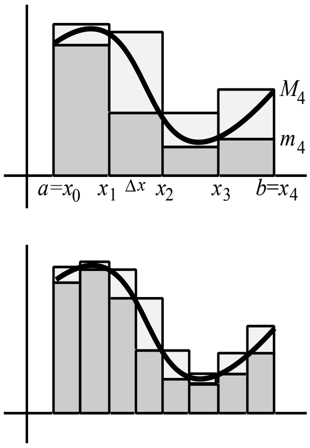
5. Integración en R

5.1. Definición y propiedades

Sea f acotada en $[a,b]$. Dividimos $[a,b]$ en n subintervalos de la misma longitud Δx por medio de los $n+1$ puntos:

$a=x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ con $x_{k+1}-x_k = \frac{b-a}{n} \equiv \Delta x$.

Para cada n llamamos **suma inferior** L_n **y superior** U_n a:

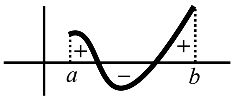


$$\boxed{L_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x\,,\ U_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x\,,\ \text{con}\ \begin{array}{l} m_k = \inf\{f(x) : x\in[x_{k-1},x_k]\} \\ M_k = \sup\{f(x) : x\in[x_{k-1},x_k]\} \end{array}}$$

Def. Si ambas sucesiones $\{L_n\}$ y $\{U_n\}$ convergen hacia un mismo límite, decimos que f es **integrable** en $[a,b]$, representamos ese límite común por $\int_a^b f$ ó $\int_a^b f(x)dx$ y le llamamos **integral** de f en $[a,b]$.

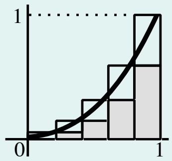
[Esta no es la definición de 'integral de Riemann' habitual (ver Spivak), pero es mucho más corta].

El significado geométrico es claro: **si** $f\geq 0$ **, la integral (≥ 0) representa el área** A **de la región limitada por la gráfica de** f **, el eje** x **y las rectas** $x=a$ **y** $x=b$: A es para todo n mayor que la suma L_n de las áreas de los rectángulos pequeños y menor que la suma U_n de los grandes; al crecer n, ambas sumas tienden hacia A. Si $f\leq 0$, L_n y U_n son negativas. La integral (≤ 0) en valor absoluto es el área de la región (situada bajo el eje x) limitada por el eje x, la gráfica de f y las rectas $x=a$ y $x=b$. Si f es positiva y negativa, la integral $\int_a^b f$ será la **diferencia entre las áreas de las regiones que queden por encima y las áreas de las que queden por debajo del eje** x:



Con los teoremas que probaremos, **para saber si** f **es integrable y calcular la integral no se necesitará usar la definición casi nunca**. Por ahora, sólo con lo visto, unos ejemplos:

Ej. $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$.
$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{(k-1)^2}{n^2}\tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^3}\big[0^2+\cdots+(n-1)^2\big]$$
$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k^2}{n^2}\tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^3}\big[1^2+\cdots+n^2\big]$$

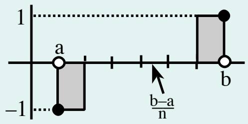


Usando el resultado que vimos en un problema de sucesiones:

$1^2+\cdots+n^2 = \frac{n[n+1][2n+1]}{6}$; $L_n = \frac{[n-1]n[2n-1]}{6n^3}$, $U_n = \frac{n[n+1][2n+1]}{6n^3}$; $L_n, U_n \to \frac{1}{3} = \int_0^1 f$.

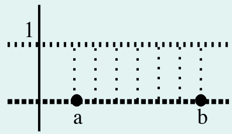
Ej. $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x=a \\ 0 & \text{si } a<x<b \\ 1 & \text{si } x=b \end{cases}$. $L_n = -\frac{b-a}{n}$, $U_n = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \int_a^b g = 0$.

g es discontinua, pero integrable. Seguiría siendo $\int_a^b g = 0$ si cambiamos el valor 0 por cualquier otro en un número finito de puntos de (a,b).



