4. Series, Taylor y límites indeterminados

4.1 Series de números reales

Queremos hacer 'sumas de infinitos números reales', llamadas **series**:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,.$$

Por ejemplo, 'sumemos' $1/5+1/5^2+1/5^3+1/5^4+1/5^5+\cdots$. Sumar un número finito de términos siempre se puede: la suma de los 2 primeros es 0.24 , la de los 5 primeros es 0.24992 , la de los 10 es 0.2499999744 , ... Pero carece de sentido 'sumar infinitas veces'. La palabra 'infinito' en matemáticas siempre está unida al concepto de límite. Dada una serie, siempre podemos hallar la 'k-ésima suma parcial' $S_k=a_1+\cdots+a_k$. Parece natural decir que la suma S de los infinitos a_n será el límite de la sucesión $\{S_k\}$. En la serie anterior parece que este límite existe y que es $S=0.25$, pero este límite pudiera no existir para otras. Así, para la serie $1-1+1-1+1-\cdots$ las sumas parciales van siendo $S_1=1,\,S_2=0,\,S_3=1,\,S_4=0,\,\dots$, sucesión divergente (y, por tanto, no se le puede asignar ningún valor a la suma de los infinitos términos). Lo primero que miraremos cuando aparezca una serie es si la 'suma infinita' tiene sentido:

Def. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ es **convergente** si lo es la sucesión $\{S_k\}$ con $S_k=\sum\limits_{n=1}^{k}a_n$. La **suma de la serie** es entonces el $\lim\limits_{k\to\infty}S_k$. Se llama **término general** de la serie al a_n y **sucesión de sus sumas parciales** a $\{S_k\}$. Si una serie no converge, se dice **divergente**.

[La serie converge si lo hace su sucesión de sumas parciales; otra cosa distinta es que converja su término general. Para $\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\cdots$ es $\{S_k\}=\{k\}$, que claramente diverge a ∞ , y sin embargo converge la sucesión constante $\{a_n\}=\{1\}$; pronto veremos que para que la serie converja será necesario (pero no suficiente) que $\{a_n\}$ tienda hacia cero (para que pueda ser finita la suma de infinitos números es necesario que sean muy pequeños)].

De la definición y las conocidas propiedades de los límites de sucesiones se deduce inmediatamente que **si suprimimos, cambiamos o añadimos un número finito de términos al principio de una serie, no se altera su carácter de convergencia o divergencia** (aunque sí el valor de su suma, si converge), porque las nuevas sumas parciales diferirán de la inicial sólo en un constante. Por eso, cuando hablemos simplemente de convergencia podremos no escribir el n en que empezamos a sumar; incluso escribiremos sólo $\sum$ (no olvidando que son infinitos términos).

También está claro (por las propiedades de sumas y productos de sucesiones) que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen y si $c\in\mathbf{R}$, también convergerán las series $\sum[a_n+b_n]$ y $\sum c\,a_n$ y que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+b_n]=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}c\,a_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

¿Cómo saber si una serie converge o no? ¿Cuánto vale su suma si es convergente? Veremos una serie de **criterios** que nos permitirán responder en la práctica a la primera pregunta para muchas series (desde luego la definición $\varepsilon-N$ del límite de sucesiones no es adecuada, ni vimos en 2.2 teoremas para trabajar con sucesiones en las que el número de sumandos va creciendo). Respecto de la segunda, casi siempre necesitaremos calculadora u ordenador para dar simplemente un valor aproximado de la suma de la serie.

Dos casos en que se puede sumar la serie (excepcionales, porque podemos encontrar una expresión manejable de la sumas parciales; cuando veamos series de Taylor en 4.4 conoceremos la suma de alguna otra serie) son los siguientes:

Series geométricas (progresiones geométricas de infinitos términos):

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+\cdots}\ .\ \text{Si } r\neq 1 \text{ es } S_k = \tfrac{1-r^{k+1}}{1-r} \ \Rightarrow\ \boxed{\text{Si } |r|<1\,,\ \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \tfrac{1}{1-r}}$$

Y si $|r|\geq 1$ diverge, al hacerlo S_k $\Big($también si $r=\pm 1$: $\begin{array}{l} 1+1+\cdots\to\infty \\ 1-1+1-1+\cdots \end{array}$ divergen$\Big)$.

Ej. Con esto vemos que $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots=\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{5}\frac{1}{1-1/5}=\frac{1}{4}=0.25$ como sospechábamos.

[De la misma forma que en este ejemplo, es fácil ver que, en general, $\sum\limits_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}$, si $|r|<1$].

Series telescópicas: $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}[b_n-b_{n+1}]}$ $\Rightarrow S_k=[b_1-b_2]+[b_2-b_3]+\cdots+[b_k-b_{k+1}]=b_1-b_{k+1}$.

Por tanto, esta serie converge si y solo si $\{b_n\}$ converge y entonces su suma es: $\boxed{b_1-\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Ej. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1$. **converge** y ese es su valor.

Ej. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log\frac{n}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\log n-\log(n+1)]$ es **divergente**, porque $\log n$ diverge hacia $+\infty$.

Salvo en estos dos casos nos conformaremos con saber si la serie que tratamos converge o no y con la calculadora para aproximar su suma (a ser posible, dando una cota del error cometido). Lo que sigue son los criterios más importantes para distinguir las series convergentes de las divergentes (hay más, pero aplicables en muy pocos casos prácticos). El primer criterio permite identificar un montón de series **divergentes** (muchas veces a simple vista):

Teorema: $\boxed{\text{Si } \sum a_n \text{ es convergente } \Rightarrow\ a_n\to 0\,.}$ [La implicación opuesta ($\Leftarrow$) es **falsa**].

Es $a_n=S_n-S_{n-1}$. Entonces $a_n\to 0$, pues S_n y S_{n-1} tienen, desde luego, el mismo límite.

Ej. $\sum\frac{n+1}{20000n}$ es **divergente**, porque el término general a_n no tiende a 0 $\big($tiende a $\frac{1}{20000}\big)$.

Ej. $\sum(-1)^n e^{1/n}$ **diverge**, porque a_n tampoco tiende a 0 (ni a nada; pares $\to 1$, impares $\to -1$).

Veamos que $\Leftarrow$ es falso, o sea, que no basta que los números que sumemos tiendan a 0 para que la serie converja. Para ello basta un contraejemplo:

$\boxed{\textbf{La ‘serie armónica’ } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \textbf{ diverge.}}$ ($a_n\to 0$, pero la suma es ‘infinito’).

[No se ve con una calculadora: S_1=1 , S_2=1.5 ,..., $S_{10}\approx 2.929$,..., $S_{100}\approx 5.187$,..., $S_{1000}\approx 7.485$,... no parece estabilizarse, pero sumandos muy altos acabarían por no afectar al número de la pantalla].

Para probarlo consideramos la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots$,
de términos menores que los de la armónica. Tenemos entonces que:

$$S_2=1+\tfrac{1}{2}\ ,\ S_4>1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\ ,\ S_8>1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\ ,\ \ldots\ ,\ S_{2^n}>1+\tfrac{n}{2}\ .$$

Por tanto la sucesión de sumas parciales de $\sum\frac{1}{n}$ diverge (ni siquiera está acotada).

Series de términos positivos $\boxed{a_n \geq 0}$ $\big[$o de términos negativos, pues $\sum a_n = -\sum(-a_n)\big]$.

Observemos que entonces las sumas parciales forman una sucesión creciente.

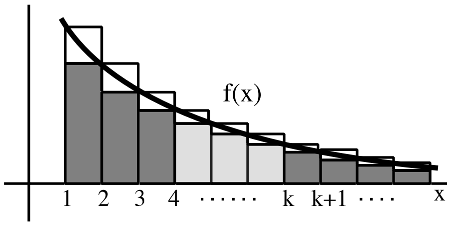
Veamos varios criterios de convergencia. El primero exige saber algo de integrales y límites de funciones, pero lo necesitamos para tratar las importantes series $\sum \frac{1}{n^s}$.

Se define: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ (si el límite existe; la integral se dice convergente).

Criterio integral:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sea } f(x) \text{ función positiva y decreciente para } x\geq 1\text{. Entonces la serie } \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge} \\ \Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ converge. El error está acotado por } \int_{k+1}^\infty f(x)dx \leq S-S_k \leq \int_k^\infty f(x)dx\,.\end{array}}$$

Este criterio, es de los pocos que dan cota del error cometido al sustituir la suma S de la serie convergente por la k-ésima suma parcial. No lo demostramos. Recordando el significado geométrico de la integral, es intuitivamente claro a partir del dibujo.



$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ converge si } s>1 \text{ y diverge si } s\leq 1}$$

Si $s\leq 0$, el término general no tiende a 0 y la serie diverge.

Si $s>0$, la función $f(x)=x^{-s}$ es positiva y decreciente y aplicamos el criterio anterior:

si $s\neq 1$, $\int_1^b x^{-s}dx = \frac{1-b^{1-s}}{1-s}$; si $s=1$, $\int_1^b x^{-1}dx = \log b$;

si $b\to\infty$, la primera integral converge para $s>1$ y $\to\infty$ si $0<s<1$. La segunda $\to\infty$.

Ej. Para aproximar la suma S de la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$ sumamos 50 términos y obtenemos $S_{50}=1.201860...$ Estimemos el error cometido E, utilizando el criterio integral:

$\int_{51}^\infty \frac{dx}{x^3} = \big[-\frac{x^{-2}}{2}\big]_{51}^\infty = \frac{1}{2\cdot 51^2} = 0.000192... \leq E = S-S_{50} \leq \int_{50}^\infty \frac{dx}{x^3} = \big[-\frac{x^{-2}}{2}\big]_{50}^\infty = \frac{1}{2\cdot 50^2} = 0.0002$

El valor de S (no calculable exactamente) está comprendido entre $1.202052...$ y $1.202060...$

En los dos siguientes criterios compararemos nuestra serie con otra de convergencia conocida (normalmente con las $\sum\frac{1}{n^s}$; por eso serán adecuados cuando hay como mucho potencias de n; si aparecen términos mayores, como 3^n o $n!$, será mejor usar el cociente o la raíz que veremos).

Criterio de comparación por desigualdades:

$$\boxed{\text{Si } 0\leq a_n\leq b_n \text{, entonces } \sum b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum a_n \text{ converge y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,.}$$

[Y por tanto $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge. Pero no se obtiene ninguna conclusión de que la mayor diverja o de que la menor converja].

Sean $S_k = a_1+\cdots+a_k$, $T_k = b_1+\cdots+b_k$. Son sucesiones crecientes con $0\leq S_k\leq T_k$.
Entonces: T_k convergente $\Rightarrow T_k$ acotada $\Rightarrow S_k$ acotada $\Rightarrow S_k$ convergente y $\lim S_k \leq \lim T_k$.

Ej. $\sum\frac{\operatorname{sen} n+1}{n^3+n}$ **converge**, ya que $0\leq\frac{\operatorname{sen} n+1}{n^3+n}\leq\frac{2}{n^3}$ y sabemos que $\sum\frac{2}{n^3} = 2\sum\frac{1}{n^3}$ converge.

Ej. $\sum\frac{n+1}{n^2}$ **diverge**, pues $\frac{n+1}{n^2}\geq\frac{1}{n}$ y la armónica diverge $\Big($de $\frac{n+1}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ no sacaríamos nada$\Big)$.

Lo podemos afirmar sin el criterio: la suma de una $\sum a_n$ convergente y otra $\sum b_n$ divergente es divergente (si convergiese, $\sum[a_n+b_n]-\sum a_n = \sum b_n$ convergería) y esto le pasa a nuestra serie $\sum[\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}]$. [Que conste que la suma o diferencia de dos divergentes sí puede ser convergente].

Trabajar con desigualdades puede ser complicado, por eso suele ser bastante más útil:

Criterio de comparación por paso al límite:

Sean a_n , $b_n \geq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ (finito). Entonces:
Si $c>0$, $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ converge. Si $c=0$, $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Si $c>0$, para $n \geq N$, $\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3c}{2} \;\Rightarrow\; 0 \leq \frac{c}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3c}{2} b_n$ y aplicamos el criterio anterior.
Si $c=0$, para $n \geq N$, $0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq a_n \leq b_n$ y otra vez el criterio.

A partir de ahora, para abreviar, representaremos con el símbolo '$\sim$' el hecho de que a dos series les podemos aplicar la primera parte de este criterio, es decir:

$$\boxed{a_n \sim b_n \text{ si } \frac{a_n}{b_n} \to c>0}$$

[A pesar del símbolo elegido, no quiere decir esto que, aunque las dos series converjan a la vez, la suma de una se parezca a la de la otra (intentemos no escribir $\sum a_n \sim \sum b_n$)].

Esta parte del criterio con $c>0$ permite determinar la convergencia de muchas series a simple vista, mirando sólo en los términos n^s que 'mandan' en numerador y denominador:

Ej. $\sum \frac{n-1}{n^2}$ **diverge**, porque $a_n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ $\big($es decir, $\frac{a_n}{1/n} = \frac{n}{n-1} \to 1 > 0\big)$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

[La comparación por $\leq$ no es adecuada aquí (de la acotación sencilla $a_n \leq \frac{1}{n}$ no sale nada, pues aunque la gorda diverja la menor podría converger); en cambio, para el primer ejemplo del criterio anterior, como $\frac{\operatorname{sen} n+1}{n^3+n}$ no se parece a $\frac{1}{n^3}$ ($\frac{a_n}{1/n^3}$ no tiene límite), el paso al límite no parece adecuado (se puede usar la parte con $c=0$, pero es más fácil usar desigualdades)].

Ej. $\sum \frac{5\sqrt{n}-173}{n^2+\cos n}$ **converge**, pues $a_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ $\big(\frac{a_n}{1/n^{3/2}} \to 5 > 0\big)$ y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente.

[Aunque sean unos cuantos $a_n<0$, esto no impide aplicar criterios para series de términos positivos, pues la convergencia se mantiene si los quitamos].

Ej. $\sum \frac{\arctan n}{4n^2+3}$ **converge**, ya que $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ $\big(\frac{a_n}{1/n^2} \to \frac{\pi}{8}$, pues $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$ $\big)$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Ej. $\sum \frac{1}{7^n+(-1)^n}$ **converge**: $a_n \sim \frac{1}{7^n}$ $\big(\frac{a_n}{1/7^n} \to 1 > 0\big)$ y $\sum \left(\frac{1}{7}\right)^n$ es geométrica convergente.

[Alguna vez compararemos con otras series conocidas y no sólo con las $\sum \frac{1}{n^s}$].

Ej. $\sum \operatorname{sen} \frac{1}{n^3}$. La sucesión $\frac{1}{n^3} \to 0$ y sabemos ya que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{x\to 0}{\to} 1$. Por los teoremas que relacionan límites de sucesiones y funciones se tiene: $\frac{a_n}{1/n^3} \to 1$. $\sum \frac{1}{n^3}$ converge $\Rightarrow$ la dada **converge**.

Cuando los términos que dominen contengan logaritmos habrá que aplicar la segunda parte (la de $c=0$) de este criterio (porque $\log n$ no se parece a ninguna potencia de n):

Ej. $\sum \frac{\log n}{n^4}$ **converge**, pues $\frac{\log n/n^4}{1/n^3} = \frac{\log n}{n} \to 0$ (límite admitido) y $\sum \frac{1}{n^3}$ (más gorda) converge.

$\sum \frac{\log n}{n}$ **diverge**, pues $\frac{1/n}{\log n/n} \to 0$ y $\sum \frac{1}{n}$ (más pequeña) diverge.

[o por desigualdades $\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$ si $n \geq 3$] [o por el integral $\int_1^\infty \frac{\log x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^\infty \to \infty$].

$\sum \frac{\log n}{n^2}$ **converge**, pues $\frac{\log n/n^2}{1/n^{3/2}} = \frac{\log n}{n^{1/2}} \to 0$ y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

[hemos debido afinar pues $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente pero menor y $\sum \frac{1}{n}$ es mayor pero diverge].

Series de términos cualesquiera.

Consideremos primero la serie, de términos positivos, de los valores absolutos $\sum|a_n|$.

Teorema: $\boxed{\sum|a_n| \text{ es convergente } \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente.}}$ [La implicación $\Leftarrow$ es **falsa**].

$0 \le a_n+|a_n| \le 2|a_n|$, $\sum|a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum[a_n+|a_n|]$ converge (criterio de comparación por desigualdades) $\Rightarrow$ $\sum[a_n+|a_n|]-\sum|a_n| = \sum a_n$ converge.

$\Leftarrow$ es falsa: pronto veremos series $\sum a_n$ convergentes pero tales que $\sum|a_n|$ diverge. Diremos que $\sum a_n$ es **absolutamente convergente si** $\sum|a_n|$ **es convergente** (el teorema anterior afirma que **absolutamente convergente** $\Rightarrow$ **convergente**). Diremos que $\sum a_n$ es **condicionalmente convergente** si converge, pero no absolutamente.

Ej. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ converge absolutamente (y por tanto converge) pues $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge $\left(\sim \frac{1}{n^2}\right)$.

Ej. $\sum \frac{\cos n}{3^n}$. $\sum \frac{|\cos n|}{3^n} \le \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ geométrica convergente $\Rightarrow$ $\sum|a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge.

Ej. $\sum \frac{\cos n}{n}$. De $\sum \frac{|\cos n|}{n}$ no sacamos nada $\left(\le \sum \frac{1}{n} \text{ divergente}\right)$. No sabremos decir si converge.

[De hecho, aunque es largo de probar y se utilizan criterios que nostros no estudiamos, es convergente. Aunque eso no sea ninguna prueba, se puede ir al ordenador y sumar, por ejemplo, 1.000, 10.000 y 100.000 términos. Se obtiene: $S_{1000} \approx 0.0431$, $S_{10000} \approx 0.0419$, $S_{100000} \approx 0.0420$. Parece converger].

