} - \tfrac{2}{x} \cos \tfrac{1}{x} , \ s'''(x) , \dots \ \big[\text{es decir, es de } C^\infty \text{ en } (-\infty, 0) \text{ y } (0, \infty) \big].$$

Ej. $\boxed{n(x) = \arctan \frac{1}{x^2},\ n(0) = \frac{\pi}{2}}$. Es continua obviamente si $x \neq 0$ (composición de continuas) y también lo es cuando $x = 0$: $\lim_{x \to 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} = n(0)$.

Si $x \neq 0$ es fácil hallar sus derivadas: $n'(x) = \frac{-2x^{-3}}{1 + x^{-4}} = \frac{-2x}{1 + x^4}$, $n''(x) = 2 \frac{3x^4 - 1}{(1 + x^4)^2}$, ... pero

$$n'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big[\arctan \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{2} \Big]$$ es un límite indeterminado que aún no sabemos hacer.

Es claro que $n'(x) \to 0$ si $x \to 0$, pero de ahí no podemos deducir (todavía) que $n'(0) = 0$ (nada asegura que n' sea continua; en 3.2 veremos un teorema que permitirá dar ese paso). Admitiendo $n'(0) = 0$, es $n \in C^\infty(\mathbf{R})$, pues existen $n', n'', n''', \dots$ (denominadores no nulos).

Conviene comparar con $n_*(x) = \arctan \frac{1}{x}$ (discontinua en $x = 0$ definamos como definamos $n_*(0)$, pues los límites laterales no coinciden), ya que para ella $n_*'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}$ si $x \neq 0$, y parecería que $n_*'(0) = -1$, lo que es claramente falso pues n_* no es derivable en el punto por no ser continua.

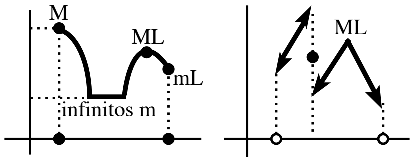
3.2. Teoremas sobre funciones derivables

Los primeros resultados buscan determinar los x de un conjunto $A\subset \mathrm{dom} f$ en los que una f alcanza sus **valores máximo y mínimo** (a ambos se les llama **valores extremos** de f). Sabemos que existen si $A=[a,b]$ y f es continua (es decir, existen $y,z\in A$ tales que $f(y)\leq f(x)\leq f(z)$ para todo $x\in A$), aunque podría no haberlos si A es otro tipo de conjunto o si f no es continua. En ocasiones se llama **absolutos** a estos extremos, para distinguirlos de los **locales o relativos**:

Def. f posee un **máximo** [**mínimo**] **local** en x sobre un conjunto $A\subset \mathrm{dom} f$ si existe un $\delta>0$ tal que el valor máximo [mínimo] de f en $A\cap B(x,\delta)$ se alcanza en x.

[Es decir, si $f(x)\geq f(x+h)$ $\big[\, f(x)\leq f(x+h)\,\big]$ $\forall h$ tal que $|h|<\delta$ y $x+h\in A$].

Está claro que si un valor extremo (absoluto) de f en A se toma en un punto x también tiene f en x un extremo local y que lo contrario es falso. Los máximos y mínimos (absolutos y locales) pueden ser infinitos o no existir, pueden darse en el borde o en el interior de A. En este caso:



Teorema:

Si f posee un extremo local en x interior a A y f es derivable en $x \Rightarrow f'(x)=0$.

[A los puntos en que se anula f' se les suele llamar **puntos críticos** de f].

Si ML en $x \Rightarrow \exists\delta$ tal que si $0<h<\delta$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq 0$, y si $-\delta<h<0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$

$$\Rightarrow\ 0\leq \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq 0\,.$$

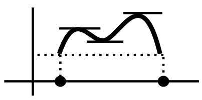
Si mL en $x \Rightarrow -f$, derivable, tiene ML en $x \Rightarrow -f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$.

Hay x con $f'(x)=0$ en los que f **no tiene extremo local** (como $f(x)=x^3$ en $x=0$).
Tampoco es cierto que deba ser $f'(x)=0$ en todo x en el que f posea un extremo local (pues x podría no ser interior o f no ser derivable en x). De esto se sigue que:

Para buscar los valores máximo y mínimo de una f en un intervalo $[a,b]$
hay que considerar:
- los extremos del intervalo a y b
- los $x\in(a,b)$ en los que $f'(x)=0$
- los $x\in(a,b)$ en los que no exista $f'(x)$

Teorema de Rolle:

f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ con $f'(c)=0$.

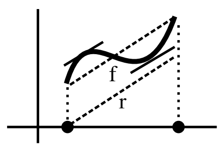


f tiene máximo y mínimo en $[a,b]$ por ser continua. Si alguno de los dos lo toma en (a,b) ya estaría. Si f toma su máximo y su mínimo en a y $b \Rightarrow f$ es constante $\Rightarrow f'(x)=0$ para cualquier x de (a,b).

Teorema del valor medio:

f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) $\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(Existe al menos un c para el que la tangente es paralela a la recta que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$; o bien, existe un instante c en el que la velocidad instantánea coincide con la media en el intervalo).



Sea $h(x)=f(x)-r(x)$, con $r(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, continua $[a,b]$,
derivable (a,b) y $h(a)=f(a)=h(b) \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c\in(a,b)$ tal que $h'(c)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

Crecimiento y decrecimiento:

Teorema:

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces:
$f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$;
$f'(x)<0$ para todo $x\in(a,b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$;
$f'(x)=0$ para todo $x\in(a,b) \Rightarrow f$ es constante en $[a,b]$.

Como $f\in C^1[a,b] \Rightarrow f$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), se podría pedir sólo en estos teoremas que f fuese C^1. Pero pediríamos demasiado, dejando fuera funciones como $f(x)=x^{1/2}$, que no es $C^1[0,1]$ pero sí es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.

Sea $[x,y]\subset[a,b]$. Por el teorema del valor medio $\exists c\in(x,y)$ con $f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
Por tanto, si $f'(c) >, <, = 0 \Rightarrow f(y) >, <, = f(x)$, respectivamente.

Se ve en la demostración que **podemos sustituir en hipótesis y conclusiones '$[a,$' por '$(-\infty,$' y '$,b]$' por '$,\infty)$'**. Observemos también que **a f' se le piden cosas sólo en el abierto, pero el resultado se tiene en todo el cerrado**.

Teorema (condición suficiente de extremo):

Sea f de C^2 en un entorno de c y sea $f'(c)=0$. Entonces: si $f''(c)>0$, f posee un mínimo local en c, y si $f''(c)<0$, f posee un máximo local en c.

[Si $f''(c)=0$ podría haber en c un máximo, un mínimo o ninguna de las dos cosas. Como veremos en los ejemplos, es muchas veces más cómodo deducir si en c hay máximo o mínimo mirando el crecimiento y decrececimiento en vez de usar este teorema].

$f''(c)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-0}{h}>0 \Rightarrow$ para h pequeño $f'(c+h)$ y h tienen el mismo signo $\Rightarrow$
f decrece en un intervalo a la izquierda ($h<0$) y crece en uno a la derecha ($h>0$).

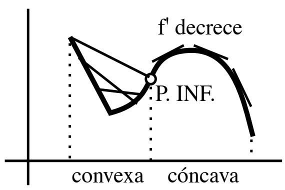
[Análogamente (o considerando $-f$) se prueba la condición de máximo].

[Los resultados anteriores dan mucha información sobre temas (ligados a las definiciones de 1.4 o a los teoremas de 2.3) que hasta ahora nos costaba o no podíamos precisar: hallar la $\operatorname{im} f$ (hallando sus máximos y mínimos), saber que f es estrictamente monónota (y, por tanto, que existe su inversa f^{-1}) en un intervalo, fijar el número de ceros de f (unido a Bolzano), ...].

Concavidad y convexidad:

Def.

f es **convexa hacia abajo** en un intervalo I si $\forall x,y\in I$ el segmento que une $(x,f(x))$ con $(y,f(y))$ está por encima de la gráfica de f. f es **cóncava** si $-f$ es convexa.
Se llama **punto de inflexión** a uno de la gráfica en la que ésta pasa de convexa a cóncava o viceversa.



[Hay libros que llaman cóncava a lo que nosotros llamamos convexa y viceversa; otros, dicen que se dobla hacia arriba (∪), o hacia abajo (∩)].

Teorema:

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable dos veces en (a,b).
Si $f''\geq 0$ ($f''\leq 0$) en (a,b), es f convexa (cóncava) en $[a,b]$.
Si $(c,f(c))$ es un punto de inflexión, debe ser $f''(c)=0$.

[No lo demostramos; geométricamente está claro: f es $\cup$ si la pendiente de la tangente va creciendo (y si $f''\geq 0$, la f' crece); es $\cap$ si decrece; en un punto de inflexión hay un máximo o mínimo de la f' (pasa de crecer a decrecer o al revés); puede ocurrir que $f''(c)=0$ y que en $(c,f(c))$ no haya punto de inflexión como le ocurre a la función $f(x)=x^4$ en $x=0$].

Tres ejemplos de cálculo de extremos en intervalos (o algo más):

Ej. Hallemos los valores máximo y mínimo de $\boxed{f(x)=\log(1+x^2)-|x-2|}$ en el intervalo $[-2,3]$.

Tales valores han de existir por ser f continua en el intervalo (lo es en todo $\mathbf{R}$). Y sabemos que se toman, o en los extremos del intervalo, o en los puntos en que f no es derivable (en nuestro caso, sólo en $x=2$) o en los puntos en que se anula la derivada:

$$f(x)=\begin{cases}\log(1+x^2)-x+2\,,\ x\geq 2\\ \log(1+x^2)+x-2\,,\ x\leq 2\end{cases}\ \Rightarrow\ f'(x)=\begin{cases}-(1-x)^2/(1+x^2)\,,\ x>2\\ (1+x)^2/(1+x^2)\,,\ x<2\end{cases}$$

Por tanto, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Basta comparar los valores en los cuatro puntos candidatos:

$$f(-2)=\log 5-4\,,\quad f(-1)=\log 2-3\,,\quad f(2)=\log 5\,,\quad f(3)=\log 10-1\,.$$

Con una calculadora: $f(-2)\approx -2.4$, $f(-1)\approx -2.3$, $f(2)\approx 1.6$, $f(3)\approx 1.3$

$\Rightarrow$ **el máximo se da en** $x=2$ **y él mínimo en** $x=-2$.