Veremos pronto que funciones acotadas con un número finito de discontinuidades son siempre integrables, así que las funciones no integrables tienen que ser tan patológicas como la siguiente.

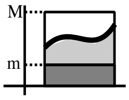
Ej. $h(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q} \\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q} \end{cases}$, $x\in[a,b]$. En cada $[x_{k-1},x_k]$ hay puntos de $\mathbf{Q}$ y de $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ $\Rightarrow L_n = \sum_{k=1}^{n} 0\frac{b-a}{n} = 0$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} 1\frac{b-a}{n} = b-a\ \forall n \Rightarrow h$ no integrable.



Las siguientes propiedades son intuitivamente claras a la vista del significado geométrico de la integral y se demuestran mecánicamente usando de las definiciones (las dos primeras se resumen diciendo que ‘la integral es lineal’, como la derivada):

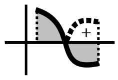
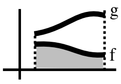
Teorema:

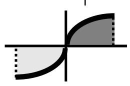
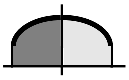
Sean f y g integrables en $[a,b]$. Entonces:



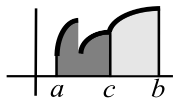
$\int_a^b cf = c\int_a^b f$, $c\in\mathbf{R}$; $\int_a^b[f+g] = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Si $m\leq f\leq M$ en $[a,b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.  Si $f\leq g$ en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$. 

 Si f es impar $\int_{-a}^a f = 0$.  Si f es par $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

La siguiente sigue siendo intuitiva, pero es pesada de demostrar con nuestra definición. [Para f continua será trivial usando los teoremas de 5.2, pero la propiedad es cierta también para f integrable y discontinua].



Teorema:

Si $a<c<b$; f integrable en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
Definiendo $\int_a^a f=0$ e $\int_a^b f=-\int_b^a f$, la igualdad es válida para a,b,c cualesquiera.

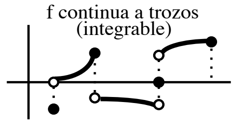
Los dos siguientes teoremas dicen que las f (acotadas) no integrables son extrañas:

Teorema: f continua en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$.

Idea de la demostración. Se prueba que $\{L_n\}$ y $\{U_n\}$ siempre convergen (sus límites se llaman integral inferior y superior de f) y así f es integrable si $U_n-L_n\to 0$. Como f es uniformemente continua, la diferencia entre dos valores cualesquiera de f en dos $x,y\in[a,b]$ es tan pequeña como queramos para x e y suficientemente próximos; en particular, lo es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de f en $[x_{k-1},x_k]$, si el intervalo es muy pequeño. Así, si n es suficientemente grande tenemos que para cada k :

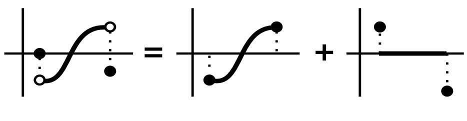
$$M_k-m_k<\tfrac{\varepsilon}{b-a}\ \forall\varepsilon \Rightarrow U_n-L_n=\sum_{k=1}^n(M_k-m_k)\Delta x<\varepsilon \text{ para } n \text{ grande} \Rightarrow U_n-L_n\to 0 .$$

Ya vimos que funciones discontinuas podían ser integrables. Una f se dice **continua a trozos** en $[a,b]$ si es continua salvo en un número finito de puntos y en ellos posee límites laterales.



[No lo son las funciones $\frac{1}{x}$ o $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ en $[0,1]$, definámoslas como las definamos en $x=0$].

Teorema: f continua a trozos en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$.



[dividimos en subintervalos de modo que f sólo tenga discontinuidades en los extremos; en cada intervalo es fácil ver que es integrable por ser suma de una función continua y de otra integrable como la g del ejemplo].

Como es 0 el valor de la integral de una función como g se ve que **cambiando el valor de una f integrable en un número finito de puntos, la nueva función h continúa siendo integrable y el valor de la integral es el mismo**, pues $h=f+g$ con una g de esas y la integral es lineal.