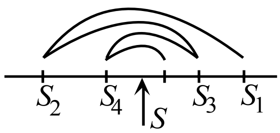
Ej. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ **no converge absolutamente** $\left(\text{pues } \sum \frac{1}{n} \text{ diverge}\right)$, pero sí **converge condicionalmente** (hacia $\log 2$ como se verá en 4.4) gracias a este **criterio para series alternadas** ($+-+-+-\cdots$):

Criterio de Leibniz:

Si $a_n \ge 0$ es decreciente y $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$ converge. Además, el error absoluto $|S-S_N| \le a_{N+1}$ (primer término que se omite).

Es fácil ver que por ser $\{a_n\}$ decreciente:

$S_2 \le S_4 \le \cdots \le S_{2n} \le \cdots \le S_{2n+1} \le \cdots \le S_3 \le S_1$

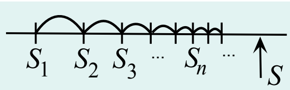


Como S_{2n} y S_{2n+1} son monótonas y acotadas convergen (al mismo límite, pues $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$), con lo que la serie converge.

Sea S su suma. Se ve que para todo n es $\boxed{S_{2n} \le S \le S_{2n+1}}$. Además:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le S - S_{2n} \le S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1};\ |S-S_{2n}| \le a_{2n+1} \\ 0 \le S_{2n-1} - S \le S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n};\ |S-S_{2n-1}| \le a_{2n} \end{array}\right. \Rightarrow \forall N, \text{ par o impar, } |S-S_N| \le a_{N+1}.$$

[Si la serie fuese $\sum(-1)^n a_n = -a_1+a_2-\cdots$, el criterio y la cota del error absoluto serían iguales y una suma parcial está a la derecha (izquierda) de S si lo último que hemos hecho es sumar (restar)].



No olvidemos que esta cota tan sencilla del error sólo se tiene para estas series de Leibniz. Para las de términos positivos convergentes las sumas parciales S_n se van acercando a la suma S formando una sucesión creciente y el error $S-S_N$ es, por tanto, **mayor** que el siguiente término a_{N+1} ; el único criterio que nos ha dado cota del error es el integral (pero es aplicable a muy pocas series)].

Ej. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ convergía absolutamente. También podemos ver que converge usando Leibniz:

Es alternada, $\frac{1}{n^2+1}\to 0$ y $\forall n$ es $\frac{1}{n^2+1}>\frac{1}{(n+1)^2+1}$. Estimemos el valor de su suma S .

Por ejemplo, es: $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}=0.341...<S<\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=0.4$, acotación nada precisa.

Si queremos el valor con $|\text{error}|<10^{-3}$ debe ser $a_{N+1}=\frac{1}{(N+1)^2+1}<\frac{1}{1000}\Leftrightarrow (N+1)^2>999$.

Esto sucede si $N\geq 31$ (pues $31^2=961$, $32^2=1024$). Hay que sumar 31 términos.

$\big[$Con ordenador (o mucha paciencia), $S\approx S_{31}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{962}\approx 0.364\big]$.

Ej. $\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$ es alternada y $a_n\to 0$, pero **no decrece** (y Leibniz no es aplicable).

De hecho diverge: $S_2=1$, $S_4=1+\frac{1}{2}$, ... , $S_{2n}=1+\cdots+\frac{1}{n}\to\infty$, cuando $n\to\infty$.

Ej. Veamos para qué valores de a converge $\sum(-1)^n\operatorname{sen}\frac{1}{n^a}$ y para cuáles lo hace absolutamente.

Si $a\leq 0$, el término general no tiende a 0 (difícil probarlo con rigor) y, por tanto, **diverge**.

Si $a>0$, es **convergente** por Leibniz, pues $a_n=\operatorname{sen}\frac{1}{n^a}>0$ (es alternada), $a_n\to 0$ claramente $\big(\operatorname{sen}x$ continua en $x=0$, $\frac{1}{n^a}\to 0$ y $\operatorname{sen}0=0\big)$ y a_n es decreciente (por crecer $\operatorname{sen}x$ en $[0,1]$).

¿Para cuáles de estos valores $a>0$ converge $\sum\operatorname{sen}\frac{1}{n^a}$? Por tender $\frac{\operatorname{sen}x}{x}\to 1$ cuando $x\to 0$ y ser $\{\frac{1}{n^a}\}$ una sucesión que (para $a>0$) tiende a 0 , se tiene que $\operatorname{sen}\frac{1}{n^a}\sim\frac{1}{n^a}$ y, por tanto:

la serie **converge absolutamente** si $a>1$ (lo hace condicionalmente si $a\in(0,1]$).

Para las series (de términos positivos o signo no definido) con n en exponentes o factoriales son muy útiles los dos siguientes criterios (para las parecidas a $\sum\frac{1}{n^s}$ no sirven y en ese caso se utilizan los criterios vistos hasta ahora):

Criterio del cociente:

$$\boxed{\text{Sea } \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=r\text{ . Entonces: }\begin{array}{l}\text{si } r<1\text{ , } \sum a_n \text{ converge (absolutamente)}\\ \text{si } r>1 \text{ (ó } r=\infty\text{) , } \sum a_n \text{ diverge}\end{array}}$$

(y si $r=1$, el criterio no decide: la serie puede converger o divergir)

$r<1$: sea s con $r<s<1$. $\exists N$ tal que si $n\geq N\;\Rightarrow\;\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\leq s$, es decir, $|a_{n+1}|\leq s|a_n|$.

Por tanto $|a_{n+k}|\leq\cdots\leq s^k|a_n|$ si $n\geq N$. Así: $\sum\limits_{n=N}^{\infty}|a_n|=|a_N|+|a_{N+1}|+\cdots\leq|a_N|\sum\limits_{k=0}^{\infty}s^k$,

geométrica convergente $\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$ también converge $\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ converge.

$r>1$: $\exists N$ tal que si $n\geq N$ es $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$, o sea, $|a_{n+1}|>|a_n|$ y $\not\to 0$ el término general.

Cuando se vean muchas potencias n-simas (y no factoriales) en la serie conviene utilizar:

Criterio de la raíz:

$$\boxed{\text{Sea } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r\text{ . Entonces: }\begin{array}{l}\text{si } r<1\text{ , } \sum a_n \text{ converge (absolutamente)}\\ \text{si } r>1 \text{ (ó } r=\infty\text{) , } \sum a_n \text{ diverge}\end{array}}$$

(si $r=1$, de nuevo no sabemos; casi siempre es $r=1$ a la vez utilizando cociente y raíz)

$r<s<1$: $\exists N/n\geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|}\leq s$, $|a_n|\leq s^n\;\Rightarrow\;\sum\limits_{n=N}^{\infty}|a_n|$ converge $\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ converge.

$r>1$: $\exists N/n\geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|}>1$, $|a_n|>1$ y no tiende a cero el término general.

Ej. $\sum\frac{1}{n^s}$. Cociente: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{n^s}{(n+1)^s}\to 1$. Raíz: $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{(n^{1/n})^s}\to 1$ (pues $\sqrt[n]{n}\to 1$).

Como dijimos arriba, estos criterios no son adecuados para estas series.

Ej. $\sum \frac{(-3)^n}{3+n!}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}}{3+(n+1)!}\,\frac{3+n!}{3^n} = 3\,\frac{3/n!+1}{3/n!+n+1} \longrightarrow 0$. Es **convergente** (absolutamente).

[Por Leibniz es complicado y con la raíz no sabemos pues desconocemos cómo va $\sqrt[n]{n!}$].

Ej. $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$. Pide a gritos el criterio de la raíz: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\log n} \to 0 < 1$. **Converge**.

Ej. $\sum (-1)^n 2^n 7^{-\sqrt{n}}$. $\sqrt[n]{|a_n|} = |a_n|^{1/n} = 2\big[7^{-\sqrt{n}}\big]^{1/n} = 2\cdot 7^{-1/\sqrt{n}} \to 2$.

O bien, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2\,\frac{7^{\sqrt{n}}}{7^{\sqrt{n+1}}} = 2\cdot 7^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \to 2$ $\big($pues $\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0\big)$. **Diverge**.

Ej. $\sum \big[\frac{n}{n+2}\big]^{n^2}$. $\sqrt[n]{|a_n|} = \big[1-\frac{2}{n+2}\big]^n = \Big(\big[1-\frac{2}{n+2}\big]^{-(n+2)/2}\Big)^{-2n/(n+2)} \longrightarrow e^{-2} < 1$. **Converge**.

Ej. $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n^{1/n}} \to 1$. La raíz no decide (y parecía ser el criterio adecuado).

Como $r=1$ probablemente haya que aplicar desigualdades o paso al límite:

Por $\geq$: $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \geq \frac{n^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n}$ divergente $\Rightarrow$ la nuestra es **divergente**.

Por $\to$: $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \sim \frac{1}{n}$ $\big($pues $\frac{a_n}{1/n} = \big[\frac{n+1}{n}\big]^n \to e\,\big)$ $\Rightarrow$ la nuestra **divergente**.

Ej. $\sum \frac{5-\cos n}{n+3^n}$. Lo más corto: $\sum \frac{5-\cos n}{n+3^n} \leq 6\sum \big(\frac{1}{3}\big)^n$ geométrica convergente $\Rightarrow$ **converge**.

Más largo acotando y usando cociente: $\sum \frac{5-\cos n}{n+3^n} \leq \sum \frac{6}{n+3^n}$; $\frac{n+3^n}{n+1+3^{n+1}} = \frac{n3^{-n}+1}{(n+1)3^{-n}+3} \to \frac{1}{3} < 1$.

También se podría ver que es menor que la convergente $\sum \big(\frac{1}{2}\big)^n$: $\frac{a_n}{1/2^n} = \frac{5-\cos n}{n2^{-n}+(3/2)^n} \to 0$ $\big[\frac{ac}{\infty}\big]$.

En los dos siguientes discutimos la convergencia según los valores de los a y b que aparecen:

Ej. $\sum \frac{n^a}{b^n}$, con $\begin{matrix} a>0 \\ b\neq 0 \end{matrix}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^a|b|^n}{n^a|b|^{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^a}{|b|} \to \frac{1}{|b|}$ $\Big($o bien, $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n^{1/n})^a}{|b|} \to \frac{1}{|b|}\Big)$.

Cociente y raíz dicen que **converge para** $|b|>1$ (de esto deducimos que $n^a/b^n \to 0$ si $|b|>1$) y que diverge para $|b|<1$. Para $b=\pm 1$ los criterios no deciden, pero está claro que diverge porque el término general no tiende a 0 (bastaba esto para decir que divergía para $|b|\leq 1$).

Ej. $\sum \frac{b^n}{n!}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|b|^{n+1}/(n+1)!}{|b|^n/n!} = \frac{|b|}{n+1} \to 0$. **Convergente** $\forall b$, por gordo que sea.

Por tanto, $b^n/n! \to 0$ para cualquier b , límite que tampoco es fácil de calcular directamente.

Ej. $\sum \frac{n!}{n^n}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{e} < 1$. **Converge**.

[Y de aquí se deduce que $n!/n^n \to 0$, otro límite que no era trivial calcular].

Los tres últimos ejemplos (y un límite admitido en sucesiones) nos permiten comparar la rapidez con que varias sucesiones se van al ∞ . El símbolo "$\ll$" representará que lo de la izquierda dividido entre lo de la derecha tiende a 0 cuando n tiende a ∞ :

$$\boxed{\log n \ll n^a, a>0 \ll b^n, b>1 \ll n! \ll n^n}$$

Ej. Acabemos con una serie en que los sumandos dependen de x (una 'serie de funciones'):

$\sum \frac{\operatorname{sen}^n x}{\sqrt{n}}$. Como $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n}\,|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{n+1}} \to |\operatorname{sen} x|$, la serie converge si $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.

Para $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ el cociente no decide. Si k es par, la serie que resulta $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente.

Si k es impar, queda $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergente (Leibniz). Así pues, **converge si** $x \neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

4.2. Sucesiones y series de funciones

Consideramos **sucesiones** cuyos términos son **funciones** con un dominio común A :

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ... \text{ para } x \in A$$

Para cada x fijo de A tenemos una sucesión $\{f_n(x)\}$ de números reales y en muchos casos sabemos (desde 2.1) calcular su límite (si lo tiene), que, en general, será una función de x. Damos un nombre nuevo a esta vieja convergencia (para cada punto x) para distinguirla de la que definiremos un poco más adelante:

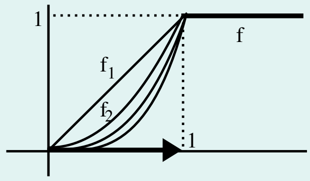
Def. $\{f_n\}$ **converge puntualmente** hacia f en A si para cada $x \in A$ es $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Sería bueno que f conservase las propiedades de las f_n, pero esto, en general, no ocurre:

Ej. $f_n(x) = \begin{cases} x^n, \, 0 \leq x \leq 1 \\ 1, \, 1 \leq x \end{cases}$. Todas las f_n son continuas en $[0,\infty)$.

Para cada $x \in [0,\infty)$ existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, \, 0 \leq x < 1 \\ 1, \, 1 \leq x \end{cases}$.

Y, sin embargo, la función límite puntual $f(x)$ es discontinua.

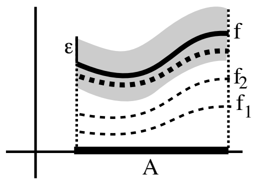


Para que se conserve la continuidad se necesita una definición más fuerte de convergencia:

Def. $\{f_n\}$ **converge uniformemente** hacia la función f en A si $\forall \varepsilon > 0$ existe algún N tal que $\forall x \in A$, si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

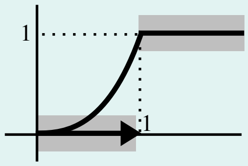
[El N vale $\forall x$, sólo depende de ε; en cambio, la convergencia puntual significa: $\forall x \in A$ y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon, x)$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$].

Gráficamente, que $\{f_n\} \to f$ uniformemente significa que a partir de un N todas las gráficas de las f_n quedan totalmente dentro de una banda de altura 2ε alrededor de la de f. Si la convergencia de las f_n es sólo puntual, para cada x el N será distinto y no se podrá dar uno que sea válido para todos los puntos de A.



Claramente, **convergencia uniforme** $\Rightarrow$ **convergencia puntual. Pero** $\Leftarrow$ **es falsa**:

Esto lo prueba la $\{f_n\}$ de arriba: por alto que sea el N siempre hay funciones de la sucesión que se salen de la banda de radio ε. Formalizando algo más: toda f_n toma el valor $\frac{1}{2}$ que queda fuera de la banda si $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Para cada x existe N tal que si $n \geq N$ el punto $(x, f_n(x))$ está dentro de la banda, pero hace falta elegir N mayores a medida que nos acercamos a 1. En un intervalo $[0,a]$, con $a < 1$, la convergencia sí sería uniforme, pues el N que valiese para $x = a$ claramente valdría también para el resto de los x.

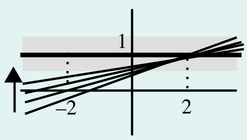


Ej. Estudiemos la convergencia de $g_n(x) = \frac{n+x}{n+2}$ en i) $A = [-2,2]$, ii) $A = \mathbf{R}$

Hay límite puntual en todo $\mathbf{R}$ pues $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \; \forall x$.

Y en $[-2,2]$ es también uniforme:

$$\left|\tfrac{n+x}{n+2} - 1\right| = \tfrac{|x-2|}{n+2} \leq \tfrac{|x|+2}{n+2} \leq \tfrac{4}{n+2} \leq \tfrac{4}{n} < \varepsilon \text{ si } n \geq N > \tfrac{4}{\varepsilon} \; \forall x \in [-2,2].$$



Pero no converge uniformemente en $\mathbf{R}$ porque cada g_n (no acotada) se escapa de la banda.

Para estudiar la convergencia uniforme, como siempre en las definiciones con ε, hemos partido de lo que se quería hacer pequeño y avanzado mediante desigualdades hacia una expresión más sencilla. Ha sido esencial hacer desaparecer la x, pues el N buscado debía depender solo de ε. Podemos ahorrarnos las últimas cuentas con el sencillo teorema:

Teorema:

$$\boxed{\text{Si } |f_n(x)-f(x)|<a_n \ \forall x\in A \text{ y } a_n\to 0 \text{ entonces } f_n(x)\to f(x) \text{ uniformemente en } A}$$

(pues dado ε, el N que asegura $a_n<\varepsilon$ nos vale, desde luego, para todos los $x\in A$).

Para encontrar el a_n en ocasiones bastará hacer acotaciones, como en el ejemplo anterior, pero otras veces será más complicado y, como en el siguiente, habrá que utilizar derivadas:

Ej. Estudiemos la convergencia de $h_n(x)=\frac{x}{1+n^4x^2}$.

Está claro que $\{h_n\}$ converge puntualmente en todo $\mathbf{R}$: $\frac{x}{1+n^4x^2}\underset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x$.

Si queremos ver la convergencia uniforme en todo $\mathbf{R}$ de $\{h_n\}$ nos encontramos con problemas:

$|h_n(x)-0|=\frac{|x|}{1+n^4x^2}$ no parece acotable en $\mathbf{R}$ (la cota sencilla $\leq |x|$ no lleva a nada).

[a partir de lo anterior sí sería fácil ver que sí hay convergencia uniforme en $[1,2]$, por ejemplo]

Un modo natural de acotar $|f_n(x)-f(x)|$ (sin usar los $\leq$) es buscar el máximo de esa diferencia. En nuestro caso, para acotar $|h_n(x)|$ vamos a hallar los extremos de cada $h_n(x)$:

$h_n'(x)=\frac{1-n^4x^2}{[1+n^4x^2]^2}=0 \Rightarrow h_n(x)$ crece en $[-\frac{1}{n^2},\frac{1}{n^2}]$ y decrece en el resto de $\mathbf{R}$.