Pero sin calculadora también podemos decirlo. Analizando crecimiento y decrecimiento queda gran parte del trabajo hecho. Mirando f' es inmediato que f crece desde $-\infty$ hasta 2 y que decrece a partir de 2, con lo que el valor máximo debe ser $f(2)$. Sólo queda comparar $f(-2)$ con $f(3)$, lo que, en este caso es muy sencillo, pues el primero es negativo y el otro positivo:

$$\log 5<4 \text{ pues } 5<2^4<e^4 \quad\text{y}\quad \log 10>1 \text{ pues } 10>e\,.$$

En otro tipo de intervalos puede que los extremos no se alcancen. Por ejemplo, **en** $(-2,0)$ **no existen ni el valor máximo ni el mínimo**: $f(-2)$ es el ínfimo de los valores, pero no mínimo, y $f(0)=-2$ es sólo el supremo.

Y en $[-2,\infty)$, aunque el **máximo** sigue siendo $f(2)$, para ver si hay mínimo debemos comparar $f(-2)$ y 'el valor de f en el infinito', es decir, el límite de $f(x)$ si $x\to\infty$. Con la regla de L'Hôpital del final de la sección:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x\left[\tfrac{\log(1+x^2)}{x}-1+\tfrac{2}{x}\right]=\text{“}\infty[0-1+0]=-\infty\text{”},$$

con lo que **el valor mínimo no existe** (tampoco existe el ínfimo) en el intervalo $[-2,\infty)$.

Ej. Hallar, si existen, los valores extremos de $\boxed{e(x)=x^2e^{-2x/3}}$ en los intervalos: i) $[-1,6]$ ii) $[6,\infty)$.

$$e'(x)=\left(2x-\tfrac{2}{3}x^2\right)e^{-2x/3}=\tfrac{2}{3}x(3-x)e^{-2x/3}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l} e \text{ crece en } [0,3]\,.\\ e \text{ decrece en } (-\infty,0] \text{ y en } [3,\infty)\,.\end{array}$$

i) Existen seguro los valores extremos porque e es continua en el intervalo cerrado.

Candidatos: $e(-1)=e^{2/3}$, $e(0)=0$, $e(3)=9e^{-2}$, $e(6)=36e^{-4}$.

El valor **mínimo** es obviamente $e(0)=0$ (los otros son estrictamente positivos). El máximo (a la vista del crecimiento) se da en $x=-1$ ó $x=3$. ¿Es $e^{2/3}\gtrless 9e^{-2} \Leftrightarrow e^{4/3}\gtrless 3 \Leftrightarrow e^4\gtrless 27$? Como $e>\frac{5}{2}$, es $e^4>\frac{625}{16}>27$, pues $625>16\cdot 27=432$. El valor **máximo** es $f(-1)=e^{2/3}$.

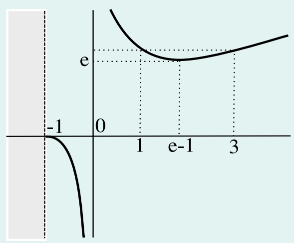
ii) En $[6,\infty)$ pueden no alcanzarse los valores extremos. En este caso la f es estrictamente decreciente en todo el intervalo, por lo que el valor máximo es $36e^{-4}$ y el mínimo no existe.

$\big[$Como $f\underset{x\to\infty}{\to}0$ (L'Hôpital), 0 es el extremo inferior de los valores de f, pero no se alcanza$\big]$.

Ej. Sea $\boxed{g(x)=\frac{1+x}{\log(1+x)}}$. Determinemos su dominio, su imagen y sus valores extremos en $[1,3]$.

$\operatorname{dom} g=(-1,0)\cup(0,\infty)$ [donde $1+x>0$ y el denominador $\neq 0$].

$$g'(x)=\frac{\log(1+x)-1}{[\log(1+x)]^2}\ \begin{array}{l} >0,\ x\in(e-1,\infty)\to g \text{ crece en } [e-1,\infty)\\ =0,\ x=e-1\\ <0,\ x\in(-1,0)\cup(0,e-1)\to g \text{ decrece } \begin{array}{l}\text{en } (-1,0)\\ \text{y en } (0,e-1]\end{array}\end{array}$$



Además $g\underset{x\to-1^+}{\longrightarrow}\frac{0}{-\infty}=0$, $g\underset{x\to 0^\pm}{\to}\frac{1}{0\pm}=\pm\infty \Rightarrow \operatorname{im} g=(-\infty,0)\cup[e,\infty)$.

g es continua en $[1,3]$ y los extremos han de existir. Candidatos:

$$g(1)=\tfrac{2}{\log 2}\,,\ g(3)=\tfrac{4}{\log 4}=\tfrac{2}{\log 2}\,,\ g(e-1)=\tfrac{e}{\log e}=e\,.$$

Esto, junto al estudio del crecimiento, asegura que **el valor mínimo es** e **y el máximo es** $\frac{2}{\log 2}$.

En los tres siguientes nos preocupamos por el número de ceros de las funciones:

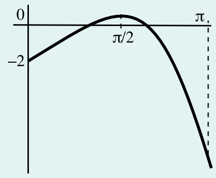
Ej. Sea $\boxed{n(x)=x^2+4\arctan x}$. Determinar su imagen y precisar cuántos ceros tiene en $[-1,1]$.

$$n'(x)=2\,\frac{x^3+x+2}{1+x^2}=2\,\frac{(x+1)\overbrace{(x^2-x+2)}^{>0}}{1+x^2} \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} n \text{ crece desde } -1 \\ \text{y antes decrece}\end{array} \;\Rightarrow\; n(-1)=1-\pi \text{ valor mínimo.}$$

n continua en todo $\mathbf{R}$, $1-\pi$ valor mínimo absoluto y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} n=\infty \;\Rightarrow\; \boxed{\operatorname{im} n=[1-\pi,\infty)}$.

Como $n(-1)<0$, $n(1)=\pi+1>0$, y n es estrictamente creciente en $[-1,1]$, el teorema de Bolzano y la monotonía aseguran que n **se anula exactamente 1 vez** en el intervalo.

Ej. Estudiemos cuántas veces se anula $\boxed{h(x)=x^2\operatorname{sen}x+2x\cos x-2}$ en el intervalo $[0,\pi]$.

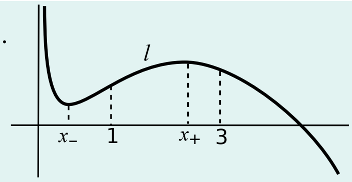


Como $h(0)=-2<0$ y $h(\pi)=-2\pi-2<0$ el teorema de Bolzano no nos dice (en principio) nada. Analicemos h' :

$h'(x)=(x^2+2)\cos x \;\Rightarrow\; h$ creciente en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y decreciente en $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2-8}{4}>0 \overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}$ al menos hay un cero en cada intervalo, y por ser estrictamente monótona en cada uno, h **tiene exactamente 2 ceros**.

Ej. $\boxed{l(x)=3\arctan x-\log x}$. $\operatorname{dom}=(0,\infty)$. $l \xrightarrow{x\to 0^+} \infty$, $l \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$.



$l'(x)=-\frac{x^2-3x+1}{x(1+x^2)}=-\frac{(x-x_-)(x-x_+)}{x(1+x^2)}$, con $x_\pm=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

$2<\sqrt{5}<3 \;\Rightarrow\; x_-\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $x_+\in\left(\frac{5}{2},3\right)$.

l decrece en $(0,x_-]$, $l(x_-)>0$ $\left[\arctan x,-\log x>0 \text{ en } (0,1)\right]$,

$l(1)=\frac{\pi}{4}$ (único valor que podemos dar sin calculadora), l crece en $[x_-,x_+]$ y decrece en $[x_+,\infty)$

$\Rightarrow$ la función continua l **corta una única vez el eje** x en un $c>x_+$ de $(0,\infty)$.

Y un par de ejemplos más de utilización de los teoremas de esta sección:

Ej. Probar que $\boxed{k(x)=e^{\operatorname{sh}x}+x}$ tiene función inversa k^{-1} en todo su dominio y calcular $(k^{-1})'(1)$.

$k'(x)=\operatorname{ch}x\, e^{\operatorname{sh}x}+1>0\ \forall x \;\Rightarrow\; k$ es estrictamente creciente en todo $\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ existe su inversa.

Por ser k derivable, k^{-1} también lo es y se tiene que: $(k^{-1})'(1)=\frac{1}{k'(k^{-1}(1))}=\frac{1}{k'(0)}=\frac{1}{2}$,

pues claramente $k(0)=1$ [esto es lo difícil; no sabríamos decir, por ejemplo, quién es $k^{-1}(0)$].

Ej. Sea $\boxed{r(x)=\frac{x^3-6x^2-8}{x}}$. Estudiemos crecimiento y decrecimiento, extremos, concavidad...

La función es continua (y de C^∞) si $x\neq 0$. Para derivarla ponemos mejor $r(x)=x^2-6x-\frac{8}{x}$

$$r'(x)=2x-6+\frac{8}{x^2}=2\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}=2\frac{[x+1][x-2]^2}{x^2}\ \left[=0\text{, si } \begin{array}{c}x=-1\\x=2\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\; r'<0 \text{ si } x\in(-\infty,-1) \text{ y } r'>0 \text{ si } x\in(-1,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty).$$

De esto deducimos que r decrece en $(-\infty,-1]$ y que crece en $[-1,0)$ y en $(0,\infty)$ [$x=2$ incluido]; pero no crece en todo $[-1,\infty)$ (es discontinua en 0). Por tanto, tiene mínimo local en $x=-1$ y no tiene ni máximo ni mínimo en $x=2$ (a pesar de ser $r'=0$).

Concluir esto a partir de la condición suficiente de extremo cuesta más:

$$r''(x)=2-\frac{16}{x^3} \;\Rightarrow\; \begin{cases} r''(-1)=18 \text{ (mínimo, como ya sabíamos sin hallar } r''\text{).} \\ r''(2)=0 \text{ (??, pero la } r' \text{ nos dijo que ni máximo ni mínimo).}\end{cases}$$

Como $r''(x)=\frac{2[x^3-8]}{x^3}$ es negativa en $(0,2)$ y positiva en el resto, r es convexa en $(-\infty,0)$ y en $[2,\infty)$, y es cóncava en $(0,2]$. $x=2$ es punto de inflexión.

[Con estos datos y pocos más: $r(x)\underset{x\to 0^\pm}{\longrightarrow}\mp\infty$, $r(x)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\infty$, $r(-1)=15$, $r(2)=-12$, sería fácil dibujar la gráfica de r . Observemos que no podemos dar el x exacto tal que $r(x)=0$].