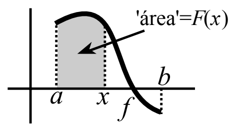
[Hay funciones integrables con infinitas discontinuidades; por ejemplo, una f creciente y acotada es integrable (pues $M_{k-1}=m_k$, $k=1,...,n \Rightarrow U_n-L_n=\frac{f(b)-f(a)}{n}$), aunque tenga infinitos saltos].

5.2. Teoremas fundamentales

Estos **teoremas fundamentales del cálculo infinitesimal** relacionan las derivadas y las integrales y nos permitirán hallar muchísimas integrales prescindiendo de la definición.

Sea f acotada e integrable en $[a,b]$; para cada $x\in[a,b]$ la $\int_a^x f$ existe (y es un número).

Podemos, pues, definir una nueva función: $\boxed{F(x)=\int_a^x f\,,\ x\in[a,b]}$



Primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal:

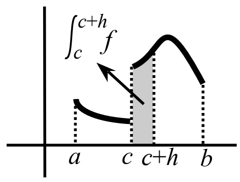
> f integrable en $[a,b]$ $\Rightarrow$ F continua en $[a,b]$.
> Si además f es continua en un $c\in(a,b)$ entonces F es derivable en c y $F'(c)=f(c)$.

(Y por tanto, si f es continua en todo $[a,b]$ entonces $F'(x)=f(x)\ \ \forall x\in[a,b]$).

Como f es acotada en $[a,b]$, existen supremo e ínfimo de f en cada intervalo $\subset[a,b]$.

Sea $c\in(a,b)$ y sea $h>0$. Llamemos:

$M_h=\sup\{f(x):x\in[c,c+h]\}$, $m_h=\text{ínf}\{f(x):x\in[c,c+h]\}$.



Entonces: $m_h h\leq\int_c^{c+h}f=\int_a^{c+h}f-\int_a^c f=F(c+h)-F(c)\leq M_h h$

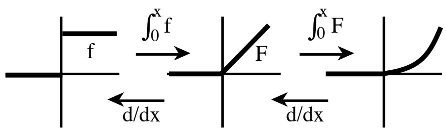
$$\Rightarrow\ [F(c+h)-F(c)]\to 0\,,\ \text{si}\ h\to 0^+\,.$$

Así pues, F es continua en c (cambiando detalles se vería para $h\to 0^-$).

Sea ahora f continua en c. Si $h>0$ se deduce que: $m_h\leq\frac{F(c+h)-F(c)}{h}\leq M_h$

(y a la misma igualdad se llegaría, de forma análoga, para $h<0$).

Como f continua en c, $M_h,m_h\to f(c)$ si $h\to 0$, y por tanto $\frac{F(c+h)-F(c)}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}f(c)$.



[El teorema nos dice que, al contrario que al derivarla, la F obtenida integrando f es 'más suave' que ella. Si f es discontinua en c, F es continua en c (aunque F tenga un 'pico' en c); y si f tiene picos, desaparecen al integrarla. En general, $f\in C^n\ \Rightarrow\ F\in C^{n+1}$].

Ej. $f(x)=\mathrm{e}^{\text{sen}\,(\text{ch}\,x)}$ continua $\forall x\ \Rightarrow\ F(x)=\int_0^x f$, $G(x)=\int_7^x f$, ... tienen por derivada $f(x)\ \forall x$.

[$F'(x)=f(x)$ también para $x<a$ (si f continua en x), pues si $c<x$ con f integrable en $[c,a]$:

$$F(x)=\int_a^x f=\int_c^x f-\int_c^a f\ ].$$

Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal:

$$\boxed{f\ \text{es continua en}\ [a,b]\ \text{y}\ f=g'\ \text{para alguna función}\ g\ \Rightarrow\ \int_a^b f=g(b)-g(a)\equiv g\Big]_a^b}$$

Como $F'=f=g'\ \Rightarrow\ F(x)=g(x)+k$ para algún número k. Como $0=F(a)=g(a)+k$
$\Rightarrow\ k=-g(a)\ \Rightarrow\ F(x)=g(x)-g(a)$. En particular: $F(b)=\int_a^b f=g(b)-g(a)$.