$h_n(\pm\frac{1}{n^2})=\pm\frac{1}{2n^2}$ y además $h_n(x)\underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$. Así que $|h_n(x)|\leq\frac{1}{2n^2}=a_n\ \forall x\in\mathbf{R}$.

Como $a_n\to 0$, $\{h_n\}\to 0$ uniformemente en $\mathbf{R}$ (en contra de lo que se podía pensar en principio).

Probemos que la convergencia uniforme tiene la buena propiedad que la puntual no tenía:

Teorema:

$$\boxed{f_n \text{ continuas en un intervalo } I \text{ y } \{f_n\}\to f \text{ uniformemente en } I \Rightarrow f \text{ continua en } I.}$$

Veamos que f es continua en un $x\in I$ cualquiera.

Sea $\varepsilon>0$. Por la convergencia uniforme, existe algún n tal que $|f(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall y\in I$.

En particular, para todo h tal que $x+h\in I$, $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ y $|f(x+h)-f_n(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

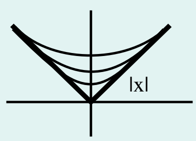
Como f_n es continua en x existe $\delta>0$ tal que si $|h|<\delta$ entonces $|f_n(x+h)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

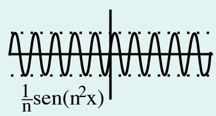
Por tanto, si $|h|<\delta$ entonces

$$|f(x+h)-f(x)|\leq|f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

[Este teorema basta para probar que las f_n del primer ejemplo no convergen uniformemente en $[0,\infty)$, pues si la convergencia fuese uniforme, la $f(x)$ debería ser continua].

[Si las f_n son derivables, que $f_n\to f$ uniformemente no basta para que f sea derivable, o puede ser f derivable y no coincidir f' con el límite de las f_n' (situaciones sugeridas por los ejemplos de la derecha); para que se cumplan ambas cosas además deben las f_n' converger uniformemente].





Todo lo anterior se aplica de modo natural a las **series de funciones:**

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente o uniformemente en A hacia f si lo hace la sucesión de sumas parciales $S_n = f_1 + \cdots + f_n$.

Por lo visto para sucesiones de funciones, y como S_n es continua si las f_n lo son, tenemos:

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ uniformemente y f_n continuas en un intervalo $I \Rightarrow$ f es continua en I .

Aunque la definición de convergencia uniforme de series de arriba aparenta ser tan simple, está claro que será casi imposible de aplicar en la práctica (la puntual sí es fácil, aplicando para x fijos los criterios vistos para series numéricas). Es claro que casi nunca se podrá hallar directamente el N que haga $|f_1(x) + \cdots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (ni siquiera sabemos quien es $f(x)$, pues casi ninguna serie se puede sumar). Pero hay un criterio muy útil que permite ver para bastantes series de funciones que convergen uniformemente:

Criterio de Weierstrass:

Sean $\{f_n\}$ definidas en A y $\{M_n\}$ una sucesión de números reales tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in A$ y tal que $\sum M_n$ converge. Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en A .

$\forall x \in A$, $\sum |f_n(x)|$ converge y por tanto $\sum f_n$ converge puntualmente. Sea f su suma.

$$|f(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} M_n$$

que se puede hacer tan pequeño como queramos haciendo N suficientemente grande ($\sum M_n$ converge). Tenemos un N independiente del x , S_n converge uniformemente.

[Si no podemos aplicar este criterio no sabremos decir nada sobre la convergencia uniforme de una serie (pero está claro que aunque no consigamos encontrar la $\sum M_n$ convergente, esto no significa que la $\sum f_n$ no converja uniformemente)].

Ej. $\sum \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ es **uniformemente convergente** en todo $\mathbf{R}$ pues $\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

[Deducimos, por ejemplo, que la suma $f(x)$ de esta serie es función continua en todo $\mathbf{R}$].

La serie obtenida derivando término a término: $\sum \frac{\cos nx}{n}$ diverge, por ejemplo, cuando $x=0$.

[Para otros x , como $x = \pi$, converge (Leibniz); y para casi todos no sabemos decirlo].

[Como vemos, no se pueden derivar las sumas infinitas, en general, como las sumas finitas; las series de potencias que veremos a continuación sí se podrán derivar término a término].

Ej. Estudiemos ahora la convergencia de $\sum h_n$ con $h_n = \frac{x}{1+n^4x^2}$ (vista hace poco).

Lo que sabíamos de series numéricas nos basta para ver que converge puntualmente $\forall x \in \mathbf{R}$:

si $x=0$ queda $\sum 0$; si $x \neq 0$, $x \sum \frac{1}{1+n^4x^2}$ converge pues $\frac{1}{1+n^4x^2} \sim \frac{1}{n^4}$ y $\sum \frac{1}{n^4}$ converge.

Para ver si la serie es uniformemente convergente sólo disponemos de Weierstrass.
No saltaba a la vista la serie numérica con la que comparar, pero según hemos probado:

$|h_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$ $\forall x \in \mathbf{R}$ y $\sum \frac{1}{2n^2}$ convergente $\Rightarrow$ $\sum h_n(x)$ **converge uniformemente** en $\mathbf{R}$.

[Otras propiedades importantes de la convergencia uniforme (que veremos en 5.5) serán las relacionadas con la integración: el límite de las integrales de una sucesión de funciones integrables será la integral del límite cuando haya convergencia uniforme, pero podría no serlo si sólo hay la puntual (y lo mismo sucederá con las series)].

4.3. Series de potencias

A una serie de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ se le llama serie de potencias en $(x-a)$.

Para cada x que converja la suma de la serie será un número real. Por tanto, define una función $f(x)$ cuyo dominio serán los x para los que converge. Supondremos a partir de ahora, por sencillez, que $a=0$ (en caso contrario haríamos $x-a=s$ y estaríamos en el caso $a=0$):

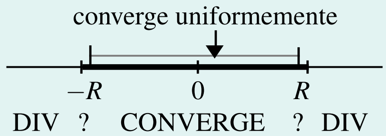
$\boxed{f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}$ (viene a ser, pues, un ‘polinomio infinito’).

Una serie de ese tipo siempre converge en $x=0$ $\big($y $f(0)=a_0\big)$, pero no tiene que hacerlo $\forall x$: vimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si y sólo si $|x|<1$ $\big($y que su suma era $f(x)=\frac{1}{1-x}\big)$.

En general, **toda serie de potencias converge en un intervalo centrado en el origen** (que puede degenerar en $x=0$ o ampliarse a todo $\mathbf{R}$):

Teorema:

A cada serie de potencias está asociado un número positivo R , llamado **radio de convergencia** de la serie, que, según los casos, tiene las siguientes propiedades:
i) si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$,
ii) si R es un número real positivo, la serie converge si $|x|<R$ y diverge si $|x|>R$,
iii) si $R=\infty$, la serie converge para todo x .
Además, si $0<x_0<R$, la serie converge uniformemente en $[-x_0,x_0]$.



En el caso ii), **para $x=R$ y $x=-R$ la serie puede converger o divergir**. El teorema no dice que la serie converja uniformemente en $(-R,R)$, sino que lo hace en $[-x_0,x_0]$ con x_0 tan cercano a R como queramos).

Comencemos demostrando que:

Si $\sum a_n c^n$ converge para un c entonces $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-x_0,x_0]$, si $0<x_0<|c|$, y converge puntualmente (y absolutamente) en $(-|c|,|c|)$:

Como $\sum a_n c^n$ converge $\Rightarrow$ $a_n c^n \to 0$ y por tanto está acotada: $\exists K$ tal que $|a_n c^n|\leq K$

$$\Rightarrow \text{ si } x\in[-x_0,x_0]\,,\ |a_n x^n| \leq |a_n c^n|\big|\tfrac{x_0}{c}\big|^n \leq K\big|\tfrac{x_0}{c}\big|^n .$$

Como $\sum\big|\frac{x_0}{c}\big|^n$ es geométrica convergente $\big(\big|\frac{x_0}{c}\big|<1\big)$, Weierstrass asegura que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-x_0,x_0]$. Además para todo $x\in(-|c|,|c|)$ existe x_0 con $|x|<x_0<|c|$, con lo que $\sum|a_n x^n|$ converge puntualmente.

Sea $S=\big\{x:\sum a_n x^n \text{ converge}\big\}$. Es no vacío ($0\in S$).

Si hay algún $x\notin S$, $|x|$ es cota superior de S (no converge para ningún real mayor por el resultado anterior) y por tanto tiene extremo superior. Veamos que el radio de convergencia $R=\sup S$:
si $|x|>R$ la serie diverge (si no, existirían puntos de S mayores que R); si $|x|<R$ existe c con $|x|<c<R$ para el que $\sum a_n c^n$ converge (R es cota superior) y por tanto $\sum a_n x^n$ también converge. Si $0<x_0<R$, existe c con $x_0<c<R$ para el que $\sum a_n x^n$ converge y la serie converge uniformemente en $[-x_0,x_0]$.

Si no existe $x\notin S$, la serie converge $\forall x$: $R=\infty$. Se ve de la misma forma que hay convergencia uniforme en todo $[-x_0,x_0]$.

El R se podrá calcular casi siempre mediante el criterio del cociente o la raíz.

Por ejemplo, **si en la serie aparecen todos los** x^n $\big($no si es del tipo $\sum a_n x^{2n}$ ó $\sum a_n x^{2n+1}\big)$ se tiene que: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, si dichos límites existen o son infinito, pues

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1\ [>1]\ \Leftrightarrow\ |x|<\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\ \Big[\ |x|>\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\ \Big].$$

[Cálculos parecidos con la raíz)].

Para ver lo que pasa **en los extremos** del intervalo (si es finito) habrá que utilizar los otros criterios conocidos (comparaciones, convergencia absoluta, Leibniz...) pues ya habremos sacado todo su jugo al cociente o la raíz.

Ej. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{5n+1}}{(n-2)!}$. Cociente: $\frac{|x|^{5n+6}}{(n-1)!}\frac{(n-2)!}{|x|^{5n+1}}=\frac{|x|^5}{n-1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ \ \forall x\ \Rightarrow$ **converge** $\forall x$, es decir, $R=\infty$.

[No podíamos aplicar las fórmulas para R y por eso usamos directamente el cociente. La raíz no era adecuada por la presencia del factorial].

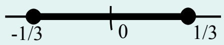
Ej. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^n x^n$. $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0=R$: la serie **sólo converge si** $x=0$ (y podemos tirarla a la basura).

[El cociente es aquí bastante más complicado].

Ej. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[-9]^n}{2n+1}x^{2n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9^{n+1}|x|^{2n+2}}{2n+3}\frac{2n+1}{9^n|x|^{2n}}=9|x|^2<1\Leftrightarrow|x|<\frac{1}{3}=R$. ¿Que pasa en los extremos?

Si $x=\pm\frac{1}{3}$ queda $\sum\frac{[-1]^n}{2n+1}$ en ambos casos, convergente por Leibniz $\big(\frac{1}{2n+1}\to0$ y decrece$\big)$.

Esta serie de potencias converge exactamente en el cerrado $\big[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big]$.



Ej. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n n}$. $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{|x|^2 n}{4(n+1)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{|x|^2}{4}$, $\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{|x|^2}{4n^{1/n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{|x|^2}{4}\ \Rightarrow$ converge si $|x|^2<4$.

Por tanto, la serie converge si $|x|<2$ y diverge si $|x|>2$. Si $|x|=2$ ($x=\pm2$) estos criterios no deciden, pero entonces es $\sum\frac{1}{n}$ divergente como sabemos. En resumen, converge si $x\in(-2,2)$.

Ej. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\log n}$. Necesitamos L'Hôpital (o admitir límites ya citados basados en ella):

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$, porque $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{\log x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/(x+1)}{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x}=1$.

Si $x=-1$, $\sum\frac{(-1)^n}{\log n}$ converge por Leibniz $\big(\frac{1}{\log n}\to0$ y decrece porque $\log n$ crece$\big)$.

Si $x=1$, $\sum\frac{1}{\log n}$ diverge, pues $\frac{1}{\log n}>\frac{1}{n}$ y $\sum\frac{1}{n}$ diverge. Converge si $x\in[-1,1)$.

$\big[$Sin L'Hôpital: converge si $|x|<1$, pues $\frac{|x|^n}{\log n}<|x|^n$ y $\sum|x|^n$ geométrica convergente, y si $|x|>1$, el término general no tiende a 0 $\big($pues si $|x|>1$ es $\log n\ll|x|^n\big)$ y diverge$\big]$.

Ej. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{6}x^n$. No valen cociente ni raíz. Buscamos directamente el intervalo de convergencia.

$|\cos\frac{n\pi}{6}||x|^n\le|x|^n\Rightarrow$ si $x\in(-1,1)$ converge. Si $|x|\ge1$ el término general no tiende a 0.

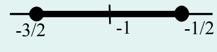
Ej. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^3+1}}(x+1)^n$. Podríamos hacer $x+1=s$, pero estudiamos la convergencia directamente.

Cociente: $\frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{|x+1|^{n+1}}{|x+1|^n}\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{(n+1)^3+1}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2|x+1|\ \Rightarrow$ converge si $|x+1|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$.

$\big[$Y diverge si $|x+1|>\frac{1}{2}\big]$. En los extremos:

Si $x=-\frac{1}{2}$, nos queda $\sum\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ que converge $\big($se comporta como $\sum\frac{1}{n^{3/2}}\big)$.

Si $x=-\frac{3}{2}$, $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+1}}$ absolutamente convergente (o converge por Leibniz).



Propiedad esencial de las series de potencias es que (como si fuesen polinomios) **se pueden derivar término a término dentro de su intervalo de convergencia** $|x|<R$:

Teorema:

Sea $R>0$ (finito o infinito) y sea $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x|<R$. Entonces para $|x|<R$:
f es derivable, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge y $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$

[La prueba exige propiedades no vistas de derivación de series (ver Spivak); en el capítulo 5 veremos que también las series de potencias se podrán integrar término a término en $|x|<R$].

Aplicando el teorema sucesivamente a f', f'', ... obtenemos que para $|x|<R$:

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}=2a_2+6a_3x+\cdots\,,\ \ldots\,,$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}=k!\,a_k+\cdots\ \Rightarrow$$

Una f definida por una serie de potencias es C^∞ en $|x|<R$ y $f^{(k)}(0)=k!\,a_k$.

Las series de potencias también se suman, multiplican,... como si fuesen polinomios:

Teorema:

Sean $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x|<R_f$ y $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x|<R_g$. Entonces si $|x|<\min(R_f,R_g)$:
$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n+b_n]x^n$, $f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$

[Lo de la suma es consecuencia de las propiedades de series numéricas; lo del producto es más complicado y lo admitimos sin demostración; también se pueden realizar la división f/g (si f/g tiene límite en $x=0$) y la 'composición' de series (veremos ambas cosas en ejemplos)].

Ej. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots$. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$ (cociente, desde luego).
Converge $\forall x$ (veremos en la próxima sección que a e^x).
Su serie derivada coincide con ella: $f'(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots=f(x)\ \forall x\in\mathbf{R}$ (natural, si es e^x).

Ej. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+\cdots$. Su radio de convergencia es $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1\ \Rightarrow$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots,\ f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}x^{n-2}=\frac{1}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x^2}{4}+\cdots,\ \text{si } |x|<1.$$

Como $\sum\frac{1}{n^2}$ y $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ convergen, la serie de la f converge en los dos extremos $x=\pm1$ del intervalo de convergencia. Pero las series de las derivadas se comportan peor en esos puntos. Es fácil ver que la de f' converge en $[-1,1)$ y la de f'' lo hace sólo en $(-1,1)$.

Siempre las funciones definidas por series son 'muy buenas' en $(-R,R)$ (hemos visto que tienen infinitas derivadas ahí, o incluso en todo $\mathbf{R}$, si $R=\infty$). El problema fundamental de estas funciones tan buenas es que para hallar sus valores debemos sumar series (y por eso casi siempre nos tendremos que conformar con valores aproximados).

Ej. Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^{3n}}{n!}$, precisar para qué x converge la serie y probar que $f'(1)>150$.

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{4^{n+1}}{4^n}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}}=\frac{4|x|^3}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ \Rightarrow\ \text{la serie converge para todo } x.$$

Como $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot4^n x^{3n-1}}{(n-1)!}$, será $f'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot4^n}{(n-1)!}=\frac{12}{1}+\frac{48}{1}+\frac{3\cdot64}{2}+\cdots>156$.

$\big[$O mirando la serie de arriba, observamos que $f(x)=e^{4x^3}\ \Rightarrow\ f'(1)=12e^4>12\cdot2^4=192\big]$.

Ej. Hallemos de varias formas el desarrollo en serie de $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{[x+3][x-1]}$.

Sabemos que:

$$\frac{1}{x-1}=-[1+x+x^2+x^3+\cdots]=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n \text{ si } |x|<1 ,$$

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-[-\frac{x}{3}]}=\frac{1}{3}[1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}+\cdots]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-x]^n}{3^n} \text{ si } |x|<3 .$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}\frac{1}{x+3}=-\frac{1}{3}\left[1+(1-\tfrac{1}{3})x+(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9})x^2+(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{27})x^3+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}x-\frac{7}{27}x^2-\frac{20}{81}x^3+\cdots , \quad \text{si } |x|<1=\text{mín}\{1,3\}$$

No podemos escribir más términos del desarrollo del producto si no escribimos algún termino más de cada serie. Los puntos representan sólo las potencias de orden superior. Si pusiésemos el coeficiente de x^4 con lo escrito, sería erróneo (faltarían sumandos).