El siguiente teorema es el que prueba que una función como la $n(x)=\arctan\frac{1}{x^2}$, $n(0)=\frac{\pi}{2}$ de la sección anterior es derivable en $x=0$ y que $n'(0)=0$:

Teorema: $\boxed{\text{Si } f \text{ es continua en } a \text{ y } f' \text{ tiene límite cuando } x\to a \ \Rightarrow\ f'(a)=\lim\limits_{x\to a} f'(x)\,.}$

Como f' tiene límite, debe existir en un entorno de a . El TVM en $[a,a{+}h]$ (ó $[a{+}h,a]$) dice que $\exists x_h\in(a,a{+}h)$ con $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(x_h)$. Si $h\to 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\to f'(a)$, $x_h\to a$.

[Se ve en la demostración que **si** $f'(x)\to\infty$ **ó** $-\infty$ **no existirá** $f'(a)$ (la recta tangente será vertical), pero puede no tener límite f' y existir la $f'(a)$ (hay funciones derivables que no son C^1)].

Acabamos la sección con la regla de L'Hôpital. Aplazaremos su uso sistemático al capítulo 4 (para comparar con Taylor), pero vamos justificando algunos de los límites adelantados en 2.1.

Para probarla generalizamos el teorema del valor medio:

Teorema del valor medio de Cauchy:

Sean f y g continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) $\Rightarrow$ $\exists c\in(a,b)$ tal que $[f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)$

[para $f(x)=x$ se recupera el teorema del valor medio].

(Se demuestra aplicando Rolle a $h(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)]$).

Regla de L'Hôpital:

Si $f(x),g(x)\underset{x\to a}{\to}0$ $\big($ó $\underset{x\to a}{\to}\pm\infty\big)$ y existe el $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.   La regla sigue siendo válida cambiando el a del enunciado por $a^+,\ a^-,\ +\infty$ ó $-\infty$.

La probamos sólo para $f,g\to 0$ si $x\to a,a^+$ ó a^- . Como el límite de f'/g' existe, para $x{-}a$ pequeño, definiendo $f(a)=g(a)=0$, f y g son continuas en $[a,x]$ y derivables en (a,x) , y es $g'\neq 0$ en (a,x) . Por el TVM de Cauchy $\exists c\in(a,x)$ con $f(x)g'(c)=g(x)f'(c)$. Como $g(x)\neq 0$ [si fuese $=0$, por Rolle sería $g'(z)=0$ para algún $z\in(a,x)$] se puede escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ y por tanto } \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ pues } x\to a^+ \Rightarrow c\to a^+.$$

Análogamente se demostraría para $x\to a^-$, de donde se deduciría para $x\to a$.

Ej. Hallemos dos límites indeterminados $\frac{\infty}{\infty}$ que nos han aparecido en ejemplos de esta sección:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1{+}x^2)}{x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x/(1{+}x^2)}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1{+}x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}+x}=0 \text{ [el último paso no necesita L'H].}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x/3}}\overset{\text{L'H}}{=}3\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x/3}}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{9}{2}\frac{1}{e^{2x/3}}=0\,.$$

El segundo límite es un caso particular de uno de los dos famosos $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ que vamos ya a calcular:

$$\boxed{\text{Si } a,b>0:\ \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^a}{x^b}=0\,,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^{bx}}=0\,.}$$

$$\frac{\log x}{x^b}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{1/x}{bx^{b-1}}=\frac{1}{bx^b}\to 0 \Rightarrow \frac{(\log x)^a}{x^b}=\Big[\frac{\log x}{x^{b/a}}\Big]^a\to 0\ ,\quad \frac{x}{e^{bx}}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{1}{b\,e^{bx}}\to 0\Rightarrow\frac{x^a}{e^{bx}}=\Big[\frac{x}{e^{bx/a}}\Big]^a\to 0\,.$$

De ellos se deducen los límites análogos para sucesiones (que amplían el número de límites que sabemos calcular): $\boxed{\frac{(\log n)^a}{n^b}\,,\ \frac{n^a}{e^{bn}}\to 0\,,\ a,b>0}$

3.3. Polinomios

Un tipo de funciones que aparecen continuamente son los polinomios. Ahora que disponemos ya de teoremas sobre funciones continuas y de la derivada volvemos a estudiarlos.

Un polinomio de grado n es: $\boxed{P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}$, $a_k\in\mathbf{R}$, $a_n\neq 0$.

Ya tratamos el de segundo grado: $P_2(x)=ax^2+bx+c=a[x+\frac{b}{2a}]^2-\frac{\Delta}{4a}$, $\Delta=b^2-4ac$, $a\neq 0$.
Su gráfica es (ver 3.4) la de $y=x^2$ trasladada a izquierda o derecha, multiplicada por una constante (positiva o negativa) y trasladada hacia arriba o abajo. A partir de $P_2'(x)=2ax+b$ volvemos a ver que su extremo se toma en $x=-\frac{b}{2a}$. Sus raíces (reales, dobles o complejas dependiendo del signo de Δ) eran: $x=\frac{1}{2a}[-b\pm\sqrt{\Delta}]$. Observemos que la raíz doble $-\frac{b}{2a}$ también es raíz de $P_2'(x)$.

P_2 puede tener o no raíces reales. Como cualquiera de grado par. Sin embargo:

$$\boxed{\text{Un polinomio de grado impar posee por lo menos una raíz real.}}$$

$P_n(x)=a_nx^n[1+\cdots+\frac{a_0}{a_n}x^{-n}]$ y sea, por ejemplo, $a_n>0$. Si n es impar, $P_n(x)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\pm\infty$.
Hay pues a con $P_n(a)<0$ y b con $P_n(b)>0$. Por Bolzano, $\exists c\in(a,b)$ con $P_n(c)=0$.

El **teorema fundamental del álgebra** asegura que P_n tiene n raíces $x_1,\dots,x_n$ (reales o complejas, repetidas o no). Si pudiésemos hallarlas podríamos escribir: $P_n(x)=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Como las complejas aparecen por parejas $p\pm q\mathrm{i}$, cada par de productos $(x-[p+q\mathrm{i}])(x-[p-q\mathrm{i}])$ en la descomposición de $P_n(x)$ da lugar a un polinomio de segundo orden con coeficientes reales $x^2-2px+(p^2+q^2)$. Así pues, si conocemos las raíces el P_n se puede factorizar:

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_r)(x^2+b_1x+c_1)\cdots(x^2+b_sx+c_s)\,,\ \text{con } r+2s=n\,,\ x_k,b_k,c_k\in\mathbf{R}$$

Algunas raíces podrían estar repetidas. No es difícil ver que si $x=x_k$ es raíz simple de P_n entonces no anula la derivada P_n' y que sí la anula si es raíz múltiple. Por tanto:

$$\boxed{\text{Una raíz de un polinomio es múltiple si y sólo si es raíz también de su derivada.}}$$

Ej. $\boxed{P_4(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+2}$. P_4 es sencillo por tener raíces enteras y ser calculables todas.
Tanteando con los divisores de 2 observamos que $x=-1$ lo es.
Dividimos por $(x+1)$ y vemos que $x=-1$ vuelve a ser raíz.
Por tanto es $P_4(x)=(x+1)^2(x^2+2)$, ya factorizado.
Es $x=-1$ también raíz de $P_4'(x)=2(2x^3+3x^2+3x+2)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & & -1 & -1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & & -1 & 0 & -2 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Una raíz múltiple debe ser raíz del máximo común divisor de P_n y P_n' . Una forma de hallar este mcd es mediante el **algoritmo de Euclides** (similar al visto para los números enteros): dados P , Q [con $gr(P)\geq gr(Q)$], se divide P entre Q y se llama R_1 al resto obtenido (si conviene, multiplicado por una constante); a continuación se divide Q entre R_1 y se llama R_2 al nuevo resto; luego R_1 entre R_2 ... hasta obtener un resto nulo. El $\operatorname{mcd}(P,Q)$ es el último resto no nulo del proceso anterior.

Ej. Calculemos con este algoritmo el $\operatorname{mcd}(P_4,P_4')$ para el $P_4(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+2$ de arriba.
Para empezar, multiplicamos P_4 por 4 y dividimos entre $2x^3+3x^2+3x+2$:

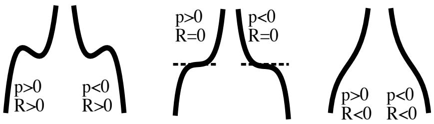
$$\begin{array}{rrrrr} 4 & 8 & 12 & 16 & 8 \\ -4 & -6 & -6 & -4 & \\ \hline & 2 & 6 & 12 & 8 \\ & -2 & -3 & -3 & -2 \\ \hline & & 3 & 9 & 6 \end{array}\ \begin{array}{|rrrr} 2 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & & \end{array}\qquad \begin{array}{rrrr} 2 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -4 & \\ \hline & -3 & -1 & 2 \\ & 3 & 9 & 6 \\ \hline & & 8 & 8 \end{array}\ \begin{array}{|rrr} 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & -3 & \end{array}\qquad \begin{array}{rrr} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & \\ \hline & 2 & 2 \\ & -2 & -2 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\ \begin{array}{|rr} 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow R_1=x^2+3x+2 \qquad\qquad \Rightarrow R_2=x+1 \qquad\qquad \Rightarrow R_3=0$$

Por tanto, $\operatorname{mcd}(P,P')=x+1 \Rightarrow P$ tiene $x=-1$ como raíz doble, como vimos antes.
[En este ejemplo era innecesario, pero será útil cuando haya raíces múltiples no enteras].

Ya comentamos en 1.3 la imposibilidad de expresar mediante radicales las raíces de los P_n de grado mayor que 5. Tratemos ahora un caso en que sí hay fórmulas (complicadas) para las raíces, el cúbico:

$$\boxed{P_3(x) = px^3+qx^2+rx+s}\ ,\ p\neq 0\,.$$



Veamos cómo puede ser su gráfica. $P_3'(x)=3px^2+2qx+r$ puede tener 2 raíces reales, 1 doble o ninguna real (según $R\equiv q^2-3pr$ sea $>,=$ ó <0), y así P_3 puede tener un máximo y un mínimo, un punto de inflexión con tangente horizontal o tener su derivada signo constante.