Def. Dada una función f, una g cuya derivada sea f se llama **primitiva** de f.

El segundo teorema dice que **para calcular la integral de una f continua basta hallar una primitiva de f** (y no es necesario utilizar las sumas superiores e inferiores). Si g es primitiva de f, es claro que **cualquier otra primitiva de f es de la forma $g+K$**.

Def. $\boxed{\text{El **conjunto de todas las primitivas** se designa por } \int f(x)\,dx\,.}$

(Son **funciones** y no un número como $\int_a^b f$; a veces se llama **integral definida** de f entre a y b a esta última, e **integral indefinida** al conjunto de primitivas).

En algunos casos, hallar la primitiva de una f es inmediato y, por tanto, lo es calcular algunas integrales. Por ejemplo, es ahora ya trivial calcular la primera integral vista en 5.1:

Ej. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$ pues $\frac{x^3}{3}$ es una primitiva de x^2 ya que $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2$;
(todas las primitivas de x^2 son $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + K$; si para el cálculo de esta integral tomásemos otro valor de la $K \neq 0$, llegaríamos, desde luego, al mismo resultado).

De hecho, **cada derivada conocida nos proporciona una fórmula de integración**:

Ej. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$, $\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$, $\int \frac{dx}{[4-x]^2} = \frac{1}{4-x}$, $\int \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \log|x^2-1|$, ...

(más exacto sería escribir $\tan x + K$, $\operatorname{ch} x + K$, ... ; nosotros no lo haremos pero tengámoslo en cuenta).

A menudo al integrando le faltarán constantes que se calculan derivando de cabeza o tanteando (como con la x^2 de arriba: derivando x^3 se tiene $3x^2$, luego falta $\frac{1}{3}$ en la primitiva):

Ej. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(3x)$, $\int x^{-5/3} dx = -\frac{3}{2}x^{-2/3}$, $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{4[1+(x/2)^2]} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$, ...

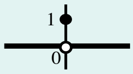
Pero en muchísimas ocasiones calcular primitivas puede ser largo o muy complicado (a ello nos dedicaremos en la próxima sección). Más aún, **hay funciones** de apariencia sencilla para las que se demuestra **que no tienen primitivas que puedan escribirse como suma, producto, composición,... de funciones elementales**, como:

$$\int \operatorname{sen} x^2 dx\,,\ \int e^{x^2} dx\,,\ \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\,,\ \int \frac{e^x}{x} dx\,,\ \int \frac{dx}{\log x}\,,\ \int \sqrt{1+x^3}\,dx\,,\ \int \sqrt[3]{1+x^2}\,dx\,,\ \ldots$$

Si f es continua una primitiva suya es la $F(x)$ de los teoremas fundamentales (pero esto no sirve para calcular una integral concreta). Así $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$, $F^*(x) = \int_{-1}^x \operatorname{sen} t^2 dt$, ... son todas primitivas de $f(x) = \operatorname{sen} x^2$; es decir, $\int \operatorname{sen} x^2 dx = \int_a^x \operatorname{sen} t^2 dt + K$.

[Las variables x, t, ... son mudas, pero **no se repite la letra del límite de integración en el integrando** porque podría dar lugar a errores: $F(1)$ es $\int_0^1 \operatorname{sen} t^2\,dt$, pero no es $\int_0^1 \operatorname{sen} 1\,dx$ y a esto nos podría llevar una incorrecta notación como $\int_0^x \operatorname{sen} x^2\,dx$].

También hay **funciones integrables sin primitivas** (claramente no pueden ser continuas):

Ej. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ 

no tiene primitiva $\big(F(x) = \int_a^x f = 0\ \forall x$ no lo es$\big)$.

De los TFCI se deducen **las propiedades del** $\boxed{\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}}$ que habíamos adelantado:

$f(x) = \frac{1}{x}$ continua si $x > 0 \Rightarrow F(x) = \log x$ derivable (y continua) si $x > 0$ y $F'(x) = \frac{1}{x}$.