Lo más rápido (descomponiendo en fracciones simples; usaremos esta idea en las integrales):

$$\frac{1}{[x+3][x-1]}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right]=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n x^n}{3^n}=-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left[3+\frac{[-1]^n}{3^n}\right]x^n$$

[Este es el único camino que nos da una expresión general para la serie].

Ahora 'dividimos': buscando una serie $\sum c_n$ tal que

$$[c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots][x^2+2x-3]=1 .$$

Igualando sucesivamente las potencias de $x^0,x^1,x^2,\ldots$ vamos obteniendo:

$$x^0: -3c_0=1 \Rightarrow c_0=-\frac{1}{3} \quad ; \quad x^1: 2c_0-3c_1=0 \Rightarrow c_1=\frac{2}{3}c_0=-\frac{2}{9} \quad ;$$

$$x^2: c_0+2c_1-3c_2=0 \Rightarrow c_2=\frac{1}{3}c_0+\frac{2}{3}c_1=-\frac{1}{9}-\frac{4}{27}=-\frac{7}{27} \quad ; \quad \ldots$$

[Si numerador y denominador fuesen series en vez de polinomios, el proceso sería el mismo].

De otra forma tampoco nada práctica (pero que sugiere cómo componer series):

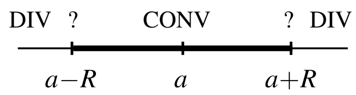
$$f(x)=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}(2x+x^2)}=-\frac{1}{3}[1+\tfrac{1}{3}(2x+x^2)+\tfrac{1}{9}(2x+x^2)^2+\tfrac{1}{27}(2x+x^2)^3+\cdots]$$

Y eligiendo (sin olvidar ningún término) todos los coeficientes de las sucesivas potencias:

$$f(x)=-\frac{1}{3}\left[1+\tfrac{2}{3}x+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{4}{9})x^2+(\tfrac{4}{9}+\tfrac{8}{27})x^3+\cdots\right]$$

[De nuevo, para dar el coeficiente de x^4 necesitamos más términos que los escritos].

[La teoría para la serie más general $\sum a_n(x-a)^n$, como dijimos, es la misma; el intervalo $|x-a|<R$ de convergencia está ahora centrado en a].

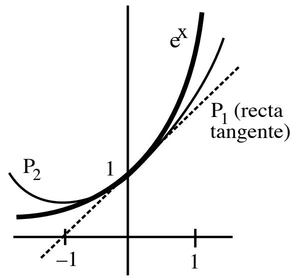


4.4. Polinomios y series de Taylor

¿Cómo hallar, sin calculadora, $\sqrt{e}$, $\log 2$ ó $\operatorname{sen} 1$? Las funciones más fáciles de evaluar son los polinomios. Si encontramos un polinomio P que se parezca mucho a una función f dada cerca de un punto a (y podemos estimar el error cometido al sustituir f por P), podremos hallar valores aproximados de $f(x)$ para los x próximos a a.

Ej. Sea $f(x)=e^x$. El polinomio de grado 1 más parecido a f cerca de $x=0$ es la recta tangente: $P_1(x)=f(0)+f'(0)x=1+x$.
Observemos que satisface: $P_1(0)=f(0)$; $P_1'(0)=f'(0)$.
Probablemente se parecerá más a e^x el polinomio P_2 de grado 2 que cumpla $P_2(0)=f(0)$; $P_2'(0)=f'(0)$; $P_2''(0)=f''(0)$, o sea,

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\tfrac{f''(0)}{2}x^2=1+x+\tfrac{1}{2}x^2 .$$

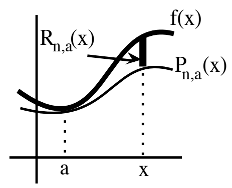


En general, **el P_n que mejor aproximará a una función f cerca de $x=a$ será el que coincida con f y con sus n primeras derivadas en a**. Se comprueba fácilmente que:

Def. Si f tiene n derivadas en a, el polinomio, de grado $\leq n$,

$$P_{n,a}(x)=f(a)+f'(a)[x-a]+\frac{f''(a)}{2!}[x-a]^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}[x-a]^n$$

cumple $P_{n,a}^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$, para $k=0,..,n$. Al $P_{n,a}$ se le llama **polinomio de Taylor** de f de grado n en a. Se llama $R_{n,a}(x)$, **resto** del polinomio de Taylor, al **error** cometido para cada x al sustituir $f(x)$ por $P_{n,a}(x)$, es decir, $f(x)=P_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$.



Es esperable que el $R_{n,a}(x)$ sea pequeño si x es cercano a a y que disminuya al aumentar n. La siguiente expresión del resto, a pesar de venir en función de un c desconocido, nos va a permitir acotar este error en muchas ocasiones:

Teorema (forma de Lagrange del resto):

Si f, f', ... , $f^{(n+1)}$ están definidas en $[a,x]$ (ó en $[x,a]$) entonces
$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}[x-a]^{n+1}$ para algún $c\in(a,x)$ si $x>a$ [ó $c\in(x,a)$ si $x<a$].

[Otras expresiones del resto son útiles, pero se necesitan las integrales. Observemos que si f es un polinomio de grado n se deduce $R_{n,a}=0$, es decir, que, como debía suceder, el polinomio coincide con su polinomio de Taylor de grado n].

Para cada $t\in(a,x)$ tenemos que $f(x)=f(t)+f'(t)[x-t]+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}[x-t]^n+R_{n,t}(x)$.
Miremos el resto como función de t para x fijo: $S(t)=R_{n,t}(x)$. Derivando respecto a t:

$$0=f'(t)+\left(-f'(t)+f''(t)[x-t]\right)+\left(-f''(t)[x-t]+\frac{f'''(t)}{2!}[x-t]^2\right)$$
$$+\cdots+\left(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}[x-t]^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}[x-t]^n\right)+S'(t) \;\Rightarrow\; S'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}[x-t]^n$$

El TVM de Cauchy en $[a,x]$ para $S(t)$ y $g(t)=[x-t]^{n+1}$ implica que $\exists c\in(a,x)$ tal que

$$\frac{S(x)-S(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{S'(c)}{g'(c)}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\frac{[x-c]^n}{[x-c]^n}\frac{1}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Como $S(x)=R_{n,x}(x)=0$, $S(a)=R_{n,a}(x)$, $g(x)=0$, $g(a)=[x-a]^{n+1}$ se tiene el resultado.
[Igual si $x<a$].

Normalmente hallaremos los polinomios para $a=0$. En ese caso no escribiremos las a de los subíndices y las expresiones anteriores adoptan la forma (fórmula de **McLaurin**):

Si $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ existen en $[0,x]$ [ó $[x,0]$] entonces para algún $c\in(0,x)$ [ó $c\in(x,0)$]

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Hallando las derivadas se obtienen fácilmente los siguientes polinomios y restos:

$$\mathrm{e}^x=1+x+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}+R_n(x)\ \text{ con } R_n(x)=\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\operatorname{sen}x=x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}-\tfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+1}(x)\ \text{ con } R_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

$$\cos x=1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}-\tfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n}(x)\ \text{ con } R_{2n}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

[Para $\operatorname{sen}x$, como la derivada $\operatorname{sen}^{(2n+2)}(0)=(-1)^{n+1}\operatorname{sen}0=0$, es $P_{2n+1}\equiv P_{2n+2}$; por eso en su resto aparecen $2n+3$ y no $2n+2$; y algo muy parecido sucede con el $\cos x$].

Dado un x, hay en los tres casos cotas fáciles para el resto en términos de cosas conocidas:

$$\text{para } \mathrm{e}^x:\ \text{ si } x>0,\text{ es } |R_n(x)|\le\tfrac{\mathrm{e}^x|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ ;\ \text{ si } x<0,\text{ es } |R_n(x)|\le\tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ ;$$

$$\text{para } \operatorname{sen}x,\ |R_{2n+1}(x)|\le\tfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\ \forall x\ ;\ \text{ para } \cos x,\ |R_{2n}(x)|\le\tfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\ \forall x\,.$$

Como probamos en 4.1, una sucesión de la forma $|x|^k/k!\to 0\ \forall x$ cuando $k\to\infty$. Por tanto, **podemos aproximar para cualquier x el valor de e^x, $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$ con la precisión que queramos utilizando un polinomio de Taylor con n suficientemente grande** (aunque habrá que tomar un n mayor cuanto más lejano de 0 esté el x).

El $\log x$ no está ni definido en $x=0$. Por eso lo que se desarrolla es el $\log(1+x)$. Es fácil ver que la derivada n-sima de esta función es $[-1]^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ y por tanto

$$\log(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}+\cdots+[-1]^{n-1}\tfrac{x^n}{n}+R_n(x)\ \text{ con } R_n(x)=\frac{[-1]^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$$

Se puede probar además (no con esta expresión del resto) que **los polinomios del $\log(1+x)$ sólo aproximan a la función si $-1<x\le 1$**.

Ej. Calculemos con error menor que 10^{-5} el $\operatorname{sen}1$.

$|R_{2n+1}(x)|\le\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\Rightarrow|R_{2n+1}(1)|\le\frac{1}{(2n+3)!}<\frac{1}{10000}$ si $2n+3\ge 9\Rightarrow$

$\operatorname{sen}1\approx 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}\approx 0.84147$ con error $|R_7(1)|\le\frac{1}{9!}<10^{-5}$.

Ej. Si aproximamos $\operatorname{sen}2$ con este mismo $P_7(x)$ el error será mayor:

$\operatorname{sen}2\approx 2-\frac{8}{6}+\frac{32}{120}-\frac{128}{5040}\approx 0.9079$; $|R_7(2)|\le\frac{2^9}{9!}=\frac{4}{2835}\approx 0.0014$.

(Estas cotas pronto serán más fáciles con las series de Taylor).

n	n!	2^n
2	2	4
3	6	8
4	24	16
5	120	32
6	720	64
7	5040	128
8	40320	256
9	362880	512
10	3628800	1024

Ej. Hallemos ahora $\log\frac{4}{5}=\log(1-\frac{1}{5})$ con error $<10^{-3}$.

Como $\left|R_n(-\frac{1}{5})\right|=\frac{1}{(n+1)5^{n+1}(1+c)^{n+1}}\underset{-1/5<c<0}{<}\frac{1}{(n+1)5^{n+1}(4/5)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}<\frac{1}{1000}$ si $n\ge 3$,

debemos usar el polinomio de grado 3: $\log\frac{4}{5}\approx-\frac{1}{5}-\frac{1}{50}-\frac{1}{375}\approx-0.223$ con error $<10^{-3}$.

De otra forma (que evitará la acotación del resto en cuanto tengamos las series de Taylor):

$\log\frac{4}{5}=-\log(1+\frac{1}{4})\approx-\frac{1}{4}+\frac{1}{32}-\frac{1}{192}\approx-0.224$, con $\left|R_3(\frac{1}{4})\right|=\frac{1}{4\cdot 4^4(1+c)^4}\underset{0<c<1/4}{<}\frac{1}{4^5}<\frac{1}{1000}$.

Dada f con infinitas derivadas en 0 su **serie de Taylor** en $x=0$ es: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n}$.

Esta serie de potencias es un '**polinomio de Taylor de infinitos términos**'; su N-sima suma parcial es $P_N(x)$. Es previsible que una f coincida con su serie de Taylor (al menos cerca de 0).

Como $f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n+R_N(x)$, está claro que $\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \Leftrightarrow R_N(x)\underset{N\to\infty}{\to}0}$,

es decir, $f(x)$ **coincide su serie de Taylor en los x para los que el resto tienda a 0 .**

Vimos hace poco que el resto $R_N(x)\to 0\ \forall x$ para e^x , $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$. Así pues:

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ ,\ \ \operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n x^{2n}}{(2n)!}}\ ,\ \forall x\in\mathbf{R}$$

[La serie derivada de la de e^x es ella misma, derivando la de $\operatorname{sen}x$ obtenemos la de $\cos x$ y derivando la de ésta obtenemos la del seno cambiada de signo; observemos también que sólo contiene potencias impares la serie del seno (debe cambiar de signo al cambiar x por $-x$) y pares la del coseno].

Operando con la serie de e^x y la de $e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots$ obtenemos que:

$$\boxed{\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\ ,\ \forall x\in\mathbf{R}$$

Sabemos que $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ si $|x|<1\ \Rightarrow\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}[-x]^n$ y $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}[-1]^n x^{2n}$ si $|x|<1$.

Por tanto: $\boxed{\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n}{n+1}\,x^{n+1}\ ,\ \ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n}{2n+1}\,x^{2n+1}\ ,\ \ \text{para } |x|<1}$

pues las derivadas de las series son las de arriba y en $x=0$ se anulan funciones y series.

[La serie de $\log(1+x)$ converge también en $x=1$ y la de $\arctan x$ en $x=\pm 1$ (en ambas $R=1$) lo que no hacen las series derivadas; se puede ver que convergen (lentamente) hacia $\log 2$ y $\pm\arctan 1$:

$$\log 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\cdots\qquad,\qquad \tfrac{\pi}{4}=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots$$

Parece normal que la serie del $\log(1+x)$ o la de $1/(1+x)$ sólo converjan para $|x|<1$ pues en $x=-1$ las funciones se van a infinito, pero es sorprendente que lo hagan sólo en ese intervalo las series de $1/(1+x^2)$ o de $\arctan x$ ya que son funciones derivables en todo $\mathbf{R}$. La explicación se tendrá cuando se miren esas series en el plano complejo].

Otra serie muy útil es la de $f(x)=(1+x)^r$, $r\in\mathbf{R}$ (x^r no es desarrollable en 0):

$$\boxed{(1+x)^r=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n\ ,\ \ \text{con }\binom{r}{n}=\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\ ,\ \ \text{si } |x|<1}$$ (generaliza el binomio de Newton)

$\Big[$en particular se tiene: $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots$, $\ldots\Big]$

Como: $f'(x)=r(1+x)^{r-1}$, $f''(x)=r(r-1)(1+x)^{r-2},\ldots,$

$$f^{(n)}(x)=r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n},\ldots$$

la serie de Taylor es la de arriba, y se puede ver que $R_N\to 0$ si $0<x<1$ con la expresión de Lagrange (y con otras expresiones del resto que no hemos visto se ve que también lo hace si $-1<x<0$).

De las series de Taylor anteriores podemos deducir muchísimas otras, sin más que sustituir a veces y utilizando otras las operaciones conocidas con series de potencias (muchas veces no podremos dar la expresión del término general de la serie):

Ej. Para escribir el desarrollo de $\boxed{\operatorname{sen}(3x^2)}$ basta cambiar x por $(3x^2)$ en el de $\operatorname{sen}x$:

$$\operatorname{sen}3x^2 = 3x^2 - \tfrac{9}{2}x^6 + \cdots + (-1)^n \tfrac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{4n+2} + \cdots ,\ \forall x$$

Ej. Para el $\boxed{\operatorname{sen}(1+x)}$ no podemos hacer lo mismo. Aunque es cierto para todo x que:

$$\operatorname{sen}(1+x) = (1+x) - \tfrac{1}{6}(1+x)^3 + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(1+x)^{2n+1} + \cdots$$

esto no nos permite escribir la serie como potencias crecientes de x. Mejor que derivando:

$$\operatorname{sen}(1+x) = \operatorname{sen}1\cos x + \cos 1 \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}1 + \cos 1\, x - \tfrac{\operatorname{sen}1}{2}x^2 - \tfrac{\cos 1}{6}x^3 + \cdots$$

Ej. $\boxed{\cos\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \cdots$, si $x \geq 0$. $\big[$Esta serie representa la función $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ para $x \leq 0\big]$.

Ej. $\boxed{\arctan 2x\sqrt{1+x^2}} = \big[2x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{32}{5}x^5 + \cdots\big]\big[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots\big] = 2x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{289}{60}x^5 + \cdots$, $|x| < \frac{1}{2}$

pues si $|2x| < 1$ coinciden el arco tangente y su serie, y la raíz lo hace si $|x^2| < 1$.

[Con potencias impares sólo; para escribir el x^7 necesitarámos otro término de cada serie].