Si P_3 tiene raíz múltiple debe ser $px^3+qx^2+rx+s = 3px^2+2qx+r=0$. Eliminando la x entre ambas ecuaciones se obtiene la expresión de su discriminante $\Delta = q^2r^2-4pr^3-4q^3s+18pqrs-27p^2s^2$.
Llamando $S\equiv 27p^2s-9pqr+2q^3$, este Δ se puede escribir más compacto: $\Delta = \frac{1}{27p^2}[4R^3-S^2]$.
Se puede probar además que las raíces de P_3 vienen dadas por las siguientes fórmulas:
Si $\Delta=0$, hay una raíz doble dada por $x_d = \frac{1}{3p}\Big[-q+\sqrt[3]{\tfrac{S}{2}}\,\Big]$ y otra simple $x_s = \frac{1}{3p}\Big[-q-2\sqrt[3]{\tfrac{S}{2}}\,\Big]$.
Si $\Delta<0$, existe una única raíz real de P_3: $x_r = -\frac{q}{3p}+\frac{1}{3p}\Big[\frac{-S+\sqrt{S^2-4R^3}}{2}\Big]^{1/3}+\frac{1}{3p}\Big[\frac{-S-\sqrt{S^2-4R^3}}{2}\Big]^{1/3}$.
Por último, si $\Delta>0$ ($\Rightarrow R>0$), hay tres raíces reales distintas de P_3 que se pueden expresar:

$$x_{1,2,3} = -\frac{q}{3p}+\frac{2\sqrt{R}}{3p}\cos\frac{\phi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2\ ,\ \text{siendo}\ \phi = \arccos\Big(\frac{-S}{2R^{3/2}}\Big)\,.$$

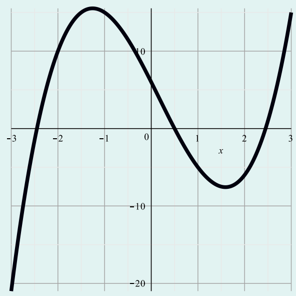
Sin utilizar el Δ anterior, es fácil decir cuántas raíces reales tiene cualquier P_3, por ser su gráfica sencilla (sus extremos se pueden hallar, lo que no pasa en los de mayor orden).

Ej. $\boxed{P_3(x)=2x^3-x^2-12x+6}$ No tiene raíces enteras, pues no lo son $\pm 6, \pm 3, \pm 2$ ni ± 1. No hay atajos para calcular sus raíces.

Precisemos cuántas de ellas son reales.

$P_3'(x)=2(3x^2-x-6)=0 \;\to\; x_\pm = \frac{1}{6}\big[1\pm\sqrt{73}\big]\approx 1.59\,, -1.26\,.$

Como $P_3(x_-)\approx 15.53>0$ y $P_3(x_+)\approx -7.57<0$, su aspecto es el de la derecha y concluimos que tiene 3 raíces reales distintas.



Podemos localizar mejor esas raíces utilizando Bolzano:

$P_3(-3)=-21\,,\ P_3(-2)=10\,,\ P_3(0)=6\,,\ P_3(1)=-5\,,$
$P_3(2)=-6\,,\ P_3(3)=15$. Están en $[-3,-2]$, $[0,1]$ y $[2,3]$.

Utilizando las fórmulas de arriba se tiene que: $R=73$, $S=430$, $\Delta=12696 \to$ tres raíces reales.

$\phi\approx 1.9227264 \;\to\; x_{1,2,3}\approx$ 2.44949, –2.44949, 0.50000

[Los errores de redondeo del cálculo aconsejan acudir a métodos numéricos incluso para P_3].

Existen fórmulas similares para las raíces de los polinomios de **cuarto grado**, pero son todavía más complicadas. En 1.3 vimos cómo hallarlas en dos casos sencillos:

$$P_4(x) = ax^4+bx^2+c \quad \text{y} \quad P_4(x) = ax^4+bx^3+cx^2+bx+a\,.$$

Y observemos que ya para los de cuarto grado ya no es fácil, en general, saber cuántas raíces reales tienen, pues las raíces de su derivada (de tercer grado) ya no son calculables exactamente.

Como casi nunca se pueden dar las raíces exactas de un P_n, habrá que aproximarlas con métodos numéricos (a eso nos dedicaremos en 5.6). Para aplicarlos será útil saber cuántas hay y más o menos dónde están. Nuestro objetivo es **separar las raíces reales**, o sea, **conocer su número exacto y localizar intervalos** $[a,b]$ **en los que sólo haya una de ellas**. El teorema de Bolzano informa, pero no basta en general: si encontramos un $[a,b]$ con $P(a)P(b)<0$, hay al menos una raíz en (a,b) pero podría haber más (si P' no lo impide).

El último resultado que damos para polinomios es fácil de aplicar pero suele dejar dudas:

Ley de Descartes de los signos.

Sea P un polinomio de grado n con término independiente no nulo. Si r es el número de raíces reales positivas de P y s el número de cambios de signo en la sucesión de sus coeficientes, es $r \leq s$ y $s-r$ es un número par (o cero).

[Cambiando x por $-x$ se obtiene el resultado análogo para las raíces negativas].
[Se tiene en cuenta la multiplicidad (una raíz doble cuenta por dos)].

Lo probamos (en el caso más simple: $a_k \neq 0\ \forall k$). Podemos suponer $a_n > 0$. Inducción sobre n. Es cierto para $n=1$: $a_1x+a_0=0$ tiene una raíz positiva ($r=1$) si a_1 y a_0 tienen signos opuestos ($s=1$); y $r=0$ si $s=0$. Supongámoslo ahora cierto para los P de orden $n-1$ y demostrémoslo para los de n: Sean s' y r' los números de cambios y raíces para P'. Si $\operatorname{sg}(a_1)=\operatorname{sg}(a_0)$, es $s=s'$, y como (fácil de ver) $(-1)^r$ y $(-1)^{r'}$ son los signos de sus términos independientes, r y r' tienen la misma paridad; si $\operatorname{sg}(a_1)\neq\operatorname{sg}(a_0)$, $s=s'+1$ y r es de paridad opuesta a r'; en ambos casos, $s-r$ y $s'-r'$ tienen la misma paridad; como para P' (de orden $n-1$) estamos suponiendo cierto Descartes, deducimos que $s-r$ es par. No es difícil deducir de Rolle, además, que $r'\geq r$ ó $r'\geq r-1$, respectivamente, en los casos de antes; de ahí se obtiene que en ambos casos es $s-r\geq s'-r'$, número que estamos suponiendo positivo.

Ej. Para P_3 sus coeficientes $2, -1, -12, 6$ $(+--+)$ presentan $s=2$ cambios de signo.
Esto nos asegura, sin hacer ninguna cuenta más, que tiene ó 2 ó 0 raíces positivas.
Cambiando x por $-x$ obtenemos $-2x^3-x^2+12x+6$ $(--++)$.
Como $s=1$, seguro que hay una única raíz real negativa.
Calculando el Δ (o analizando su gráfica) vimos que hay 3 reales y con ello resolvemos la duda que nos dejaba Descartes: hay 2 positivas.

Ej. Para el P_4 de la raíz doble podíamos afirmar que no tiene raíces positivas ($+++++$, $s=0$) y como tras hacer x por $-x$ aparece $+-+-+$ podían existir 4, 2 ó 0 raíces negativas.
Para este polinomio factorizable, realmente había 2 negativas (1 doble; y además 2 complejas).

Ej. Para $Q_4(x)=9x^4+8x^3+28x^2+24x+3$, Descartes nos dice lo mismo que en ejemplo anterior: 0 positivas y 4, 2 ó 0 negativas. (Pero no podemos salir de la duda por no tener raíces enteras).

Ej. Para $P_5(x)=x^5+2x^3+x+2$, Descartes nos precisa todo: $++++ \to 0$ positivas. $---+ \to 1$ negativa.
Pero esto lo podemos probar también de una forma sencilla directamente:
$P_5'(x)=5x^4+6x^2+1>0\ \forall x \Rightarrow P_5$ es estrictamente creciente. Y además $P_5(0)=2>0$.
Como es $P_5(-1)=-2<0$, ese cero negativo estará en el intervalo $(-1,0)$.

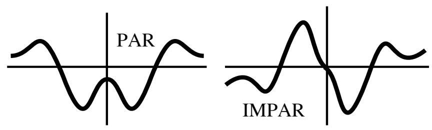
3.4. Representación de funciones

Cada función pide un tratamiento diferente. Las siguientes ideas no son una receta que haya que seguir desde el principio hasta el final. Por ejemplo, no tiene sentido buscar asíntotas verticales en una función continua en todo punto o empeñarse en calcular derivadas muy complicadas. La práctica en el dibujo de gráficas nos irá sugiriendo los tipos de cálculos a realizar en cada caso. Es importante conocer las gráficas de las funciones elementales.

- **Determinación del dominio**, y de los puntos en que f no es continua (posibles saltos de la función) o no derivable (picos de la gráfica, pendientes verticales).

- **Simetrías**: Si $f(-x)=f(x)$, función par, la gráfica de f es simétrica respecto al eje $x=0$.

  Si $f(-x)=-f(x)$, función impar, la gráfica de f es simétrica respecto al origen.



- **Periodicidad** (sólo para algunas funciones trigonométricas): si $f(x+T)=f(x)$ basta pintar la gráfica en un intervalo de longitud T pues luego se repite periódicamente.

- **Asíntotas**: Verticales (rectas $x=c$): f tiende a $+\infty$ ó $-\infty$ cuando $x\to c^-$ ó $x\to c^+$ (bastantes veces se puede calcular de una vez el límite cuando $x\to c$, pero otras son precisos los laterales). Horizontales (rectas $y=c$): f tiende a c si $x\to+\infty$ ó $-\infty$.

  Si no existen asíntotas horizontales (y la forma de la función lo aconseja) intentaremos escribir $f(x)=g(x)+h(x)$, con g función conocida y $h(x)\to 0$ si $x\to+\infty$ (ó $-\infty$) . Entonces la gráfica de f se parecerá a la de g para x muy grandes (ó muy negativos). En particular, hallaremos así las posibles asíntotas oblicuas, sin recetas de memoria.

  [En ocasiones todos estos límites se podrán hallar con los teoremas del capítulo 2 (los del tipo "$7/\infty=0$"), pero si son indeterminados habrá que usar L'Hôpital o Taylor (4.5); el desarrollo de Taylor, además, dará idea de la forma de la función cerca de un punto].

- **Información a partir de las derivadas** (utilizando los teoremas de 3.2):

  A partir de la f' : crecimiento y decrecimiento ($f'>0$ y $f'<0$); puntos x en los que f posee extremos locales (si $f'(c)=0$, para ver si f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión con tangente horizontal en c , es muchas veces más fácil precisar el signo de f' antes y después de c que calcular la $f''(c)$; incluso, en ocasiones, basta dar valores a f en la proximidad de c para verlo; puede haber extremos en puntos sin derivada).

  A partir de la f'' : puntos de inflexión ($f''(c)=0$, aunque esto pueda no bastar); intervalos de concavidad y convexidad.

  [Si no podemos hallar explícitamente los ceros de f' ó f'' intentaremos localizar cuántos hay y en qué intervalos están (Bolzano ayuda). Muchas ocasiones esos ceros serán raíces de polinomios (y será aplicable 3.3). El método de Newton de 3.6 nos permitirá aproximar los ceros con la precisión deseada si disponemos de ordenador].