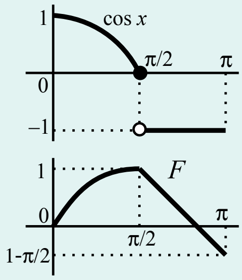
De la definición también salrían el resto de sus propiedades. Probemos una de ellas (aunque utilizando un cambio de variable de los que veremos en la próxima sección):

para $a, b > 0$, $\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} \underset{\uparrow}{=} \log a + \log b$
haciendo $t = as$ en la segunda integral

El segundo TFCI permite también probar con facilidad algunas de las propiedades generales de las integrales vistas en 5.1, en el caso particular de que el integrando sea **continuo**; por ejemplo, si F y G son primitivas de f y g se tiene:

$$\int_a^b [f+g] = [F+G](b) - [F+G](a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^b g\,,$$
$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f + \int_c^b f\,, \ldots$$

Pero recordemos que también son ciertas estas propiedades para las funciones que sólo son **continuas a trozos**. De hecho, sabemos hallar ya fácilmente integrales de muchas f de ese tipo, dividiendo el intervalo y aplicando los TFCI en cada subintervalo:



Ej. Hallemos $\displaystyle\int_0^\pi f$, si $f(x) = \begin{cases} \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -1,\ \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$.

$\int_0^\pi f = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^\pi [-1]\, dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} + [-x]_{\pi/2}^\pi = 1 - \frac{\pi}{2}$.

$\big[$pues $\int_{\pi/2}^\pi f = \int_{\pi/2}^\pi [-1]\, dx$, ya que coinciden salvo en $x = \frac{\pi}{2}\big]$.

También sabemos hallar para todo $x \in [0,\pi]$ la primitiva $F(x) = \int_0^x f$.

Para $x > \frac{\pi}{2}$ hay dos expresiones de la función:

$$\int_0^x f = \begin{cases} \int_0^x \cos t\, dt,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt + \int_{\pi/2}^x [-1]\, dt,\ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{sen} x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 + \frac{\pi}{2} - x,\ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

[función que, como nos aseguraba el primer TFCI, es continua también en $x = \pi/2$, aunque no es derivable en ese punto: $F'(\pi/2^-) = 0 \ne -1 = F'(\pi/2^+)$].

Como sabemos hallar derivadas de funciones definidas por integrales, sabemos hacer con ellas todo lo que hemos visto en cálculo diferencial: rectas tangentes, crecimiento y decrecimiento, extremos, límites indeterminados,...

Ej. Hallemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \frac{t^3}{t^4-4}\, dt$ en $x = 1$:

$F'(x) = \frac{x^3}{x^4-4}$, $F'(1) = \frac{1}{3}$; $F(1) = \int_{-1}^1 \frac{t^3}{t^4-4} dt = 0$ (integrando impar) $\Rightarrow$ tangente: $y = -\frac{x-1}{3}$.

Aunque no se necesita, podríamos (primitiva inmediata) hallar la $F(x) = \frac{1}{4}\big[\log|x^4-4| - \log 3\,\big]$.

Ej. Sea $F(x) = \int_1^x \arctan(e^t)\, dt$. Estudiar dónde F es inyectiva. Precisar si $F(0) > 0$ ó $F(0) < 0$.

Integrando continuo $\forall x \overset{\text{TFC}}{\Rightarrow} F'(x) = \arctan(e^x) > 0\ \forall x$, pues $e^x > 0\ \forall x$

$\Rightarrow$ F es estrictamente creciente en $\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ F es inyectiva en todo $\mathbf{R}$.

Será $F(0) < 0$ porque F es estrictamente creciente y $F(1) = \int_1^1 = 0$,

o porque $F(0) = \int_1^0 = -\int_0^1$ y es $\int_0^1 > 0$ (integrando positivo en todo $\mathbf{R}$).

Ej. Determinemos, si existe, el límite de $G(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{|\cos t^3|}{t^2+1}\, dt$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to \infty$.

El numerador $F = \int_0^x$ es continuo y derivable $\forall x$ (integrando continuo) y es $F(0) = \int_0^0 = 0$.