Ej. Para el desarrollo de $\boxed{\tan x}$ no conviene utilizar la definición pues las derivadas se complican:

$$f(x) = \tan x\,,\ f'(x) = 1 + \tan^2 x\,,\ f''(x) = 2\tan x + \tan^3 x\,, \ldots$$

Es mejor hacer el cociente de las dos series conocidas (tendrá sólo potencias impares):

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = c_1x + c_3x^3 + \cdots ;\ \big[c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \cdots\big]\big[1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots\big] = x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} + \cdots$$

$$\Rightarrow\ x^1:\ c_1 = 1\ ;\ \ x^3: c_3 - \tfrac{c_1}{2} = -\tfrac{1}{6} \to c_3 = \tfrac{1}{3}\ ;\ \ x^5: c_5 - \tfrac{c_3}{2} + \tfrac{c_1}{24} = \tfrac{1}{120} \to c_5 = \tfrac{2}{15}\ ;\ \ldots$$

$$\Rightarrow\ \tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Ej. En este ejemplo vamos a hacer nuestra primera ‘composición’ de series:

$$\begin{aligned}\boxed{\tfrac{1}{1+\operatorname{sen}x}} &= 1 - \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2x - \operatorname{sen}^3x + \operatorname{sen}^4x + \cdots\\ &= 1 - [x - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots] + [x - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots]^2 - [x - \cdots]^3 + [x - \cdots]^4 + \cdots\\ &= 1 - [x - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots] + [x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \cdots] - [x^3 - \cdots] + [x^4 - \cdots] + \cdots\\ &= 1 - x + x^2 - \tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \cdots\end{aligned}$$

[Hallar el cuadrado, cubo,... de una serie es más corto que multiplicarla varias veces por sí misma:

$$(a+b+c+\cdots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + \cdots$$

$$(a+b+c+\cdots)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abcd + \cdots ,\ \ldots].$$

Ej. Hallemos de varias formas 4 términos no nulos del desarrollo de $\boxed{e^{2x-x^2}}$:

$$e^{2x}e^{-2x^2} = \big[1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \cdots\big]\big[1 - 2x^2 + 2x^4 + \cdots\big] = 1 + 2x - \tfrac{8}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4 + \cdots$$

$$e^{2x-2x^2} = 1 + [2x - 2x^2] + \tfrac{1}{2}[2x - 2x^2]^2 + \tfrac{1}{6}[2x - 2x^2]^3 + \tfrac{1}{24}[2x - 2x^2]^4 + \cdots = 1 + 2x - \tfrac{8}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4 + \cdots$$

$$\frac{1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\cdots}{1+2x^2+2x^4+\cdots} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots\ \Rightarrow\ x^0: a_0 = 1\,;\ x^1: a_1 = 2\,;$$

$$x^2: a_2 + 2a_0 = 2\,,\ a_2 = 0\,;\ x^3: a_3 + 2a_1 = \tfrac{4}{3}\,,\ a_3 = \tfrac{4}{3} - 4 = -\tfrac{8}{3}\,;\ x^4: a_4 + 2a_2 + 2a_0 = \tfrac{2}{3}\,,\ a_4 = -\tfrac{4}{3}\,.$$

Lo que menos conviene es derivar muchas veces la función dada:

$$f'(x) = 2(1-2x)e^{2x-2x^2},\ f''(x) = 16(-x+x^2)e^{2x-2x^2},\ f'''(x) = 16(-1+6x^2-4x^3)e^{2x-2x^2},$$

$$f^{IV}(x) = 32(-1+8x-16x^3+8x^4)e^{2x-2x^2}\ \Rightarrow\ f(x) = 1 + 2x - \tfrac{16}{6}x^3 - \tfrac{32}{24}x^4 + \cdots.$$

De cualquier serie de Taylor se deduce, truncando la serie, la expresión del polinomio de Taylor (pero sin expresión manejable del resto, por lo que nos es poco útil) por el siguiente

Teorema:

$$\boxed{f(x) = P(x) + x^n g(x) \text{ con } g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow P(x) \text{ es el } P_n \text{ de Taylor de grado } n \text{ de } f\,.}$$

[es fácil comprobar que coinciden tanto f y P como sus n primeras derivadas en $x=0$]

Ej. El polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de $\arctan x$ es: $P_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, pues el resto de la serie es de la forma $x^{2n+1}g(x)$, con $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Las series de Taylor permiten muchas veces hallar valores aproximados con cotas fáciles del error (si aparece una serie de Leibniz; si no, deberemos acudir al resto de Lagrange).

Ej. Calculemos $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ con error menor que 10^{-2} . Para $|x| < 1$ sabemos que es:

$$(1+x)^{1/5} = 1 + \tfrac{1}{5}x + \tfrac{(1/5)(-4/5)}{2}x^2 + \tfrac{(1/5)(-4/5)(-9/5)}{6}x^3 + \cdots = 1 + \tfrac{x}{5} - \tfrac{2x^2}{25} + \tfrac{6x^3}{125} - \cdots$$

Por tanto: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{1/5} = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{50} + \frac{3}{500} - \cdots$, serie alternada y decreciente.

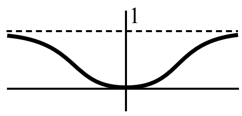
Así pues, es $\sqrt[5]{\frac{3}{2}} \approx \frac{27}{25} = 1.08$, con error $< \frac{3}{500} < 10^{-2}$.

No olvidemos que las series de Leibniz también nos dan cotas superiores e inferiores de la suma. En concreto aquí tenemos, por ejemplo, estas cotas racionales de la raíz: $\frac{27}{25} < \sqrt[5]{3/2} < \frac{543}{500}$.

$\Big[$Calcular $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{1/5}$ nos costaría bastante más esfuerzo, por salir serie no alternada$\Big]$.

Aunque $f\in C^\infty(\mathbf{R})$ y su serie de Taylor converja $\forall x$, la f puede no coincidir con la serie:

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}\,,\ \ f(0)=0}\,.$$



Veremos en 4.5 que para esta f es $f^{(n)}(0)=0\ \forall n$. Así su serie de Taylor es $\sum 0\cdot x^n = 0$, convergente $\forall x$, pero que, claramente, no coincide con f salvo en $x=0$.

[Se entiende lo que le pasa a esta suave función cuando se la mira en el campo complejo].

Def. f es **analítica** en $x=0$ si se puede escribir como una serie de potencias en todo un entorno $|x|<r$, $r>0$.

[Por ser igual a una serie de potencias debe, al menos, tener infinitas derivadas en $x=0$].

Sabemos que $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x , $\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^r$ son analíticas en $x=0$ (coinciden las tres primeras con una serie en todo $\mathbf{R}$ y las otras en $|x|<1$). También lo son sumas, productos o cocientes con denominador no nulo de cualquiera de ellas. E incluso funciones como:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,,\ g(0)=0\,,\ \text{ pues } g(x) = 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 + \cdots\ \ \forall x\,.$$

Son obviamente no analíticas las funciones discontinuas ($\log x$ en $x=0$, por ejemplo), o con sólo un número finito de derivadas (como $x^{8/3}$, que sólo tiene 2). La f de arriba es un ejemplo de función que no es analítica en 0 a pesar de ser de C^∞ en ese punto.

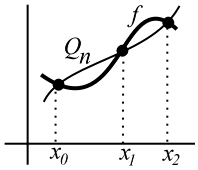
[Más en general, la **serie de Taylor** de una f en un punto a es $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; haciendo $x-a=s$, se traslada el problema a una serie de Taylor en torno a $s=0$.

Una f es **analítica** en $x=a$ si es igual a una serie de potencias en $|x-a|<r$; e^x lo es, por ejemplo, en cualquier a ; $\sqrt{x}$ lo es en $x=1$ (pero no en $x=0$)...].

Polinomios de interpolación.

El polinomio de Taylor P_n es sólo una forma de aproximar una f con polinomios. El P_n es el que más se parece a f cerca de un punto. Pero muchas veces interesa encontrar un polinomio Q_n que aproxime f en todo un intervalo. Una de las posibilidades de hacerlo es hallar un Q_n que tome los mismos valores que f en unos cuantos puntos del intervalo. A éste polinomio se llama **polinomio de interpolación**. Otra situación en que es útil el polinomio de interpolación es cuando sólo disponemos de algunos valores de la f (por ejemplo, esto sucederá si la f es resultado de unas cuantas medidas experimentales). Es decir:

Def. Dada una función $f(x)$ se llama polinomio de interpolación de grado n para los $n+1$ puntos distintos $x_0,...,x_n$ al polinomio Q_n que satisface
$$Q_n(x_0)=f(x_0)\,,\ \ldots,\ Q_n(x_n)=f(x_n)$$



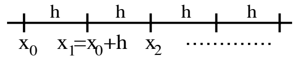
Un Q_n arbitrario tiene $n{+}1$ coeficientes $a_0,...,a_n$. Se podrían hallar con las $n{+}1$ ecuaciones lineales $Q_n(x_k)=f(x_k)$, $k=0...n$, pero hay varias formas mucho más cortas de calcularlo. Veamos primero la **fórmula de Newton**. Ponemos Q_n en la forma:

$$\boxed{Q_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+A_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\,.}$$

Sustituyendo ahora sucesivamente $x=x_0$, $x=x_1$, ..., $x=x_n$, obtenemos un sencillo sistema que permite ir calculando los A_k de forma sucesiva y, por tanto, el polinomio de interpolación:

$$A_0=f(x_0)\,,\ A_0+A_1(x_1-x_0)=f(x_1)\,,\ \ldots,\ A_0+A_1(x_n-x_0)+\cdots+A_n(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})=f(x_n)$$

En el caso particular (y muy común) de que los x_k son **equidistantes** (es decir, $x_{k+1}=x_k+h$), el sistema adopta la forma más simple:



$$A_0=f(x_0)\,,\ A_0+hA_1=f(x_1)\,,\ A_0+2hA_1+2!h^2A_2=f(x_2)\,,\ \ldots,$$
$$A_0+nhA_1+\cdots+\tfrac{n!}{(n-k)!}h^kA_k+\cdots+n!h^nA_n=f(x_n)\to$$

$$\boxed{\begin{gathered}A_0=f(x_0)\,,\ \ A_1=\tfrac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]\,,\ \ A_2=\tfrac{1}{2!h^2}[f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)]\,,\\ A_3=\tfrac{1}{3!h^3}[f(x_3)-3f(x_2)+3f(x_1)-f(x_0)]\,,\ \ldots\end{gathered}}$$

Otra expresión del Q_n la da la **fórmula de Lagrange**:

$$\boxed{\begin{gathered}Q_n(x)=f(x_0)\,\frac{\pi_0(x)}{\pi_0(x_0)}+\cdots+f(x_k)\,\frac{\pi_k(x)}{\pi_k(x_k)}+\cdots+f(x_n)\,\frac{\pi_n(x)}{\pi_n(x_n)}\,,\\ \text{donde}\ \ \pi_k(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)\,.\end{gathered}}$$

Pues el polinomio [de grado n] $\frac{\pi_k(x)}{\pi_k(x_k)}$ vale 1 si $x=x_k$ y vale 0 si $x=x_j$, con $j\neq k$.

[Parece más cómodo usar directamente esta fórmula y no resolver un sistema, pero si queremos añadir un nuevo punto hay que volver a calcular todos los π_k , lo que no sucedía con Newton].

Como en Taylor, aquí también se puede dar una estimación del **error** cometido al sustituir la f por su polinomio de interpolación Q_n . Admitimos sin demostración que si $f\in C^{n+1}[x_0,x_n]$ se tiene:

$$\boxed{f(x)-Q_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f^{(n+1)}(c)\ \text{ con }\ c\in(x_0,x_n)\,.}$$

Ej. Hallemos el Q_2 que toma los mismos valores que $\boxed{f(x)=\operatorname{sen}x}$ en 0, $\frac{\pi}{2}$ y π .

Sabemos que $f(x_0)=0$, $f(x_1)=1$, $f(x_2)=0$. Calculando los A_k [$h=\frac{\pi}{2}$] tenemos:

$$A_0=0\,,\ A_1=\tfrac{2}{\pi}[1-0]\,,\ A_2=\tfrac{2}{\pi^2}[0-2+0]\to Q_2(x)=0+\tfrac{2}{\pi}(x-0)-\tfrac{4}{\pi^2}(x-0)(x-\tfrac{\pi}{2})=\tfrac{4}{\pi^2}x(\pi-x)\,.$$

A lo mismo llegamos con: $Q_2(x)=0\frac{(x-\pi/2)(x-\pi)}{(0-\pi/2)(0-\pi)}+1\frac{(x-0)(x-\pi)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi)}+0\frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(\pi-0)(\pi-\pi/2)}$.

Utilicemos este Q_2 para aproximar $\operatorname{sen}1$ y $\operatorname{sen}2$: $Q_2(1)\approx 0.86795$, $Q_2(2)\approx 0.92534$.

Los errores cometidos están acotados por

$$|E(1)|\leq\tfrac{1}{24}|1-0||1-\pi/2||1-\pi|\approx 0.05\,,\quad |E(2)|\leq\tfrac{1}{24}|2-0||2-\pi/2||2-\pi|\approx 0.04\,.$$

[Aproximaciones peores que las del P_7 de Taylor. Mejores en 2 que las que da el de orden 5 pero siguen siendo peores en 1, más cercano a 0: $P_5(2)\approx 0.9333$, $\operatorname{sen}2\approx 0.9093$; $P_5(1)\approx 0.8417$, $\operatorname{sen}1\approx 0.8415$].

4.5. Cálculo de límites indeterminados

O sea, del tipo $\boxed{\infty-\infty\,,\ 0\cdot\infty\,,\ \frac{0}{0}\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,,\ 1^\infty\,,\ 0^0\,,\ \infty^0}$ (los otros ya sabemos hace tiempo).

Utilizando **desarrollos de Taylor** (en principio, **para** x **tendiendo hacia** a **finito**):

Introducimos una notación para abreviar: sea $g(x)\neq 0$ para $x\neq a$ en un entorno de a.

Def. $\boxed{\text{Diremos que } f(x)=o\big(g(x)\big) \text{ cuando } x\to a \text{ si } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0\,.}$ Se lee simplemente: f es 'o pequeña' de g.

Con esta notación podemos expresar los desarrollos de Taylor escribiendo sólo aquello que se va a utilizar para calcular límites (la función es el polinomio mas 'algo despreciable'):

$$\boxed{\text{Si } f \text{ es de } C^{n+1} \text{ en un entorno de } a \text{ entonces } f(x)=P_{n,a}(x)+o\left([x-a]^n\right)\,.}$$

(Pues entonces $|f^{(n+1)}(c)|\leq K$ para $c\in[a,x]$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}\right|\leq\frac{K|x-a|}{(n+1)!}\to 0$, si $x\to a$).

Ej. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=1$,
pues $o(x)$ es precisamente algo que dividido por x tiende a 0 si $x\to 0$.

Ej. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]}{x^3}=\frac{1}{6}$. No basta $P_1(x)$ $\left[\text{no se sabe hacia que tiende } \frac{o(x)}{x^3}\right]$.

[Es habitual (pero un poco impreciso) escribir puntos suspensivos en lugar de la "o"; si lo hacemos, no olvidemos que los puntos representan las potencias de x estrictamente mayores que las escritas; no escribir ni siquiera los puntos lleva a errores, como sustituir simplemente en este límite $\operatorname{sen}x$ por x (infinitésimo equivalente que dicen algunos) lo que nos daría:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0 \ \textbf{!!!}].$$

Ej. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)]}{x-[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=-2$.

Sin conocer el desarrollo de $\tan x$ (nosotros lo hallamos como cociente) podríamos utilizar otros:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}\,\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x-x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=-2\,.$$

Ej. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x-\sqrt{1+x^2}}{\operatorname{sh}x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)]}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{1+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{1}{6}$.

Hemos desarrollado hasta que ha quedado un término que no se anulaba en el numerador.
También hemos agrupado en $o(x^4)$ todos los términos que no influyen en el valor del límite.

Las indeterminaciones anteriores eran $0/0$. Muchas de otro tipo se pueden llevar a ella:

Ej. (1^∞) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\log(1+x)/x}=e$, ya que $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x}=1$.

Ej. $(\infty$-$\infty)$ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+\arctan x}{\log(1+2x)}-\frac{\cos 2x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+x+o(x)}{2x-2x^2+o(x^2)}-\frac{1-2x^2+o(x^2)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x^2+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)}=\frac{3}{2}$.

Hemos agrupado en $o(x^2)$ los términos que no influyen y utilizado propiedades de la "o" de prueba trivial (y muy intuitivas, si pensamos que $o(x^n)$ son potencias de x mayores que n):

$$x^m=o(x^n) \text{ si } m>n \ \ ,\ \ f(x)=o(x^m)\ \Rightarrow\ f(x)=o(x^n) \text{ si } m>n\,,$$
$$x^m o(x^n)=o(x^{m+n}) \ \ ,\ \ o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})$$

Discutamos el uso de la **regla de L'Hôpital** (presentada en 3.2) y comparemos con Taylor:

Si $f(x), g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ $\big($ó $\underset{x\to a}{\to} \pm\infty\big)$ y existe el $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
La regla sigue siendo válida cambiando el a del enunciado por a^+, a^-, $+\infty$ ó $-\infty$.

[Taylor muestra porqué aparecen cocientes de derivadas en L'Hôpital, en el caso de que f y g admitan desarrollo y tiendan a 0 cuando $x\to a$ (en ese caso debe ser $f(a)=g(a)=0$):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots}{g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2+\cdots} = \frac{f'(a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)+\cdots}{g'(a)+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)+\cdots} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{f'(a)}{g'(a)}, \text{ si } g'(a)\neq 0\Big].$$

No dice L'Hôpital que si $\frac{f'}{g'}$ no tiene límite (finito o infinito), tampoco lo tenga $\frac{f}{g}$:

Ej. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{2x+\cos x}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2-\operatorname{sen} x}$ no tiene límite, pero es claro que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2+\frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{2}$.

Muchas veces hay que iterar L'Hôpital. Es **importante simplificar** lo más posible en cada paso:

Ej. $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{(1-\cos x)\cos^2 x} \overset{0/0}{=} -\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = -2$ (ya calculado por Taylor).

[Sin simplificar hubiéramos tenido que seguir con L'Hôpital pues la indeterminación seguía; pero no nos lancemos a derivar sin comprobar que continúa el $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, pues podríamos hacer burradas:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = !!! = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{-2\cos x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}\ \Big].$$

Para calcular un límite indeterminado, **si conocemos los desarrollos** de las funciones que aparecen en la expresión, **suele ser preferible acudir a Taylor**.

Ej. Los límites de la página anterior se complican por L'Hôpital. Así para el $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+x\arctan x - \cos 2x \log(1+2x)}{x\log(1+2x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2+\arctan x + \frac{x}{1+x^2} + 2\operatorname{sen} 2x \log(1+2x) - \frac{2\cos 2x}{1+2x}}{\log(1+2x) + \frac{2x}{1+2x}} = \frac{0}{0}$$

y hay que volver a usar l'Hôpital para deshacer la indeterminación y llegar al resultado. Más pasos habría que dar todavía en el ejemplo del ch y sh: Taylor muestra que deberíamos derivar 4 veces (salvo que exista alguna simplificación intermedia) para llegar a un límite no indenterminado.