- **Valores concretos de** $f(x)$: En $x=0$ (corte con el eje y); en los x tales que $f'(x)=0$ o en los que no exista f' , en puntos cercanos a estos x ; en los x tales que $f''(x)=0$; en x de zonas en las que sepamos poco de la gráfica.

  Valores de x que hagan $f(x)=0$ (cortes con el eje x , quizás no calculables como ocurría con los ceros de f' y f''), deduciendo en qué intervalos $f(x)$ es positiva o negativa.

  A veces conviene también dar valores de f' (pendiente de la gráfica) en algún punto.

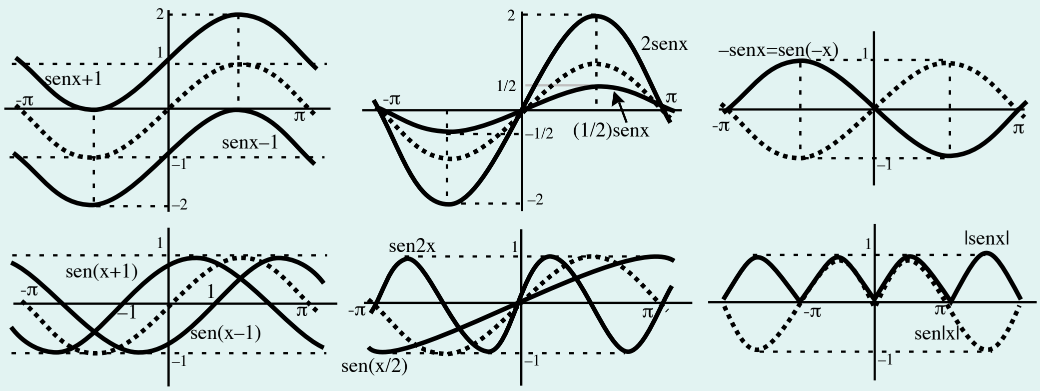
Hay funciones complicadas para las que casi todo fallará y habrá que limitarse a dar valores (en ese momento serán especialmente útiles las calculadoras y ordenadores). Al final del capítulo 4 (cuando dominemos Taylor y los límites difíciles) dibujaremos más gráficas.

Se deducen de la gráfica de $f(x)$ las gráficas de:
$f(x)+c$ **,** $f(x+c)$ **,** $cf(x)$ **,** $f(cx)$ **,** $-f(x)$ **,** $f(-x)$ **,** $|f(x)|$ **y** $f(|x|)$

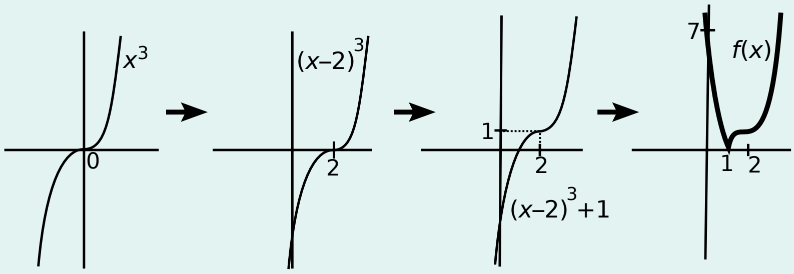
La de $f(x)+c$ es la de $f(x)$ trasladada c unidades hacia arriba ($c>0$) o abajo ($c<0$).
La de $f(x+c)$ es la de $f(x)$ trasladada c unidades hacia la izquierda o derecha ($c>,<0$).
La de $cf(x)$ con $c>1$ ($0<c<1$) es la de $f(x)$ estirada (comprimida) verticalmente.
La de $f(cx)$ con $c>1$ ($0<c<1$) es la de $f(x)$ comprimida (estirada) horizontalmente.
La de $-f(x)$ es la reflexión de la gráfica de $f(x)$ respecto a $y=0$.
La de $f(-x)$ es la reflexión de la gráfica de $f(x)$ respecto a $x=0$.
La de $|f(x)|$ se obtiene reflejando hacia arriba las partes de la de $f(x)$ bajo $y=0$.
La de $f(|x|)$ es la parte de la gráfica de $f(x)$ para $x\geq 0$ más su reflejo respecto a $x=0$.

[Todo es fácil de deducir. Por ejemplo, la gráfica de $g(x)=f(x+2)$ vale en $x=a$ lo que la f valía en $x=a+2$ y por eso la gráfica de g es la trasladada de f hacia la izquierda; la altura en cada punto de $g(x)=2f(x)$ es el doble de la f inicial y la de $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$ la mitad; $g(x)=f(2x)$ vale en $x=a$ lo que la f valía en $2a$, $g(x)=f(|x|)$ vale $f(x)$ si $x\geq 0$ y además es par...].

Ej. De la gráfica de $\operatorname{sen}x$ (dibujada a puntos) deducimos las gráficas de: $\operatorname{sen}x+1$, $\operatorname{sen}x-1$, $\operatorname{sen}(x+1)$, $\operatorname{sen}(x-1)$, $2\operatorname{sen}x$, $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x$, $\operatorname{sen}(2x)$, $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $-\operatorname{sen}x$, $\operatorname{sen}(-x)$, $|\operatorname{sen}x|$ y $\operatorname{sen}|x|$:



Ej. Un ejemplo que emplea varias de las ideas anteriores: $\boxed{f(x)=\left|(x-2)^3+1\right|}$.



$\Big[$Más complicado es dibujar las dos funciones que define: $\begin{array}{l} x^3-6x^2+12x-7\,,\ \text{si } x\geq 1 \\ -x^3+6x^2-12x+7\,,\ \text{si } x\leq 1 \end{array}$ $\Big]$.

Dibujemos la gráfica de cuatro funciones racionales. Ya van surgiendo dificultades para hallar ceros:

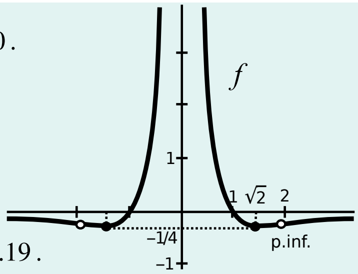
Ej. $\boxed{f(x)=\frac{1-x^2}{x^4}}$. Par. $\operatorname{dom} f=\mathbf{R}-\{0\}$. $f(x)\underset{x\to 0}{\to}\infty$, $f(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$.

$$f'(x)=\frac{2x^2-4}{x^5}\ ;\ f''(x)=\frac{20-6x^2}{x^6}\ .$$

Extremos: $x=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1.41$, $f\big(\pm\sqrt{2}\big)=-\frac{1}{4}=-0.25$.

Inflexión: $i_\pm=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\approx\pm 1.8$, $f(i_\pm)=-\frac{21}{100}=-0.21$.

$f(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$, $f(\frac{1}{2})=12$, $f\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)=2$, $f(2)=-\frac{3}{16}\approx-0.19$.



Ej. $\boxed{g(x)=x^2+\frac{8}{1-x}}$. $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-\infty\ \big[0+\frac{1}{-0}\big]$. $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\infty\ \big[0+\frac{1}{+0}\big]$.

La gráfica se acercará a la de $y=x^2$ para $|x|$ grande.

$$g'(x)=2x+\frac{8}{(1-x)^2}=\frac{2(x^3-2x^2+x+4)}{(1-x)^2}=\frac{2(x+1)(\overset{>0}{x^2-3x+4})}{(1-x)^2}\ \Rightarrow$$

g decrece en $(-\infty,-1]$ y crece en $[-1,1)$ y en $(1,\infty)$.

$$g''(x)=2+\frac{16}{(1-x)^3}=0\Leftrightarrow(1-x)^3=-8\Leftrightarrow x=3\ \big[\text{y } x=\pm i\sqrt{3}\,\big].$$

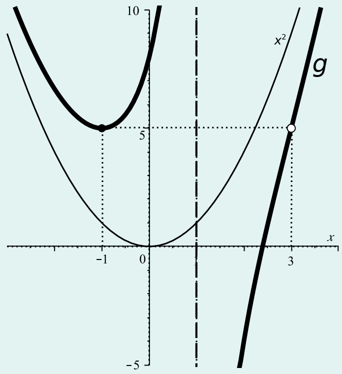
$g(-3)=11$, $g(-1)=g(3)=5$, $g(0)=8$, $g(2)=-4$.

No podemos hallar el x con $g(x)=0\Leftrightarrow x^3-x^2-8=0$.

Como g es continua y $g(2)g(3)<0$ cortará el eje en $(2,3)$, una única vez por ser estrictamente creciente en el intervalo.

[Afinando más el cero: $g\big(\frac{7}{3}\big)g\big(\frac{5}{2}\big)<0\ \Rightarrow$ está en $\big(\frac{7}{3},\frac{5}{2}\big)$].

[Que g tenía exactamente 1 cero positivo lo decía ya el criterio de Descartes: $\substack{+\,-\,-\\-\,-\,-}$].



Ej. $\boxed{h(x)=\frac{x-2}{x^3+x-2}}$. $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)\ \Rightarrow$ $\operatorname{dom} h=\mathbf{R}-\{1\}$.

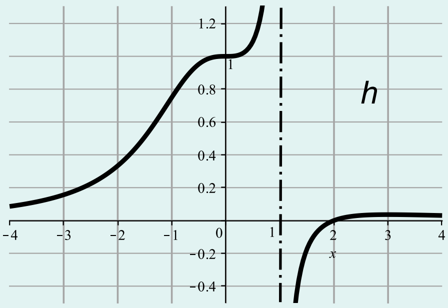
Asíntotas fáciles de hallar: $h\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$. $h\underset{x\to 1^\pm}{\longrightarrow}\mp\infty$.

$h'(x)=\frac{2x^2(3-x)}{(x^3+x-2)^2}\gtrless 0$ en $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,3)$ y $(3,\infty)$

$\Rightarrow$ h crece en $(-\infty,1)$ y $(1,3]$ y decrece en $[3,\infty)$.

$h(3)=\frac{1}{28}$ máximo local . $h(0)=1$ punto de inflexión con tangente horizontal .

$h(-2)=\frac{1}{3}$, $h(-1)=\frac{3}{4}$, $h(\frac{3}{2})=-\frac{4}{23}$, $h(4)=\frac{1}{33}$.

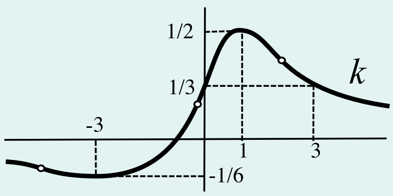


[Sus otros dos puntos de inflexión no son calculables exactamente, pues resultan ser las dos raíces reales del polinomio $3x^4-12x^3-x^2+6x-12=0$].