Cuando $x \to 0$ tenemos indeterminación $0/0$. Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{|\cos x^3|}{x^2+1} = 1\,.$$

Si $x \to \infty$, tal vez no valga L'Hôpital (¿tenderá F a ∞?). De hecho, no hay indeterminación, pues vamos a ver (aunque la primitiva sea no calculable) que F está acotada. En efecto:

$$0 \le \frac{|\cos x^3|}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1}\ \forall x \ \Rightarrow\ 0 \le F(x) \le \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \arctan x\ \forall x \ \Rightarrow$$
$$0 \le G(x) \le \frac{\arctan x}{x} \ \Rightarrow\ 0 \le \lim_{x\to\infty} G \le \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0 \ \Rightarrow\ G \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

En ocasiones se trabaja con funciones similares a la $F(x)$, definidas por integrales de funciones f continuas, pero con **límites de integración que también son funciones (derivables) de** x . Los TFCI también nos permiten derivarlas:

$$\boxed{\text{Si } H(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f \text{ entonces } H'(x)=f[b(x)]\,b'(x)-f[a(x)]\,a'(x)\,.}$$

$\big($Para los x tales que f sea continua en $[a(x),b(x)]$, o en $[b(x),a(x)]$ si $a(x)>b(x)$ $\big)$.

$\big[\,H(x)=\int_0^{b(x)} f-\int_0^{a(x)} f=F[b(x)]-F[a(x)]$, con $F(x)=\int_0^x f$, y regla de la cadena$\big]$.

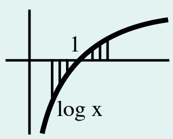
Ej. Utilicemos la fórmula anterior para hallar dos derivadas de la función: $H(x)=x\int_{2x}^{3x} \mathrm{e}^{-t^2}dt$.

$H'(x)=\int_{2x}^{3x}\mathrm{e}^{-t^2}dt+x\big[\mathrm{e}^{-9x^2}\cdot 3-\mathrm{e}^{-4x^2}\cdot 2\big]\to H''(x)=2\big[3\mathrm{e}^{-9x^2}-2\mathrm{e}^{-4x^2}\big]+2x^2\big[8\mathrm{e}^{-4x^2}-27\mathrm{e}^{-9x^2}\big]$

[expresiones válidas $\forall x$, tanto si es positivo como negativo].

Ej. Estudiemos el crecimiento y decrecimiento de $L(x)=\int_{1-x}^{1+x}\log t\,dt$ en el intervalo $I=\big[0,\frac{1}{2}\big]$.

Como $\log x$ es continua en $\big[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\big]$ $\big($valores donde integramos si $x\in\big[0,\frac{1}{2}\big]$ $\big)$ podemos derivar L:



$L'(x)=\log(1+x)-\log(1-x)\cdot[-1]=\log(1-x^2)<0$ si $x\in I \Rightarrow$ decrece.

Era esperable: las áreas negativas que aparecen son mayores que las positivas. En este caso la primitiva sí sería calculable (por partes, como veremos), pero es un rodeo tonto hallar primitivas para derivarlas a continuación.

Ej. Sea $E(x)=\displaystyle\int_{5-2x}^{1}\mathrm{e}^{-t^4}dt$. Determinemos el $x\in[1,3]$ que hace máximo el valor de E y probemos que este valor máximo es mayor que $\frac{2}{3}$.

$E'(x)=0+2\mathrm{e}^{-(5-2x)^4}>0 \Rightarrow E$ es estrictamente creciente en todo $\mathbf{R}$, con lo que el valor máximo se toma en $x=3$ y será $E(3)=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-t^4}dt$ (la primitiva no es calculable).

$$t\in[-1,1]\Rightarrow t^4\le 1\Rightarrow \mathrm{e}^{-t^4}\ge\mathrm{e}^{-1}\Rightarrow \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-t^4}dt\ge\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-1}dt=\tfrac{2}{\mathrm{e}}>\tfrac{2}{3}\,.$$

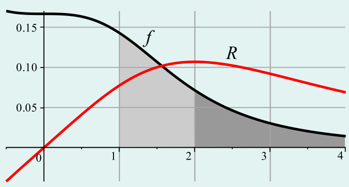
Ej. Hallemos los x que hacen máximo y mínimo el valor de $R(x)=\displaystyle\int_{x/2}^{x}\frac{dt}{6+t^3}$ en el intervalo $[0,4]$:

Integrando continuo y $\frac{x}{2},x$ derivables $\Rightarrow R$ derivable si $t\ge 0$.