L'Hôpital **se puede aplicar en situaciones en que Taylor no es posible** (si $x\to\pm\infty$, si no conocemos los polinomios o no existen,...). Por ejemplo, calculando unos **límites importantes**:

$$\text{Si } a>0,\, b>0:\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0\,,\ \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0\,,\ \lim_{x\to 0^+} [x^a \log x] = 0\,.$$

En los dos primeros (ya probados al final de 3.2), para x gordo ni $\log x$, ni e^{ax} se parecen a ningún polinomio con lo que sólo se puede usar L'Hôpital (como hicimos).

Para el tercero $\big(0\cdot[-\infty]\big)$ $\log x$ no admite desarrollo de Taylor en 0. Así que también L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-a}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{-a} = 0\,.$$

Ej. $(0\cdot\infty)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} [x\log(e^x-1)] = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log(e^x-1)}{1/x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x/(e^x-1)}{-1/x^2} = -1\cdot\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{e^x-1} \overset{0/0}{=} -\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x}{e^x} = 0$.

[Insistimos en la necesidad de simplificar después de cada paso].

El primer paso exigía L'Hôpital, pero en el segundo sí hubiera valido Taylor: $\frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2}{x+o(x)} \underset{x\to 0}{\to} 0$.

Ej. (∞^0) $\lim\limits_{x\to\infty} [\log x]^{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\log(\log x)}{x}} = 1$, pues $\frac{\log(\log x)}{x} \overset{\text{L'H}}{\longrightarrow} \frac{1/x}{\log x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ [este era $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$].

Como dijimos en 2.2, para calcular límites, a veces es conviene **cambios de variable** .
Ya citamos los cambios de este tipo:

Teorema: $[t=g(x)]$ $\boxed{g \text{ continua en } a,\ g(x)\neq g(a) \text{ si } x\neq a \text{ y } \lim\limits_{t\to g(a)} f(t)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(g(x))=L}$

Ej. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\log x}{\operatorname{sen}^2(x-1)} \overset{t=x-1}{=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\log(1+t)}{\operatorname{sen}^2 t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2/2+\cdots}{t^2+\cdots} = \dfrac{1}{2}$.

Por L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{2\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)} = \dfrac{1}{2}$ (ahorrando una derivación).

Ej. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-\sqrt{1+2x^3}}{x^6}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$. Taylor: $\dfrac{1+x^3+\frac{1}{2}x^6+\cdots-[1+x^3-\frac{1}{2}x^6+\cdots]}{x^6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Por L'Hôpital no es demasiado largo si simplificamos:

$$\frac{3x^2e^{x^3}-3x^2[1+2x^3]^{-1/2}}{6x^5} = \frac{e^{x^3}-[1+2x^3]^{-1/2}}{2x^3} \to \frac{3x^2e^{x^3}+3x^2[1+2x^3]^{-3/2}}{6x^2} = \frac{e^{x^3}+[1+2x^3]^{-3/2}}{2} \to 1 .$$

[Como siempre, Taylor muestra el 'esqueleto' del límite, sabemos que, sin hacer simplificaciones intermedias, es necesario derivar 6 veces para que el denominador deje de tender a 0].

Aunque todo es más corto (L'Hôpital, desde luego) si hacemos el cambio $t=x^3$:

$$\frac{e^t-\sqrt{1+2t}}{t^2} \overset{\text{L'H}}{\longrightarrow} \frac{e^t-[1+2t]^{-1/2}}{2t} \overset{\text{L'H}}{\longrightarrow} \frac{e^t+[1+2t]^{-3/2}}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 .$$

Otros que se utilizan muchas veces (si aparecen expresiones que dependen de $\frac{1}{x}$) son:

Teorema: $[t=\frac{1}{x}]$ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(\tfrac{1}{x}) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)\,,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(\tfrac{1}{x}) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)\,.\ \ [\text{Análogos con } 0^- \text{ y } -\infty].}$

[Basta escribir las definiciones de los límites para comprobarlo].

Ej. Con este teorema: $(\infty\cdot 0)$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t^2} = 1\cdot\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t} = \infty$.

Ahora que conocemos los desarrollos de Taylor, la forma rápida (luego hay que formalizar) de hallar un límite de este tipo es la siguiente: como cuando $x\to\infty$ es $\frac{1}{x}$ una cosa pequeña y sabemos que $\operatorname{sen}\bullet = \bullet - \frac{1}{6}\bullet^3+\cdots$ si $\bullet$ es pequeño, está claro que será $\operatorname{sen}\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$ y que nuestra función se parecerá en el infinito a x con lo que tenderá a ∞ .

[De hecho, no sería incorrecto escribir: $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+\cdots$ cuando $x\to\infty$].

Ej. Más complicado: $(\infty\cdot 0)$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-e^{-3/x^2}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1-e^{-3t^2}}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{3t^2+o(t^2)}{t^2} = 3$.

[Como antes, $e^{\bullet}\sim 1+\bullet$, con lo que se tendría: $x^2\left(1-1+\frac{3}{x^2}+\cdots\right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 3$].

Ej. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\arctan\frac{1}{x}-\sqrt{1+x}\right]$ es una indeterminación $\infty\cdot 0-\infty$. Antes de formalizarlo vamos a conjeturar cuál va a ser el límite. Como $\arctan\bullet\sim\bullet$, será del tipo $x-\sqrt{x}$ y valdrá infinito.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\left[x\arctan\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right] = \infty$ $\left(\infty[1-0]\right)$, pues $\lim\limits_{x\to\infty} x\arctan\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\arctan t}{t} = 1$.
↑ Taylor o L'H

[Sale más largo haciendo $t=1/x$ incialmente].

Ej. (0^0) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\log x} = 1$; (∞^0) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\log x/x} = 1$.

(Vimos ya con L'H que el exponente tiende a 0 en ambos casos).

O jugando con el segundo cambio:

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\right)^t = 1$, pues $\lim\limits_{t\to 0^+} t^t = 1$ (el segundo se reduce al primero).

Más ejercicios de límites en los que se mezclan algunos triviales, otros que utilizan resultados de 2.2 del tipo "$\frac{7}{\infty}=0$" y otros cuantos indeterminados en los que utilizar Taylor o L'Hôpital:

Ej. Hallemos, cuando existan, diferentes límites para la función $f(x)=\frac{\log(1+x)-x}{\operatorname{sen}x-x}$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\left(\tfrac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\pm\infty \text{ si } x\to 0^{\pm}.$$

$$\left[\text{o L'Hôpital: } \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\cos x-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-1/[1+x]^2}{-\operatorname{sen}x}=\pm\infty \text{ si } x\to 0^{\pm}\right].$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\left(\tfrac{-\infty}{-\infty},\ x \text{ manda}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\log(1+x)}{x}-1}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}-1}=\tfrac{0+1}{0+1}=1,\ \text{pues } \frac{\log(1+x)}{x}\to 0 \ \ \text{(casi conocido; o L'Hôpital).}$$

[No se podía aplicar Taylor (lejos de $x=0$), ni directamente L'H: $\lim_{x\to\infty}\frac{1/[1+x]-1}{\cos x-1}$ no existe].

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ $\left(\text{“}\frac{-\infty+1}{-\operatorname{sen}1+1}\text{”}\ \text{y } 1-\operatorname{sen}1>0\right)$, límite fácil que sabíamos calcular hace tiempo.

$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{\log 2-1}{\operatorname{sen}1-1}$ (porque la función es ahí continua), el más fácil de todos.

Ej. Hallemos el límite cuando x tiende a 0, 1 e ∞ de $f(x)=\frac{e^x\arctan x-x(1+3x)^{1/3}}{x^3}$.

Para 0, primero escribimos los desarrollos de Taylor de las funciones del numerador:

$$e^x\arctan x=\left[1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3+\cdots\right]\left[x-\tfrac{1}{3}x^3+\cdots\right]=x+x^2+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)x^3+\cdots\ \left(\text{si } |x|<1\right).$$

$$(1+x)^{1/3}=1+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{(1/3)(-2/3)}{2}x^2+\cdots\Rightarrow (1+3x)^{1/3}=1+x-x^2+\cdots\ \left(\text{si } |x|<\tfrac{1}{2}\right).$$

$$\text{Por tanto: } f(x)=\frac{x+x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots-x-x^2+x^3+\cdots}{x^3}=\frac{\frac{7}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}\xrightarrow[x\to 0]{}\tfrac{7}{6}.$$ (Una vez más, por L'H es mucho más largo).

El límite de 1 es trivial: $f(x)\xrightarrow[x\to 1]{}\frac{1}{4}e\pi-\sqrt[3]{4}$.

Cuando $x\to\infty$, $\frac{(1+3x)^{1/3}}{x^2}\to 0$, $\arctan x\to\frac{\pi}{2}$ y $\frac{e^x}{x^3}\to\infty$. Por tanto, $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$.

Ej. Hallemos el límite cuando x tiende a 0 e ∞ y $-\infty$ de $f(x)=\frac{e^x-\cos x}{\log(1+x^4)}$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ (acotado/infinito).

En 0, indeterminación $\frac{0}{0}$. Con Taylor: $f(x)=\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots-1+\frac{1}{2}x^2+\cdots}{x^4+\cdots}=\frac{x+\cdots}{x^4+\cdots}\xrightarrow[x\to 0^{\pm}]{}\pm\infty$.

$$\text{Por L'Hôpital: } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\log(1+x^4)}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{4x^3/(1+x^4)}\overset{1/\pm 0}{=}\pm\infty \text{ según } x\to 0^+ \text{ o } x\to 0^-.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-\cos x}{\log(1+x^4)}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\log(1+x^4)}-0\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{4x^3/(1+x^4)}=\infty\ \left(\text{“}\tfrac{\infty}{+0}\text{”}\right).$$

L'Hôpital pues ni $e^x\sim 1+x$, ni $\log(1+x^4)\sim x^4$ si x gordo. Sin apartar primero el $\cos x$ se tardaría casi lo mismo. Era esperable que la e^x 'pudiese' con el logaritmo, pero lo hemos calculado porque exactamente no estaba escrito eso entre los límites importantes.

Ej. También los límites cuando x tiende a 0 e ∞ y $-\infty$ de la función $f(x)=\frac{\operatorname{sen}^3 x}{1-e^{-x^3}}$.

$$\text{Para } 0\text{, Taylor o L'Hôpital: } \lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{1-(1-x^3+o(x^3))}=1,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x}{3e^{-x^3}}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}=1.$$

Como el numerador está acotado y el denominador tiende a ∞, está claro que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$.

Intuitivamente, parece que no va a tener límite cuando $x\to\infty$, pues para x grande se parece a $\operatorname{sen}^3 x$ que no lo tiene. Para formalizarlo utilizamos sucesiones:

$a_n=n\pi$ y $b_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ tienden a ∞, pero $f(a_n)\to 0$, mientras que $f(b_n)\to 1$.

En los siguientes calculamos el valor del límite según los valores de la constante real a:

Ej. Discutamos el límite cuando x tiende a 0 e infinito de la función $f(x)=\frac{e^{-x^2}-\cos ax}{x^4}$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{[\frac{a^2}{2}-1]x^2+[\frac{1}{2}-\frac{a^4}{24}]x^4+o(x^4)}{x^4}=\begin{cases}-\infty \text{ si } |a|<\sqrt{2}\\ 1/3 \text{ si } |a|=\sqrt{2}\\ \infty \text{ si } |a|>\sqrt{2}\end{cases}$$

[Por L'Hôpital sería más largo, habría que discutir varias veces si el límite es o no de la forma $0/0$ y sería mucho más fácil equivocarnos en algún paso].

El límite en ∞ es 0 $\forall a$, pues el numerador está acotado y el denominador tiende a ∞.

Ej. Aquí discutimos los límites cuando $x\to 0^+$ y cuando $x\to\infty$ de $f(x)=x^{-a}\big[\sqrt{1+9x^4}-1\big]$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+9x^4}-1}{x^a}=\frac{\frac{9}{2}x^4+\cdots}{x^a}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\begin{cases}0, \text{ si } a<4\\ 9/2, \text{ si } a=4\\ \infty, \text{ si } a>4\end{cases}.$$

El de infinito lo sabíamos hacer desde el capítulo 2: $f(x)=\frac{x^2\sqrt{9+x^{-4}}-1}{x^a}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}0, \text{ si } a>2\\ 3, \text{ si } a=2\\ \infty, \text{ si } a<2\end{cases}$.

Ej. Hallemos para todo $a>0$ los límites cuando x tiende a ∞ y 0^+ de $f(x)=x^a\big[1-\cos\frac{1}{x}\big]$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{t^a}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2/2+o(t^2)}{t^a}=\begin{cases}0 \text{ si } 0<a<2\\ 1/2 \text{ si } a=2\\ \infty \text{ si } a>2\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\ \forall a$ ($0\times$ acotado). $\big[$Cuando $x<0$, x^a no está definido$\big]$.

Con todo lo aprendido sobre Taylor y los límites indeterminados podemos abordar diferentes problemas de secciones anteriores para los que nos faltaban argumentos. Por ejemplo, aparecieron límites indeterminados en la definición de **derivada**. Aunque los teoremas de derivación permiten calcular casi todas, quedaban aún algunas que no sabíamos hacer. Pero ahora ya se puede con Taylor y L'Hôpital:

Ej. Estudiemos si son derivables en $x=0$ las siguientes funciones:

$\boxed{n(x)=\arctan\frac{1}{x^2}}$, $n(0)=\frac{\pi}{2}$. Usando un teorema de 3.2 vimos que $n'(0)=0$. Directamente:

$$n'(0)=\lim_{h\to 0^\pm}\frac{\arctan(\frac{1}{h^2})-\frac{\pi}{2}}{h}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\arctan(t^2)-\frac{\pi}{2}}{1/t}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2t/[1+t^4]}{-1/t^2}=0\,.$$

$\boxed{l(x)=\frac{\log(1+x)}{x}}$, $l(0)=1$. Como $l(x)=\frac{x+o(x)}{x}\underset{x\to 0}{\to}1$, la función l es al menos continua en $x=0$.

Aunque no va a ser lo más rápido, acudamos a la definición para ver si existe $l'(0)$:

$$l'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)/h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2/2+o(h^2)}{h^2}=-\frac{1}{2}\,.$$

¿Existirá también $l''(0)$? Siguiendo con la definición, necesitamos antes tener $l'(x)$ para $x\neq 0$:

$$l'(x)=\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{(1+x)x^2}\to l''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2h+(1+h)h^2-2(1+h)\log(1+h)}{2(1+h)h^3}=\cdots=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4}{3}h^3+o(h^3)}{2h^3+2h^4}=\frac{2}{3}\,.$$

Pero las cosas son mucho más fáciles gracias a Taylor. Nuestra l es exactamente:

$$l(x)=\frac{x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots \text{ para todo } |x|<1\,.$$

Como está definida por una serie de potencias (o sea, es analítica) es C^∞ y sabemos que:

$$l(0)=1\,,\quad l'(0)=-\frac{1}{2}\,,\quad \frac{l''(0)}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow l''(0)=\frac{2}{3}\,,\ \ldots$$

También serán muy útiles los temas de este capítulo en el dibujo de **gráficas**:

Ej. $\boxed{f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}}$, $f(0)=0$. Comprobemos primero, como dijimos en 4.4, que $f^{(n)}(0)=0\ \forall n$.

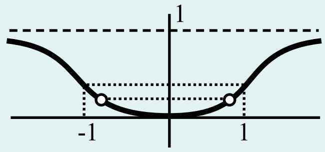
Para $x\neq 0$ es: $f'(x)=\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2}$, $f''(x)=[\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}]\mathrm{e}^{-1/x^2}$, $f'''(x)=[\frac{8}{x^9}-\frac{36}{x^7}+\frac{24}{x^5}]\mathrm{e}^{-1/x^2}$, ...

Entonces: $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-1/h^2}}{h}=\lim\limits_{t\to\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}=0$, $f''(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{-1/h^2}}{h^4}=\lim\limits_{t\to\infty}2t^4\mathrm{e}^{-t^2}=0$, ...

$\big[$pues e^{t^2} es mucho mayor que e^t $\big(\mathrm{e}^t/\mathrm{e}^{t^2}=\mathrm{e}^{t-t^2}\underset{t\to\infty}{\to}\mathrm{e}^{-\infty}=0\big)$ y sabemos que $t^n\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to\infty}{\to}0\big]$.

Para cualquier n , tras hacer $h=\frac{1}{t}$, acabaremos en: $f^{(n)}(0)=\lim\limits_{t\to\infty}(\text{polinomio})\cdot\mathrm{e}^{-t^2}=0$.

Para hacer el dibujo observamos que:



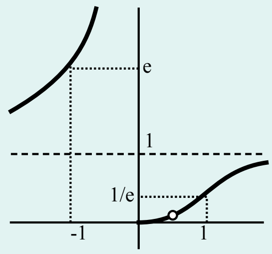
f es par y es $f(x)\geq 0$. $f(x)\to\mathrm{e}^0=1$ si $x\to\pm\infty$.

f crece para $x>0$ y decrece si $x<0$. $f(1)=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.37$.

Inflexión en $i_\pm=\pm\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\approx 0.82$. $f(i_\pm)=\mathrm{e}^{-3/2}\approx 0.22$.

[Sin calculadora podríamos hallar aproximadamente los valores de arriba con los desarrollos de Taylor: $\left(1-\frac{1}{3}\right)^{1/2}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{72}-\cdots$. La serie es no alternada, pero con sólo esos 3 términos sale ya ≈ 0.82 .
Nos costaría más hallar $\mathrm{e}^{-3/2}=1-\frac{3}{2}+\frac{9}{8}-\frac{9}{16}+\frac{27}{128}-\cdots$ (más lejos de 0) que $\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\cdots$,
pero en ambos casos podríamos dar cotas de los errores, por tratarse de series alternadas].