Ej. $\boxed{k(x)=\frac{x+1}{x^2+3}}$. dom= $\mathbf{R}$, no hay simetrías, $k\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$.

$k'(x)=-\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}\ \Rightarrow$ k crece en $[-3,1]$ y decrece en el resto.

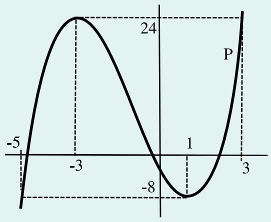
$k''(x)=2\frac{x^3+3x^2-9x-3}{(x^2+3)^3}=0$ sin soluciones enteras.



Para aproximar los puntos de inflexión analizamos el polinomio $P(x)\equiv x^3+3x^2-9x-3$ del numerador.

$P'(x)=3(x+3)(x-1)$. Máximo en $(-3,24)$ y mínimo en $(1,-8)$.

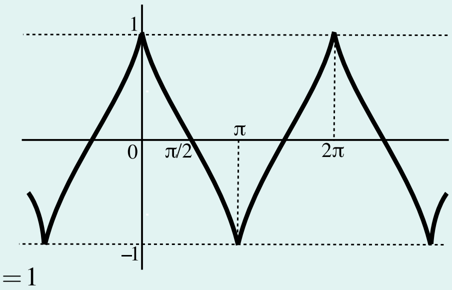
$P(-5)<0$ y $P(-4)>0$
$P(-1)>0$ y $P(0)<0$ $\Rightarrow$ Inflexión en un punto de $(-5,-4)$, $(-1,0)$ y $(2,3)$.
$P(2)<0$ y $P(3)>0$



$k(-3)=-\frac{1}{6}$; $k(1)=\frac{1}{2}$; $k(0)=k(3)=\frac{1}{3}$.

Las tres siguientes no ofrecen excesivas complicaciones:

Ej. $\boxed{p(x)=\frac{\cos x}{1+|\operatorname{sen} x|}}$. 2π-periódica, par, continua $\forall x$.



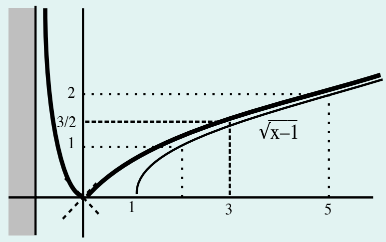
Como $|x|$ no derivable en $x=0$ puede no serlo p si $\operatorname{sen} x=0$. Lo vemos sólo en 0 y π (periodicidad):

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} & \text{en } [0,\pi] \\ \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} & \text{en } [-\pi,0] \text{ y } [\pi,2\pi]\end{cases} \Rightarrow$$

$$p'=\begin{cases}\frac{-1}{1+\operatorname{sen} x} & \text{en } (0,\pi) \to p'(0^+)=p'(\pi^-)=-1 \\ \frac{1}{1-\operatorname{sen} x} & \text{en } (-\pi,0)\cup(\pi,2\pi) \to p'(0^-)=p'(\pi^+)=1\end{cases}$$

$\nexists p'(k\pi)$ [picos]. $p(0)=1$, $p(\pi)=-1$, $p\big(\frac{\pi}{2}\big)=0$. $p''=\frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$ en $(0,\pi) \Rightarrow$ $\smile$ en $(0,\pi/2)$, $\frown$ en $(\pi/2,\pi)$

Ej. $\boxed{r(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x+1}}}=\frac{|x|}{\sqrt{x+1}}$. $r(x)\geq 0 \ \ \forall x\in \operatorname{dom} r=(-1,\infty)$.



$r'(x)=\frac{-[x+2]}{2[x+1]^{3/2}}$ si $-1<x<0$; $r'(x)=\frac{x+2}{2[x+1]^{3/2}}$ si $x>0$

Decrece en $(-1,0]$ y crece en $[0,\infty)$. $r'(0^{\pm})=\pm 1$.

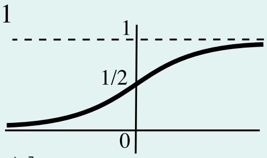
$r''(x)=\frac{x+4}{4[x+1]^{5/2}}$, $-1<x<0$; $r''(x)=\frac{-[x+4]}{4[x+1]^{5/2}}$, $x>0$.

$r(x)=\sqrt{x-1+\frac{1}{x+1}}$ [se parece a $\sqrt{x-1}$ para x grande].

$r(0)=0$ (mínimo en punto sin derivada), $r(-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}=r(1)$, $r(3)=\frac{3}{2}$. $r(x)\to\infty$ si $x\to -1^+$.

Ej. $\boxed{e(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}}$. $e'(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0$, $e''(x)=\frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}=0 \Leftrightarrow e^{-x}=1$

$\Rightarrow$ e crece en todo $\mathbf{R}$ y $x=0$ inflexión.

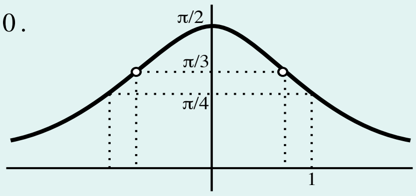


$e(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1+\infty}=0$; $e(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1+0}=1$. $e(0)=\frac{1}{2}$. $e(x)>0\ \forall x$.

[Tiene un aire a la tangente hiperbólica; de hecho, $e(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{2}\big(1+\operatorname{th}\frac{x}{2}\big)$].

Dibujamos ahora dos de los ejemplos de 3.1 (el primero sencillo y el segundo complicado):

Ej. $\boxed{n(x)=\arctan\frac{1}{x^2}}$, $n(0)=\frac{\pi}{2}$. Par. $n(x)\geq 0\ \forall x$. $n(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$.

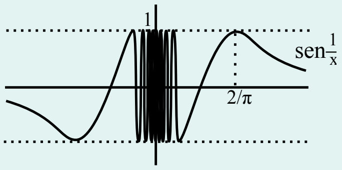


$n'(x)=\frac{-2x}{1+x^4}$ $\Rightarrow$ n crece si $x<0$ y decrece si $x>0$.

$n''(x)=2\frac{3x^4-1}{(1+x^4)^2}$ $\Rightarrow$ cóncava si $|x|\leq 3^{-1/4}\approx 0.76$.

Valores: $n(1)=\frac{\pi}{4}$, $n\big(3^{-1/4}\big)=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. $n'(0)=0$.

Ej. $\boxed{s(x)=x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ con $s(0)=0$ para que s sea continua.

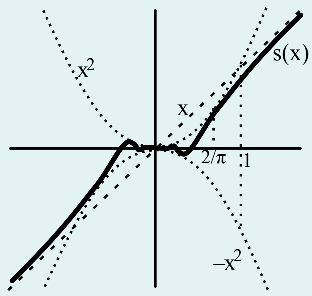


$s(-x)=-s(x)$: impar. De las derivadas se saca poco:

$s'(x)=2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \tan\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$ (infinitos cortes).

Pero podemos dar infinitos valores a la función:

Como $\operatorname{sen}\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{[4n+1]\pi}$; $\operatorname{sen}\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{[4n-1]\pi}$,



la gráfica de s toca en esos x la de x^2 y la de $-x^2$, y para los demás x la gráfica oscila entre ambas.

$\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{n\pi}$, otros infinitos puntos de la gráfica.

$\operatorname{sen}\frac{1}{x}\approx\frac{1}{x}$ si x gordo nos hace sospechar que $s(x)\approx x$.

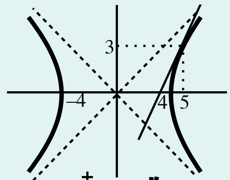
[De hecho, con L'Hôpital o Taylor se ve que $\lim\limits_{x\to\infty}[s(x)-x]=0$].

3.5. Aplicaciones

Tangentes a curvas.

Ej. Hallar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(5,3)$.

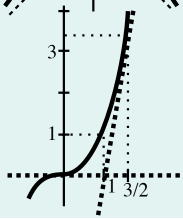
Más corto que despejar la y, y derivar la raíz resultante, derivamos implícitamente considerando la y como función de x:



$$2x - 2yy' = 0 \to y'(x) = \tfrac{x}{y}\,. \text{ Si } x=5, y=3 \text{ es } y' = \tfrac{5}{3}$$

$$\to y = 3 + \tfrac{5}{3}(x-5)\,,\quad \boxed{5x - 3y = 16}\,.$$

Ej. ¿Para qué puntos de la curva $y = x^3$ la recta tangente pasa por $(1,0)$?



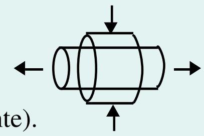
Recta tangente en el punto (a, a^3): $y = a^3 + 3a^2(x-a) = 3a^2x - 2a^3$.

Pasa por $(1,0)$ si $3a^2 - 2a^3 = 0 \to a = 0, \frac{3}{2} \to$ puntos $\boxed{(0,0)}$ y $\boxed{\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)}$.

$\big[$Rectas tangentes respectivas: $y = 0$ e $y = \frac{27}{4}(x-1)\big]$.

Ritmos de cambio.

Ej. Un cilindro se comprime lateralmente y se estira, de modo que el radio de la base decrece a un ritmo de 3 cm/s y la altura crece a 8 cm/s. Hallar el ritmo al que está cambiando el volumen cuando el radio es 5 cm y la altura 7 cm.

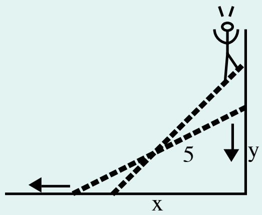


El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h \to \frac{dV}{dt} = \pi\left[r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right] = 2\pi r[4r - 3h]$

Cuando $r = 5$ y $h = 7$, $\boxed{V' = -10\pi \text{ cm}^3\text{/s}}$ (el volumen decrece en ese instante).

Ej. Una escalera de 5 m de largo permanece apoyada sobre una pared vertical y su extremo inferior se está alejando del pie de la pared a una velocidad constante de 2 m/s. Hallar la velocidad a la que desciende la parte superior cuando el extremo inferior está a 4 m de la pared.

Sea y la distancia al suelo de la parte superior y x la distancia de la parte inferior a la pared. Por pitágoras es: $y = \sqrt{25 - x^2}$. Entonces

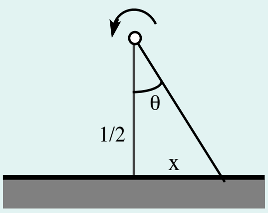


$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}}\,. \quad \text{Cuando } x=4 \text{ es } \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}\,.$$

Por tanto el extremo de la escalera cae en ese instante a $\boxed{\frac{8}{3} \text{ m/s}}$.