Ej. $\boxed{e(x)=\mathrm{e}^{-1/x}}$ $\begin{array}{l}\to\infty \text{ si } x\to 0^-\\ \to 0 \text{ si } x\to 0^+\end{array}$. A diferencia de la anterior esta no es ni siquiera continua en 0 .



Para $x\neq 0$ es ahora: $e'(x)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}$, $e''(x)=\frac{1}{x^4}[1-2x]\mathrm{e}^{-1/x}$.

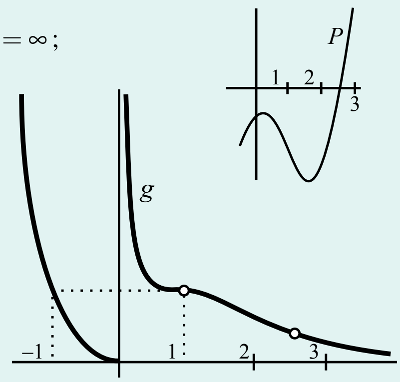
$e'(x)\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}\infty$ ("$\infty\cdot\infty$") y $e'(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$ (como en el ejemplo anterior).

e no es simétrica. También es $e(x)\geq 0$ y $e(x)\to 1$ si $x\to\pm\infty$.

La e crece en $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ y la inflexión se da en $x=\frac{1}{2}$.

$e(-1)=\mathrm{e}\approx 2.72$. $e(1)=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.37$. $e\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{-2}\approx 0.14$.

Ej. $\boxed{g(x)=x^2\mathrm{e}^{1/x}\mathrm{e}^{-x}}$. $g(x)\geq 0\ \forall x$. Asíntotas:



si $x\to 0^-$, $g\to 0\cdot 0\cdot 1=0$; si $x\to-\infty$, $g\to\infty\cdot 1\cdot\infty=\infty$;

si $x\to 0^+$, $g\to 0\cdot\infty\cdot 1$ indeterminado:

$$\lim_{x\to 0^+}g=1\cdot\lim_{t\to\infty}t^{-2}\mathrm{e}^t=\infty\ ;$$

si $x\to\infty$, $g\to\infty\cdot 1\cdot 0$ indeterminado:

$$\lim_{x\to\infty}g=1\cdot\lim_{x\to\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}=0\ .$$

$g'(x)=-[x-1]^2\mathrm{e}^{1/x}\mathrm{e}^{-x}$ siempre decreciente

($x=1$ punto de inflexión con tangente horizontal);

$g'(x)\to 0$ si $x\to 0^-$; $g'(x)\to-\infty$ si $x\to 0^+$.

$g''(x)=\frac{1}{x^2}[x-1][x^3-3x^2+x-1]\mathrm{e}^{1/x}\mathrm{e}^{-x}$.

Analizamos el número de raíces de $P(x)=x^3-3x^2+x-1$: $\begin{array}{ll}+-+- & \text{(3 ó 1 positivas)}\\ ---- & \text{(sin raíces negativas)}\end{array}$

$P'(x)=3x^2-6x+1=0$ si $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $P\big(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\big)=-2+\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<0$

$\Rightarrow$ sólo 1 cero real de P [en $(2,3)$] $\Rightarrow$ 2 puntos de inflexión de g .

Los únicos valores sencillos: $g(-1)=g(1)=1$, $g'(-1)=-4$.

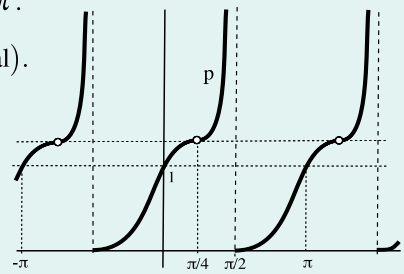
Ej. $\boxed{p(x)=\cos^2 x\, e^{\tan x}}$, π-periódica. Continua si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$p'(x)=[1-\operatorname{sen}2x]\,e^{\tan x}\geq 0$ $\big(\frac{\pi}{4}+k\pi$ inflexión horizontal$\big)$.

$p\underset{x\to\pi/2^+}{\longrightarrow}0\cdot 0=0$, $p'\underset{x\to\pi/2^+}{\longrightarrow}1\cdot 0=0$, $p\underset{x\to\pi/2^-}{\longrightarrow}0\cdot\infty$:

L'Hôpital: $\dfrac{e^{\tan x}}{1+\tan^2 x}\underset{\infty/\infty}{\longrightarrow}\dfrac{e^{\tan x}}{2\tan x}\underset{\infty/\infty}{\longrightarrow}\dfrac{e^{\tan x}}{2}\underset{x\to\pi/2^-}{\longrightarrow}\infty$.

$\Big[$o bien, $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\dfrac{e^{\tan x}}{1+\tan^2 x}\overset{t=\tan x}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^t}{1+t^2}=\infty\Big]$.



Ej. $\boxed{l(x)=6\log|x|+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}$. Dominio $=\mathbf{R}-\{0\}$.

Cuando $x\to\pm\infty$, $l(x)\to\infty$ y se parece a $6\log|x|$.

$l(x)=\dfrac{6x^3\log|x|+x+3}{x^3}\underset{x\to 0^\pm}{\longrightarrow}\pm\infty$ $\big($pues $x^3\log|x|\to 0\big)$.

$l'(x)=\frac{1}{x^4}\big[6x^3-2x-9\big]\equiv\frac{1}{x^4}P(x)$. P sin raíces enteras.

$P'=0\to x=\pm\frac{1}{3}$. $P\big(-\frac{1}{3}\big)<0$, $P(1)=-5$, $P(2)=35$

$\Rightarrow$ único 0 de l' en $(1,2)$ [antes <0 y después >0].

$l''(x)=\frac{6[6+x-x^3]}{x^5}=-\frac{6}{x^5}[x-2][x^2+2x+3]=0\Leftrightarrow x=2$.

$l(-1)=-2$, $l(1)=4$, $l(-2)\approx 4.03$, $l(2)\approx 4.78$.

Ej. $\boxed{h(x)=x\log\big(1+\frac{4}{x^2}\big)}$. Impar. $\lim\limits_{x\to 0}h=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log[1+4/x^2]}{1/x}=$ (L'H) $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{x^2+4}=0$.

$\lim\limits_{x\to\infty}h=$ (L'H) $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x}{x^2+4}=0$ [o bien $(x=1/t)$ $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\log[1+4t^2]}{t}=\lim\limits_{t\to\infty}\big[4t+\frac{o(t^2)}{t}\big]=0$;

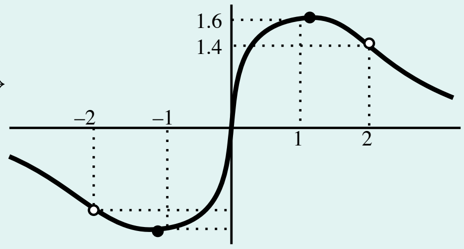
$\big[$o (informal) $h\underset{\text{x gordo}}{\sim}x\frac{4}{x^2}=\frac{4}{x^2}$, pues $\log(1+\bullet)\sim\bullet$ si $\bullet$ chico$\big]$.

$h'(x)=\log\big(1+\frac{4}{x^2}\big)-\frac{8}{x^2+4}$; $h'(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\infty$.

$h'(1)=\log 5-\frac{8}{5}\approx 0.01$, $h'(2)=\log 5-1\approx -0.3\to$ hay un único máximo (en un x algo mayor que 1)

$h''(x)=\dfrac{8[x^2-4]}{x[x^2+4]^2}$ $\quad h$ es $\cup$ en $(-2,0)\cup(2,\infty)$; $\quad h$ es $\cap$ en $(-\infty,2)\cup(0,2)$

$h(1)=\log 5\approx 1.61$, $h(2)=2\log 2\approx 1.4$.



Ej. $\boxed{k(x)=\frac{\operatorname{sh}x}{x^{1/3}}}$. Par. $k\to\infty$ si $x\to\infty$.

$k(x)=x^{2/3}+o(x^{2/3})\Rightarrow$ continua en $x=0$ si $k(0)=0$.

$\big($y no derivable; o directamente $k'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\operatorname{sh}h}{h^{4/3}}=\infty\big)$.

$k(\pm 1)=\frac{1}{2}[e-e^{-1}]\approx 1.2$, $k(\pm 2)=2^{-4/3}[e^2-e^{-2}]\approx 2.9$.

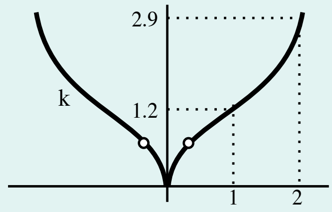
$k'(x)=x^{-1/3}\operatorname{ch}x-\frac{1}{3}x^{-4/3}\operatorname{sh}x=0\Leftrightarrow\operatorname{th}x=3x$ (nunca).

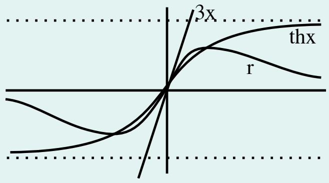
$k''(x)=\frac{[9x^2+4]\operatorname{sh}x}{9x^{7/3}}-\frac{2\operatorname{ch}x}{3x^{4/3}}=0\Leftrightarrow\operatorname{th}x=\frac{6x}{9x^2+4}\equiv r(x)$

Vemos si se cortan las gráficas de r y th [impares]:

$r'(0)=\frac{3}{2}$, $r(\frac{1}{3})=0.4$, $r(\frac{2}{3})=0.5$ (máximo de r), $r\underset{x\to\infty}{\to}0$,

$\operatorname{th}'0=1$, $\operatorname{th}\frac{1}{3}\approx 0.32$, $\operatorname{th}\frac{2}{3}\approx 0.58$, $\operatorname{th}\underset{x\to\infty}{\to}1\Rightarrow$ hay un punto de inflexión para un $x\in\big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\big)$.





Por último, con las técnicas para resolver indeterminaciones de esta sección ya sabemos calcular muchos más límites de **sucesiones** (y deducir convergencias de **series**). Recordamos que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \text{toda sucesión } \{a_n\}\subset \mathrm{dom} f-\{a\} \text{ con } \{a_n\}\to a \text{ satisface que } f(a_n)\to L\,.$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \text{toda sucesión } \{a_n\}\subset \mathrm{dom} f \text{ con } \{a_n\}\to \infty \text{ satisface que } f(a_n)\to L\,.$$

$\big[$Los teoremas también valían si L era $+$ ó $-\infty$; en particular, $f(x)\underset{x\to\infty}{\to} L \Rightarrow f(n)\underset{n\to\infty}{\to} L\big]$.

Ej. Si $a>0$, $\frac{\log n}{n^a}\to 0$ porque $\frac{\log x}{x^a}\underset{x\to\infty}{\to} 0$, como vimos usando L'Hôpital (adelantado al final de 2.1).

[No es nada elegante aplicar L'Hôpital o Taylor directamente a una sucesión, pues estrictamente hablando una sucesión es una función que sólo toma valores sobre los enteros y claramente no tiene sentido hablar de su derivada; se debe, pues, cambiar la variable n por x para indicar que lo que se deriva es la $f(x)$ que da lugar a la sucesión para los $n\in\mathbf{N}$; el problema es que si uno lo hace 'mal' puede llegar bien al resultado (pero que no olvide que deriva la $f(x)$)].

Ej. $\sqrt[n]{n}\to 1$, pues $\{n\}\to\infty$ y $x^{1/x}\to 1$ cuando $x\to\infty$ (por la misma razón $\sqrt[7n+3]{7n+3}\to 1$).

Ej. $(1+a_n)^{1/a_n}\to \mathrm{e}$ si $\{a_n\}\to 0$, pues vimos que $(1+x)^{1/x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\mathrm{e}$ (límite también admitido en 2.1).

Ej. En los ejemplos del capítulo 2 no sabíamos que b^n ($b>1$), e^{an} ($a>0$) crecen más que n^c.
[Lo probamos a partir de una serie y también es consecuencia de otro límite de funciones calculado].

$$3\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{2n}+7n^5=\mathrm{e}^{2n}\big[\mathrm{e}^{-n}-1+7\tfrac{n^5}{\mathrm{e}^{2n}}\big]\to-\infty \quad (\text{“}-1\cdot\infty\text{”})$$
$$\frac{(n+3)^2\arctan n}{\sqrt{n^4+n\,\mathrm{sen}\,n}-n^9\mathrm{e}^{-n}}=\frac{(1+\frac{3}{n})^2\arctan n}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{sen}\,n}{n^3}}-\frac{n^7}{\mathrm{e}^n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1\cdot(\pi/2)}{\sqrt{1+0}-0}=\frac{\pi}{2}$$
pues sabemos que $\frac{n^c}{\mathrm{e}^{an}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Ej. $a_n=\frac{\log(\mathrm{e}^{2n}+n)}{n}$. $\frac{\log(\mathrm{e}^{2x}+x)}{x}\overset{\infty/\infty}{\longrightarrow}\frac{(2\mathrm{e}^{2x}+1)/(\mathrm{e}^{2x}+x)}{1}=\frac{2+\mathrm{e}^{-2x}}{1+x\mathrm{e}^{-2x}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}2 \Rightarrow a_n\to 2$.

O con más ingenio: $a_n=\frac{\log(\mathrm{e}^{2n}[1+n\mathrm{e}^{-2n}])}{n}=2+\frac{\log(1+n\mathrm{e}^{-2n})}{n}\to 2$, pues $n\mathrm{e}^{-2n}\to 0$.

[No es siempre cierto que $\log(\text{algo})$ sea menor que una potencia de n].

Ej. $n^2\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{n^2}\to 1$ $\left[\begin{array}{l}\text{pues } \{n^2\}\to\infty \text{ y es } \lim\limits_{x\to\infty} x\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{sh}\,t}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t+o(t)}{t}=1\\ \text{o más corto, porque } \{\frac{1}{n^2}\}\to 0 \text{ y, cuando } x\to 0,\ \frac{\mathrm{sh}\,x}{x}\to 1\end{array}\right]$.

Ej. $n^4-n^6\arctan\frac{1}{n^2}\to\frac{1}{3}$, pues se puede poner como $f(\frac{1}{n^2})$ con $f(x)=\frac{x-\arctan x}{x^3}=\frac{x^3/3+\cdots}{x^3}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{3}$.

$\big[$Más informalmente: $\arctan\bullet\sim\bullet-\frac{1}{3}\bullet^3 \Rightarrow n^4-n^6\arctan\frac{1}{n^2}\sim n^4-n^4+\frac{1}{3}\to\frac{1}{3}\big]$.

Ej. $\sum\arctan\frac{1}{n}$ diverge, pues $\arctan\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ $\Big($es decir, $\frac{\arctan(1/n)}{1/n}\to 1$, pues $\frac{\arctan x}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ y $\frac{1}{n}\to 0\Big)$.

Ej. $\sum\log\big(1+\frac{1}{n^2}\big)$ converge, pues $\log\big(1+\frac{1}{n^2}\big)\sim\frac{1}{n^2}$ $\Big($ya que $\frac{\log(1+x)}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$ y $\frac{1}{n^2}\to 0\Big)$.
$[\log(1+\bullet)=\bullet-\cdots]$

Ej. $\sum(-1)^n n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge por Leibniz, porque es **alternada**, $f(n)=n^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ **tiende a** 0

$\big[$pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\big[x=t^2\big]=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^4}{\mathrm{e}^t}=0$, o por L'Hôpital (más largo sin el cambio):

$x^2/\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\to 4x^{3/2}/\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\to 12x/\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\to 24x^{1/2}/\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\to 24/\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\to 0\big]$.

y es **decreciente** a partir de un n $\big[$ya que $f'(x)=\frac{x}{2}(4-\sqrt{x})\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}<0$ si $x>16\big]$.

4.6. Series complejas de potencias

Comenzamos hablando brevemente de las **funciones de variable compleja**. Una f de variable compleja será una regla que asigna a cada complejo z de un dominio un único complejo $f(z)$.

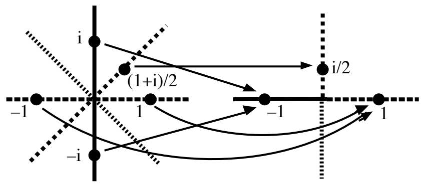
Como los reales son un tipo particular de números complejos podríamos hablar también de funciones reales de variable compleja, si $f(z)$ es real para cada z, o de funciones complejas de variable real (incluso las funciones reales de variable real se pueden mirar como un tipo particular de funciones complejas).

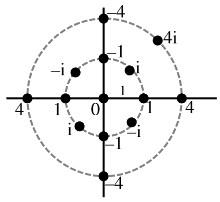
Ej. $f(z)=z^2$, $f(z)=\bar{z}$, $f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=xy+\mathrm{i}x$ son funciones complejas de variable compleja.
Una función compleja de variable real es, por ejemplo, $f(x)=\operatorname{sen}x+\mathrm{i}\,\operatorname{th}x$, si $x\in\mathbf{R}$.
Funciones (importantes) reales de variable compleja son:
$f(z)=|z|$ (función 'módulo'),
$\operatorname{Arg}(z)=\theta$, con θ argumento principal de z (función 'argumento'),
$\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Re}(x+\mathrm{i}y)=x$, $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(x+\mathrm{i}y)=y$ (funciones 'parte real' y 'parte imaginaria').

Cualquier función de valores complejos puede escribirse en la forma $f=u+\mathrm{i}v$, donde u y v (parte real y parte imaginaria de f) son funciones con valores reales. Por ejemplo, así podemos expresar:

$$f(z)=z^2=(x^2-y^2)+\mathrm{i}\,(2xy)\ ,\ f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$$

Para pintar estas funciones podríamos dibujar flechas entre dos planos complejos, o bien escribir el valor de $f(z)$ sobre cada z de un plano complejo. Las dos cosas están hechas abajo para $f(z)=z^2$:



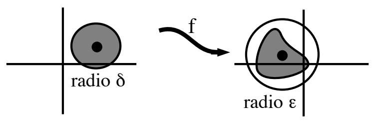


Límite y continuidad se definen como en $\mathbf{R}$ sustituyendo valores absolutos por módulos:

Def. $(\varepsilon,\delta\in\mathbf{R};\ z,a,L\in\mathbf{C})$

$\lim_{z\to a} f(z)=L$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si z cumple $0<|z-a|<\delta \Rightarrow |f(z)-L|<\varepsilon$.
f es continua en a si $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0$ tal que si z cumple $|z-a|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(a)|<\varepsilon$.

[Si un entorno es $B(a,r)=\{z\in\mathbf{C}:|z-a|<r\}$, que f es continua en a significa que podemos dar un entorno de a de radio δ lo suficientemente pequeño de forma que su imagen este contenida en un entorno de $f(a)$ de radio ε, por pequeño que sea ε].



Teorema: f y g continuas en $a\in\mathbf{C} \Rightarrow f\pm g$, $f\cdot g$ y f/g (si $g(a)\neq 0$) son continuas en a.
Si $f=u+\mathrm{i}v$ (u, v reales), entonces f continua en $a \Leftrightarrow u$ y v continuas en a.

Las demostraciones del $\pm$, $\cdot$ y $/$ son iguales que las reales, ya que seguimos teniendo la desigualdad triangular; para la otra: $|f(z)-f(a)|=|[u(z)-u(a)]+\mathrm{i}[v(z)-v(a)]|$ es pequeño si y sólo si lo son $|u(z)-u(a)|$ y $|v(z)-v(a)|$.

Def. $f(z)$ es derivable en $a\in\mathbf{C}$ si existe el $\lim_{z\to 0}\dfrac{f(a+z)-f(a)}{z}=f'(a)$.

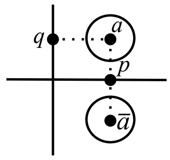
[Igual que la de $\mathbf{R}$; también como allí se demuestra que 'derivable $\Rightarrow$ continua' y que:

$$(f\pm g)'=f'\pm g'\,,\ (f\cdot g)'=f'g+fg'\,,\ (1/g)'=-g'/g^2\,,\ (f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$$

Con esto es fácil derivar polinomios y funciones racionales (más adelante también derivaremos $\operatorname{sen}z$, $\cos z$ y e^z, pero por ahora ni siquiera sabemos lo que son estas funciones complejas)].

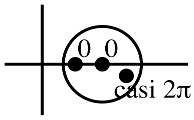
Ej. Es fácil ver que $f(z)=\text{cte}$ y $f(z)=z$ son continuas y derivables en cualquier a con lo que también lo serán cualquier polinomio o cociente de polinomios donde el denominador no se anula.

Ej. $\text{Re}(z)=x$ e $\text{Im}(z)=y$ son continuas $\forall a$ por el teorema y porque $f(z)=z$ lo es.
[O directamente: si $a=p+\text{i}q$
$$|x-p|,|y-q| < \sqrt{[x-p]^2+[y-q]^2} = |z-a| < \varepsilon \text{ si } |z-a|<\delta=\varepsilon \,].$$



Ej. $f(z)=\bar{z}$ es continua $\forall a\in\mathbf{C}$: $|\bar{z}-\bar{a}| = |\overline{z-a}| = |z-a|<\varepsilon$ si $|z-a|<\delta=\varepsilon$
[o por el teorema y el ejemplo anterior: $u(z)=x$, $v(z)=-y$ lo son].

[Como se verá en los libros de cálculo en varias variables, una función de dos variables que sea composición de funciones continuas será continua; así será fácil asegurar que lo es, por ejemplo, $f(x+\text{i}y) = y\arctan(xy)+\text{i}x\cos(x+y)$]



Hay funciones discontinuas muy sencillas como $\text{Arg}(z)$ en cualquier a real positivo. En cualquier entorno de a hay puntos z en que $\text{Arg}(z)$ es casi 2π y por tanto $|\text{Arg}(z)-\text{Arg}(a)| = |\text{Arg}(z)-0|$ no se puede hacer tan pequeño como queramos [en los demás a la función sí es continua; si el argumento principal lo hubiésemos escogido en $(-\pi,\pi]$ conseguiríamos que la función $\text{Arg}(z)$ fuese continua en el semieje real positivo, pero la discontinuidad se trasladaría al negativo].

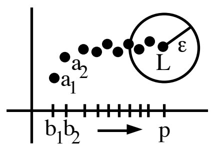
Ej. Funciones de pinta inofensiva son no derivables como $f(z)=\bar{z}$, pues $\nexists \lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim\limits_{x+\text{i}y\to 0}\frac{x-\text{i}y}{x+\text{i}y}$:
$\frac{x-\text{i}y}{x+\text{i}y}$ cuando $y=0$ vale 1 y cuando $x=0$ vale -1 ; el límite no puede existir pues el cociente toma valores 1 y -1 para z tan cercanos como queramos a 0 .

[Sabiendo algo de derivadas parciales: se prueba en análisis complejo que para que una $f=u+\text{i}v$ sea derivable es necesario que se cumpla: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann). Para $f(z)=x-\text{i}y$ no se satisfacen, pues $u_x=1\neq v_y=-1$. De hecho, la mayoría de las funciones definidas en la forma $f=u+\text{i}v$ serán no derivables, pues es mucha casualidad que u y v cualesquiera satisfagan dichas ecuaciones. Comprobemos que sí se cumplen para una función derivable como $f(z)=z^2$ (de derivada $f'(z)=2z$): $u_x=2x=v_y$, $u_y=-2y=-v_x$].

Consideremos ahora las **sucesiones** $\{a_n\}\subset\mathbf{C}$ de complejos, o sea, funciones de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{C}$:

Def. $\{a_n\}\to L$ si para todo $\varepsilon>0$ existe N natural tal que si $n\geq N$ entonces $|a_n-L|<\varepsilon$ [$|\cdot|$ módulo]

Para cualquier entorno de L casi todos los puntos de $\{a_n\}$ están dentro:



Teorema: Sea $a_n=b_n+\text{i}c_n$, con b_n y c_n reales y $L=p+\text{i}q$. Entonces $\{a_n\}\to L \Leftrightarrow \{b_n\}\to p$ y $\{c_n\}\to q$.

$\Rightarrow$) $\forall\varepsilon\,\exists N$ tal que si $n\geq N \Rightarrow |a_n-L| = |(b_n-p)+\text{i}(c_n-q)|<\varepsilon \Leftrightarrow (b_n-p)^2+(c_n-q)^2<\varepsilon^2$
$$\Rightarrow \begin{cases} (b_n-p)^2<\varepsilon^2 \Rightarrow |b_n-p|<\varepsilon \\ (c_n-q)^2<\varepsilon^2 \Rightarrow |c_n-q|<\varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftarrow)\ \forall\varepsilon \begin{cases} \exists N_1, n\geq N_1 \Rightarrow |b_n-p|<\frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2, n\geq N_2 \Rightarrow |c_n-q|<\frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |a_n-L| \leq |b_n-p|+|c_n-q| < \varepsilon \text{ si } n\geq \text{máx}\{N_1,N_2\}$$

Como en $\mathbf{R}$, una **serie** de complejos $\sum a_n$ se dice convergente si lo es su sucesión S_n de sumas parciales. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es:

Teorema: $a_n=b_n+\text{i}c_n$: $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ y $\sum c_n$ convergen y es $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n + \text{i}\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$

$\sum a_n$ es **absolutamente convergente** si lo hace la serie real $\sum |a_n|$, a la que se le pueden aplicar los criterios de convergencia de series reales conocidos. Se tiene también que:

Teorema: $\boxed{\sum a_n \text{ absolutamente convergente } \Rightarrow \sum a_n \text{ convergente}}$

Si $a_n = b_n + \mathrm{i}\,c_n$, $|a_n|^2 = |b_n|^2 + |c_n|^2 \Rightarrow |b_n|, |c_n| \le |a_n|$. Por tanto:

$\sum |a_n|$ convergente $\Rightarrow \sum |b_n|$ y $\sum |c_n|$ convergente $\Rightarrow \sum b_n$ y $\sum c_n$ convergentes

También se tienen aquí los criterios de cociente y de la raíz (iguales que los de $\mathbf{R}$) y son reales las sucesiones $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ y $\sqrt[n]{|a_n|}$ cuyo límite hay que calcular para aplicarlos.

Ej. $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n} + \mathrm{i}\,(2+\frac{1}{n})^n$ diverge, pues $b_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n} \to 0$, pero $c_n = (2+\frac{1}{n})^n \to \infty$.

Ej. $a_n = (\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2})^n$; $|a_n| = 2^{-n/2} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$ [esto es intuitivamente claro y fácil de formalizar].

Ej. $\sum (\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2})^n$ converge pues $\sum |a_n| = \sum (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$ es serie geométrica convergente

[como en $\mathbf{R}$ se ve que: $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow a_n \to 0$; otra prueba de que la última $\{a_n\}$ converge].

Ej. $\sum \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ no converge absolutamente (pues $\sum \frac{1}{n}$ es divergente), pero sí converge:

$$\sum \frac{\mathrm{i}^n}{n} = \mathrm{i} - \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{3} + \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{i}}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots) + \mathrm{i}\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots)$$

puesto que son convergentes las dos últimas series por Leibniz.

Ej. $\sum \frac{(7+\mathrm{i})^n}{n^3}$ diverge, porque $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|7+\mathrm{i}|^{n+1}}{|7+\mathrm{i}|^n}\frac{n^3}{(n+1)^3} = 5\sqrt{2}\,\frac{n^3}{(n+1)^3} \to 5\sqrt{2} > 1$, o bien, porque

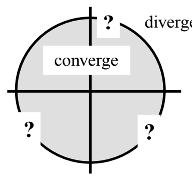
$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{5\sqrt{2}}{n^{3/n}} \to 5\sqrt{2} > 1$ $\big($que $\sum |a_n|$ diverja, en principio no prueba nada$\big)$.

Veamos ya las **series de potencias** complejas $\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots}$, $a_n, z \in \mathbf{C}$.

Se tienen resultados como los de $\mathbf{R}$ con demostraciones (que no hacemos) iguales que allí:

Teorema:

A cada serie de potencias está asociado un número positivo R, llamado **radio de convergencia** de la serie, que tiene las siguientes propiedades: si $R = 0$, la serie sólo converge si $z = 0$; si $R = \infty$, la serie converge para todo z; si R es un número real positivo, la serie converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| > R$.



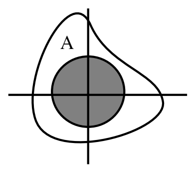
Aquí el intervalo de convergencia se ha convertido en el círculo de convergencia $|z| < R$. Sobre la circunferencia $|z| = R$ no se puede asegurar nada. Como en $\mathbf{R}$ habrá series que convergen en toda ella, otras en puntos aislados, otras en ninguno... El R se podrá calcular casi siempre mediante el cociente o la raíz.

Estas series se pueden sumar, multiplicar, dividir,... igual que las reales y se tiene el mismo resultado sobre derivación:

Teorema:

$\boxed{\text{Sea } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ para } |z| < R \Rightarrow f \text{ es derivable para } |z| < R \text{ y } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.}$

Y, por tanto, las funciones definidas por series de potencias vuelven a ser infinitamente derivables (y también continuas, desde luego) dentro del círculo de convergencia. Un resultado importante y sorprendente, que desde luego no es cierto en los reales, y que se prueba con técnicas más avanzadas de cálculo complejo es:



Teorema: Una función $f(z)$ derivable en una región A del plano es infinitamente derivable en A. Además, en todo círculo contenido en A la función $f(z)$ coincide con su serie de Taylor.

Definimos tres nuevas funciones complejas, que hasta ahora no tenían sentido:

Def. $\boxed{\mathrm{e}^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ ,\ \ \operatorname{sen} z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \ \cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\ ,\ \forall z\in\mathbf{C}}$

El R de las tres series es ∞. Tienen propiedades (fáciles de probar) que son como las de los reales:

$$(\operatorname{sen} z)'=\cos z\ ,\ (\cos z)'=-\operatorname{sen} z\ ,\ \operatorname{sen}(-z)=-\operatorname{sen} z\ ,\ \cos(-z)=\cos z\ ,$$
$$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z\ ,\ \mathrm{e}^{-z}=1/\mathrm{e}^z\ ,\ \mathrm{e}^{z+w}=\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w\ ,\ \dots$$

Y otras nuevas:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=1+\mathrm{i}z-\tfrac{z^2}{2!}-\tfrac{\mathrm{i}z^3}{3!}+\tfrac{z^4}{4!}+\tfrac{\mathrm{i}z^5}{5!}-\cdots=\big(1-\tfrac{z^2}{2!}+\cdots\big)+\mathrm{i}\big(z-\tfrac{z^3}{3!}+\cdots\big)=\cos z+\mathrm{i}\operatorname{sen} z$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}=\cos z-\mathrm{i}\operatorname{sen} z\ ,\ \ \operatorname{sen} z=\tfrac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}]\ ,\ \ \cos z=\tfrac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}]$$

[Si $z=y$ real deducimos la prometida relación que abreviaba la forma polar: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\operatorname{sen} y$].

No es necesario sumar series para calcular exponenciales: $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\operatorname{sen} y)$.

[Ni senos: $\operatorname{sen}(\pi+\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\mathrm{i})}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi+\mathrm{i})}]=-\frac{\mathrm{i}}{2}[\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}-\mathrm{e}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}]=\frac{\mathrm{i}}{2}[\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{1}]\ (=\operatorname{sen}\mathrm{i}\,)$].

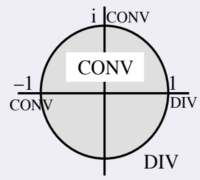
Las funciones complejas $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ no son acotadas. En el eje imaginario, por ejemplo:

$$\operatorname{sen}(\mathrm{i}y)=\tfrac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}]=\mathrm{i}\operatorname{sh} y\ ,\ \cos(\mathrm{i}y)=\tfrac{1}{2}[\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^{y}]=\operatorname{ch} y$$

[resultado clásico es que las únicas funciones acotadas y analíticas en todo $\mathbf{C}$ son las constantes].

Lo visto de series complejas explica situaciones sorprendentes de las funciones reales. ¿Por qué si tanto e^x como $1/(1+x^2)$ son $C^\infty(\mathbf{R})$, la serie de la primera converge $\forall x$ y la de la otra sólo lo hace si $|x|<1$? Pues porque la serie $1-z^2+z^4-\cdots$ de $1/(1+x^2)$ ha de definir una función continua y en $z=\pm\mathrm{i}$ esta no lo es [esto sucede para todo cociente de polinomios complejos (reales, en particular): el radio R de su serie es la distancia al cero más próximo del denominador (en $|z|<R$ es derivable y, por tanto, analítica)]. También entendemos el extraño comportamiento de $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$ que tiene infinitas derivadas pero sólo coincide con su serie de Taylor en $x=0$: como $f(\mathrm{i}y)=\mathrm{e}^{1/y^2}\underset{y\to 0}{\to}\infty$, no es siquiera continua en $z=0$.

Ej. Estudiemos donde converge: $\sum\frac{z^n}{\sqrt{n}}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\to 1=R$.



Converge en el círculo $|z|<1$ y diverge en $|z|>1$. ¿Qué pasa en $|z|=1$? No converge absolutamente en esa circunferencia, pero podría converger en algunos z de ella. Por ejemplo:

si $z=-1$, la serie $\sum\frac{[-1]^n}{\sqrt{n}}$ converge por Leibniz; si $z=1$, $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge;

si $z=\mathrm{i}$, converge, pues $\sum\frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{n}}=\sum\frac{[-1]^n}{\sqrt{2n}}+\mathrm{i}\sum\frac{[-1]^n}{\sqrt{2n+1}}$ y convergen ambas (Leibniz).

Ej. Desarrollemos en serie $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$.

Que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ converge $\Leftrightarrow|z|<1$ y que su suma es $\frac{1}{1-z}$ se prueba como en $\mathbf{R}$. Así pues:

$$f(z)=\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{1-[-z^2/4]}=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^nz^{2n}}{4^{n+1}}\ ,\ |\tfrac{-z^2}{4}|<1\Leftrightarrow|z|<2 \text{ (distancia de los ceros al origen).}$$

[la serie no converge en ningún punto de la circunferencia $|z|=2$ pues para cualquier z con ese módulo queda una serie cuyo término general no tiende a 0 pues tiene módulo constante $\frac{1}{4}$].

Podemos desarrollarla también (dando rodeos) de otras formas.

Descomponiendo en fracciones simples complejas:

$$\tfrac{1}{z^2+4}=\tfrac{1}{4\mathrm{i}}\big[\tfrac{1}{z-2\mathrm{i}}-\tfrac{1}{z+2\mathrm{i}}\big]=\tfrac{1}{8}\big[\tfrac{1}{1-z/2\mathrm{i}}+\tfrac{1}{1+z/2\mathrm{i}}\big]=\tfrac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\big[\tfrac{z^n}{(2\mathrm{i})^n}+\tfrac{(-z)^n}{(2\mathrm{i})^n}\big]=\tfrac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{2z^{2n}}{2^{2n}\mathrm{i}^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^nz^{2n}}{4^{n+1}}$$

Dividiendo (las manipulaciones con series complejas, como dijimos, como las de las reales):

$$[4+z^2][a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots]=1\to 4a_0=1, a_0=14\ ;\ 4a_1=0, a_1=0\ ;\ 4a_2+a_0=0, a_2=-\tfrac{1}{16}\ ;\dots$$