$\big[$Curiosidad, si $x \to 5$ la velocidad de caída $\to \infty$ (!?)$\big]$.

Ej. La luz de un faro situado a 1/2 km de una costa recta gira con un periodo de 12 segundos. Hallar la velocidad a la que la luz avanza por la costa: i) en el punto P más cercano al faro, ii) en un punto situado a 2 km de P, iii) un segundo después de pasar la luz por P.



Sean θ el ángulo y x la distancia descritos en el dibujo. Se tiene que $x = \frac{1}{2}\tan\theta$. La velocidad de crecimiento de θ es $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{6}$ radianes por segundo. La velocidad de la luz sobre la costa es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{12}(1 + 4x^2)$$

i) en P, $\theta = 0$, $x = 0 \to x' = \boxed{\frac{\pi}{12}}$ km/seg $\approx$ 942 km/h;

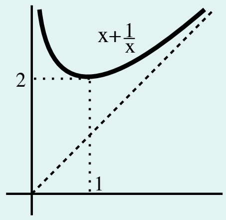
ii) $x = 2 \to x' = \boxed{\frac{17\pi}{12}}$ km/seg $\approx$ 16022 km/h;

iii) $\theta = \frac{\pi}{6} \to x' = \frac{\pi}{12}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi}{9}}$ km/seg $\approx$ 1257 km/h.

Máximos y mínimos.

Ej. Hallar (si existen) dos reales positivos cuyo producto sea 1 y tales que su suma sea i) máxima, ii) mínima.

Sean los números x y $\frac{1}{x}$. Hay que buscar los extremos de $S(x)=x+\frac{1}{x}$ en el intervalo $(0,\infty)$ [como no es un cerrado podrían no existir].

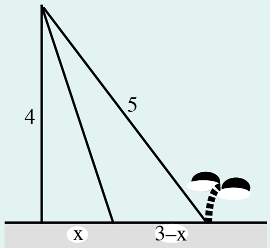


$S'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0\to x=1$ (-1 no sirve); $S''(x)=\frac{2}{x^3}\to S''(1)=2$

hay, pues, un mínimo local en $x=1$. S derivable para todo x de $(0,\infty)$, $S(x)\to\infty$ cuando $x\to 0$ y cuando $x\to\infty\Rightarrow$ no hay máximo. Por tanto, el mínimo (absoluto) se da si $x=\frac{1}{x}=1$ (la suma es entonces 2).

Ej. Un nadador se halla en el mar a 4 km de una playa recta y a 5 km de una palmera situada en la playa junto al mar. Si nada a una velocidad de 4 km/h y camina por la playa a 5 km/h, ¿cuál es el tiempo mínimo que debe emplear para llegar hasta la palmera?

El tiempo empleado en nadar hacia un punto situado a una distancia x de la perpendicular y luego caminar hasta la palmera es



$$T(x)=\frac{\sqrt{16+x^2}}{4}+\frac{3-x}{5}\,,\ \text{con } x\in[0,3]$$

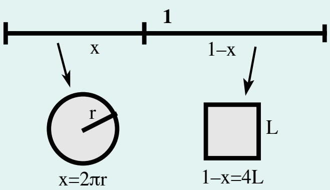
[si $x\leq 0$ tarda más seguro y si $x\geq 3$ no vale la expresión de $T(x)$].

$$T'(x)=\frac{x}{4\sqrt{16+x^2}}-\frac{1}{5}=0\ \Rightarrow\ \frac{25}{16}x^2=16+x^2\ \Leftrightarrow x=\frac{16}{3},-\frac{16}{3}$$

Pero $\frac{16}{3}>3$ y $-\frac{16}{3}$ no cumple $T'=0$, así que el mínimo se toma en un extremo: $T(3)=\frac{5}{4}<T(0)=\frac{8}{5}$ $\left[T(\frac{16}{3})=\frac{6}{5}\text{ es mentira}\right]$.

Por tanto, debe nadar hacia la palmera (si ésta estuviese lejos, sí convendría atajar).

Ej. Con un alambre de longitud 1 m se forman un cuadrado y una circunferencia. ¿Cuánto alambre debe emplearse en cada figura para que la suma de sus áreas sea i) máxima, ii) mínima?



Área total $=L^2+\pi r^2=\frac{[1-x]^2}{16}+\frac{\pi x^2}{4\pi^2}=\frac{[4+\pi]x^2-2\pi x+\pi}{16\pi}=A(x)$ con $x\in[0,1]$. Los máximos y mínimos (que existen, por ser A continua en $[0,1]$) se alcanzarán (A derivable en $(0,1)$) o bien en los extremos del intervalo o bien cuando $A'(x)=0$:

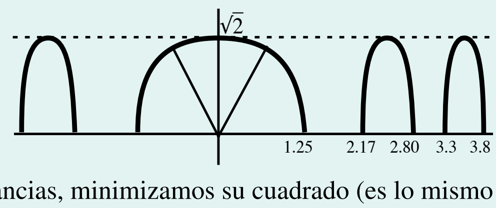
$$A'(x)=\frac{[4+\pi]x-\pi}{8\pi}=0\ \to\ x^*=\frac{\pi}{4+\pi}\approx 0.44\text{ m}$$

Como $A'<0$ si $x<x^*$, $A'>0$ si $x>x^*$, el mínimo se da en x^*, y como $A(0)=\frac{1}{16}<A(1)=\frac{1}{4\pi}$, el máximo en 1 $\big($empleando todo el alambre para el círculo [$A\approx 0.08$ m^2]; para el área mínima se usa alrededor de 44 cm para el círculo y 56 cm para el cuadrado [$A=\frac{1}{4[4+\pi]}\approx 0.035$ m^2]$\big)$.

Ej. Hallar el punto de la gráfica de $f(x)=\sqrt{2\cos x^2}$ más cercano al origen.

Hallamos su dominio y dibujamos su gráfica: $\cos x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]\cup[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}]\cup\cdots$

$$\Rightarrow\ \text{dom} f=\cdots\cup\Big[-\sqrt{\tfrac{5\pi}{2}},-\sqrt{\tfrac{3\pi}{2}}\Big]\cup\Big[-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}},\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\Big]\cup\Big[\sqrt{\tfrac{3\pi}{2}},\sqrt{\tfrac{5\pi}{2}}\Big]\cup\cdots$$



Mejor que minimizar distancias, minimizamos su cuadrado (es lo mismo y evita derivar raíces):

$d(x)=d[(0,0),(x,f(x))]^2=x^2+2\cos x^2$; $d'(x)=4x(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x^2)=0\to x=0$ ó $x^2=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\cdots$

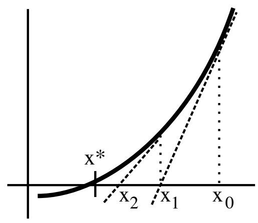
El valor mínimo claramente se da en $\big[-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\big]$. Candidatos son además estos extremos:

$d(0)=2$, $d\big(\pm\sqrt{\frac{\pi}{6}}\,\big)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\approx 2.26$, $d\big(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\big)=\frac{\pi}{6}\approx 1.57\to$ puntos más cercanos $\big(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}},0\big)$.

3.6. Aproximación numérica de ceros

Muchas veces es necesario hallar los **ceros** de una función f, es decir, los x^* tales que $f(x^*)=0$. Pero, como vimos, ni siquiera si f es un polinomio se tienen siempre fórmulas para calcular sus raíces. Mucho menos si f es una función trascendente como $f(x)=e^x+x^3$ o $f(x)=3\arctan x-\log x$. Se tratará entonces de hallar los ceros de forma aproximada. El teorema de Bolzano puede ser un camino para aproximar x^*: encontrando un intervalo $[a,b]$ de pequeña longitud tal que $f(a)f(b)<0$ estamos seguros de que al menos hay un $x^*\in(a,b)$ con $f(x^*)=0$ (que será el único si f' es $>$ ó $<$ que 0 en ese intervalillo). Pero mucho más rápidos serán, normalmente, otros caminos como el

Método de Newton. La idea de este método es simple. Supongamos que para una f como la de la figura sabemos que el cero x^* se parece más o menos a x_0. Aproximando la gráfica con la tangente en $(x_0,f(x_0))$ obtenemos un x_1 (punto en que la recta corta el eje), probablemente más cercano a x^* que el x_0 inicial. Repitiendo el proceso con x_1 obtenemos un x_2, luego un x_3, ... siendo esperable que la sucesión $\{x_n\}$ converja rápidamente hacia x^*.



Hallemos una fórmula que exprese cada término de esta sucesión en función del anterior. Como la tangente en $(x_n,f(x_n))$ es $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$ el corte de esta recta con $y=0$ nos da la siguiente aproximación. Por tanto:

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

[Se ve que las cosas irán mal si f/f' es grande cerca de x^*; se puede demostrar que $\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|<1$ en un entorno de x^* es una condición suficiente para que converja el método].

Ej. Aproximemos las raíces reales de $\boxed{P(x)=x^4-2x^2+4x-2}$ (exactamente no sabemos).

La ley de Descartes nos asegura que hay ó 3 ó 1 positivas $(+-+-)$ y exactamente 1 negativa $(+---)$. Vamos a hacernos una idea de su gráfica para determinar cuántas raíces positivas tiene y localizar intervalos en los que buscarlas. Para ello empezamos estudiando sus derivadas:

$P'(x)=4[x^3-x+1]$ (sin raíces enteras; 2 ó 0 positivas (no lo sabemos, por ahora) y 1 negativa)

$P''(x)=4[3x^2-1]=0\to x=\pm1/\sqrt{3}$ (puntos de inflexión de P y máximos o mínimos de P')

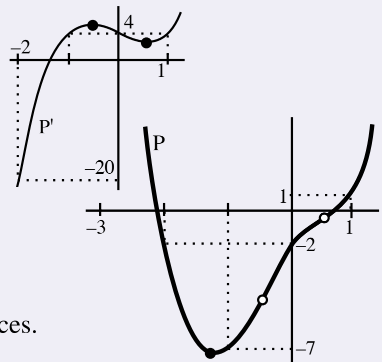
$P'(-\frac{\sqrt{3}}{3})=4[1+\frac{2\sqrt{3}}{9}]\approx5.5$; $P'(\frac{\sqrt{3}}{3})=4[1-\frac{2\sqrt{3}}{9}]\approx2.5$.

$P'(-3)=-92$, $P'(-2)=-20$, $P'(-1)=P'(0)=P'(1)=4$.

Con esto ya podemos dibujar la gráfica de P'. Vemos que: P' tiene un único cero en $(-2,-1)$ [$P''>0$ en $(-2,-1)$] y no tiene más. Por tanto, P tiene un único mínimo entre -2 y -1. A partir de él P crece $\Rightarrow$ sólo hay 1 raíz positiva de P. Para localizar un poco mejor las dos raíces de P:

$P(-3)=49$, $P(-2)=P(0)=-2$, $P(-1)=-7$, $P(1)=1$

$\Rightarrow$ Existe un cero de P en $[-3,-2]$ y otro en $[0,1]$.



Aplicamos ahora el método de Newton para aproximar las raíces.

Primero la de P': $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-x_n+1}{3x_n^2-1}$. Elegimos $x_0=1$ y obtenemos:

$x_1=-1.5$; $x_2\approx-1.34782609$; $x_3\approx-1.32520040$; $x_4\approx-1.32471817$; $x_5\approx-1.32471796$;

y los posteriores x_n tienen esos mismos 8 decimales [es curioso ver que ocurre eligiendo $x_0=0$].

Los ceros de P los sacamos de $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^4-2x_n^2+4x_n-2}{4[x_n^3-x_n+1]}$, obteniendo con los x_0 indicados:

$x_0=0$, $x_1=0.5$, $x_2=0.675$, $x_3\approx0.676444897$, $x_4\approx0.676444288$; $x_5,x_6,\ldots$ iguales decimales.

$x_0=-2$, $x_1=-2.1$, $x_2\approx-2.09074420$, $x_3\approx-2.09065786$, $x_4\approx-2.09065785=x_5=x_6=\cdots$

En la sección 3.2 comprobamos que la siguiente función tenía un único cero. Vamos a calcularlo.

Ej. $\boxed{l(x) = 3\arctan x - \log x}$. Primero observemos que el cero c buscado va ser un número gordo, pues si x grande, debe ser $\log x \approx \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7 \Leftrightarrow x \approx e^{4,7} \approx 110$.

Usando Bolzano (y una calculadora científica normal) y tanteando un poco hallamos un intervalo de longitud 1 en el que está c buscado:

$$l(108) \approx 0.0025\,,\ l(109) \approx -0.0065 \ \Rightarrow\ c \in (108,109)\,.$$

Pero con Bolzano nos costaría mucho ir encontrando decimales. Es mucho más rápido Newton.

Que adopta en este caso la forma: $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n(1+x_n^2)(3\arctan x_n - \log x_n)}{x_n^2-3x_n+1}$.

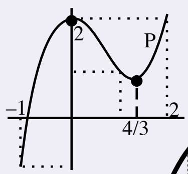
Empezando, por ejemplo, con $x_0 = 100$ vamos obteniendo:

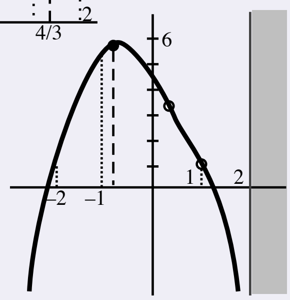
$x_1 \approx 107.960779\,,\ x_2 \approx 108.275473\,,\ x_3 \approx \boxed{108.275919}$ [y mismos decimales para $x_4, x_5, \dots$].

[El dibujo hecho en 3.2 era cualitativo y el corte allí dibujado, como vemos, no tiene nada que ver con el real].

Dibujemos una gráfica. Como nos pasaba en la sección anterior aparecerán dificultades de cálculo de ceros, pero ahora los vamos a aproximar utilizando el método de Newton:

Ej. $\boxed{f(x) = x^3 + 6\log(2-x)}$. $\operatorname{dom} f = (-\infty, 2)$. $f \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} -\infty$.





$f(x) = x^3\left[1 + 6\frac{\log(2-x)}{x^3}\right] \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}$ "$-\infty\cdot[1+0] = -\infty$"

$\left[\text{pues L'Hôpital implica: } \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\log(2-x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1/(x-2)}{3x^2} = 0\right]$.

$f'(x) = 3\frac{x^3-2x^2+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow P(x) \equiv x^3 - 2x^2 + 2 = 0??$

Siempre, antes de usar el ordenador, vemos qué queremos calcular:

$P'(x) = 3x^2 - 4x\,,\ P(\frac{4}{3}) = \frac{22}{27} > 0\,, P(0) = P(2) = 2\,, P(\pm 1) = \pm 1$

$\Rightarrow$ raíz de P [máximo de f] en $c \in (-1,0)$. f no tiene mínimos.

Newton para P: $x_{n+1} = 2\frac{x_n^3 - x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 4x_n}$, $x_0 = -1\,, x_1 = -0.86\,, x_2 = -0.84\,,$

x_3 ya igual, $c \approx -0.84$. Valor máximo aproximado: $f(c) \approx 5.67$.

La raíz de P la podríamos haber calculado también con las fórmulas de 3.3:

$$p=1\,, q=-2\,, R=4\,, S=38\,, \Delta=-44\,, x_r = \tfrac{1}{3}\left[2 - \left(19-3\sqrt{33}\right)^{1/3} - \left(19+3\sqrt{33}\right)^{1/3}\right] \approx 0.84\,.$$

Es calculable la concavidad (casualidad, o el inventor del problema tanteó para que lo fuese):

$$f''(x) = 6\frac{x^3-4x^2+4x-1}{[x-2]^2} = 6\frac{[x-1][x^2-3x+1]}{[x-2]^2} = 0 \text{ si } x=1 \text{ ó } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.4 \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin \operatorname{dom} f\right].$$

$\Rightarrow$ f es $\cup$ entre los puntos de inflexión y $\cap$ en el resto.

Dar valores sueltos sí es posible con una calculadora:

$$f(1) = 1,\ l(0) = 6\log 2 \approx 4.1\,,\ f(-1) = 6\log 3 - 1 \approx 5.6,\ f(-2) = 12\log 2 - 8 \approx 0.3\,.$$

Pero para hallar los cortes con el eje x necesitamos Newton (o método similar) una vez más:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-2)(x_n^3 - \log[2-x_n])}{3(x_n^3 - 2x_n^2 + 2)} \quad \begin{array}{l} \nearrow\ x_0 = -2\,,\ x_1 \approx -2{,}03 \approx x_2 \approx x_3 \\ \searrow\ x_0 = 1\,,\ x_1 \approx 1{,}33\,,\ x_2 \approx 1{,}31 \approx x_3 \approx x_4 \end{array}$$

Veamos que deducimos del método de Newton para el cálculo de raíces m-simas de reales positivos:

Ej. Buscando los ceros de $x^m - a$ obtenemos una sucesión $\{x_m\}$ que tienden hacia $\boxed{\sqrt[m]{a}}$.

Tenemos que: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}} = \boxed{\frac{1}{m}\left[(m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}\right]}$ (algoritmo de Herón para calcular raíces).

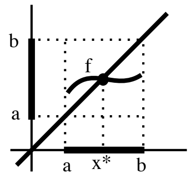
Para hallar $\sqrt[3]{12345}$, y partiendo de algún número que no esté muy lejos, por ejemplo $x_0 = 20$:

$x_1 = 23.62083333$, $x_2 = 23.12251744$, $x_3 = 23.11162389$, $x_4 = 23.11161875 = x_5 = x_6 = \cdots$

Veamos ahora otro método de aproximación de ceros de un tipo de funciones particulares que, aunque sea más lento que el de Newton, tiene el interés de que es aplicable en matemáticas más avanzadas a problemas mucho más generales.

$\boxed{f:[a,b]\to[a,b] \text{ es } \textbf{contractiva} \text{ si } |f(x)-f(y)|\le c|x-y| \text{ , con } c<1 \text{ , } \forall x,y\in[a,b]}$

Una f contractiva es continua en $[a,b]$: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ si $|x-y|<\delta=\frac{\varepsilon}{c}$.



Probemos que entonces $\boxed{\text{existe un único } x^*\in[a,b] \text{ tal que } x^*=f(x^*)}$

(A un x^* con esa propiedad se le llama **punto fijo** de f).

Aplicando Bolzano a $g(x)=x-f(x)$, como $g(a)<0<g(b) \Rightarrow$ existe el x^*.

Si hubiera otro $y^*=f(y^*)$ sería $|f(x^*)-f(y^*)|=|x^*-y^*|\le c|x^*-y^*| \Rightarrow x^*=y^*$.

Además existe una forma muy fácil de aproximar el x^* pues:

$\boxed{\text{Para cualquier } x_0\in[a,b] \text{ , la sucesión } x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots \to x^* .}$

En efecto, llamemos x_n al resultado de aplicar n veces f a x_0.

Vamos a ver que x_n es de Cauchy. Se tiene que

$|x_n-x_{n+1}|=|f(x_{n-1})-f(x_n)|\le c|x_{n-1}-x_n|\le\cdots\le c^n|x_0-x_1|$; por tanto, si $m\le n$,

$|x_m-x_n|\le|x_{m+1}-x_m|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|\le[c^m+\cdots+c^{n-1}]|x_1-x_0|=\frac{c^m-c^n}{1-c}|x_1-x_0|$,

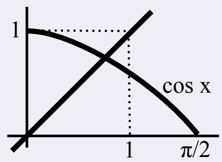
que se puede hacer tan pequeño como queremos con m y n suficientemente grandes $(c^m,c^n\to 0)$.

Como x_n es de Cauchy tiene límite x^* y se cumple $f(x^*)=f(\text{lím}\,x_n)=\text{lím}\,f(x_n)=\text{lím}\,x_{n+1}=x^*$.

La forma más fácil de ver que una $f:[a,b]\to[a,b]$ es contractiva es ver que el máximo M de $|f'(x)|$ en $[a,b]$ es menor que 1, pues, por el teorema del valor medio,

$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\le M|x-y|$ con $M<1$.

Ej. Calculemos el único $x\in[0,1]$ tal que $\boxed{\cos x = x}$. $\cos x$ es contractiva: su imagen está contenida en $[0,1]$ y $|-\operatorname{sen} x|\le \operatorname{sen} 1<1$.



Así pues, podemos hallar el x^* sin más que apretar la tecla del coseno de una calculadora a partir de cualquier $x_0\in[0,1]$.

Por ejemplo, si $x_0=1$ vamos obteniendo:

0.54030231, 0.85755322, 0.65428979, 0.79348036, 0.70136877, 0.76395968, 0.72210242...

Después de apretar 20 veces obtenemos 0.73918440 ; tras apretar 40 veces, 0.73908517 ...

El método de Newton nos da el cero buscado mucho más rápidamente.

Haciendo $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\cos x_n}{1+\operatorname{sen} x_n}$ con $x_0=1$, se tiene en pocos pasos:

$x_1=0.7503638678$, $x_2=0.7391128909$, $x_3=0.7390851334$, $x_4=0.7390851332=x_5=\cdots$