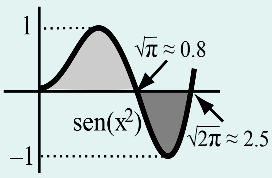
$R'(x)=\frac{1}{6+x^3}-\frac{1/2}{6+(x/2)^3}=\frac{3(8-x^3)}{(6+x^3)(48+x^3)}=0$ si $x=2$.

Crece en $[0,2]$ y decrece en $[2,4]$ $\Rightarrow$ máximo $R(2)=\int_1^2 f$.

El mínimo, que estará en uno de los extremos, será $R(0)=0$, pues $R(4)=\int_2^4>0$, ya que el integrando es positivo.



Ej. Estudiemos en qué $x\in[0,2\pi]$ alcanza sus valores extremos la función: $S(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\operatorname{sen}t^2\,dt$.



Su derivada es $S'(x)=\operatorname{sen}[(\sqrt{x})^2]\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{\operatorname{sen}x}{2\sqrt{x}}$, $\forall x>0$.

Máximo y mínimo de S existen por ser continua. Los candidatos son los extremos y los puntos en que $S'=0$, es decir, $x=0$, $x=\pi$ y $x=2\pi$. Con el signo de S' se ve que S crece antes de π y decrece después, luego en ese punto se alcanza el máximo.

[No era necesario hallar S' para decirlo: estaba claro viendo la gráfica de $f(x)=\operatorname{sen}x^2$, pues hasta $x^2=\pi$ añadimos áreas positivas y a partir de entonces quitamos áreas bajo del eje x].

Precisar cuál de los mínimos locales es el absoluto exige saber cuál de estos números es menor:

$$S(0)=0 \quad \text{ó} \quad S(2\pi)=\int_0^{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sen}(t^2)\,dt$$

La gráfica de f sugiere que $S(2\pi)>0$, pero no podemos dar el valor exacto, por no tener f primitiva elemental (veremos cómo aproximar numéricamente las integrales en la sección 5.5).

5.3. Cálculo de primitivas

Ya vimos en la anterior sección cómo calcular **primitivas inmediatas**, consecuencias directas de las fórmulas de derivación (o casi inmediatas, teniendo cuidado con las constantes que pudieran faltar). Nos dedicamos ahora a ver cómo hallar primitivas algo más complicadas. No existen muchas más técnicas que las que veremos en esta sección. Que nos quede claro que la mayoría de las primitivas no son calculables.

De la **linealidad** de la derivada se deduce inmediatamente para las primitivas que:

$$\boxed{\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \ , \quad \int cf(x)dx = c\int f(x)dx} \ .$$

Ej. $\int \left[4\sqrt{x+6} + 5\operatorname{sen}x - 7^x\right]dx = 4\int\sqrt{x+6}\,dx + 5\int \operatorname{sen}x\,dx - \int 7^x dx = \frac{8}{3}[x+6]^{3/2} - 5\cos x - \frac{7^x}{\log 7}$
(insistimos en que no lo escribiremos nosotros, pero que no olvidaremos que podemos añadir $+K$).

Es falso que la integral de un producto sea el producto de las integrales por no serlo la derivada, pero de la fórmula del producto $(fg)' = fg' + f'g$ obtenemos:

Integración por partes. Sean f' y g' continuas (para que existan las primitivas). Entonces:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \ ; \ \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

Esto reduce el problema a calcular otra primitiva, que será más sencilla si f' y g lo son (o si una de ellas lo es y la otra no es más complicada que la anterior).

Con la notación $\boxed{df \equiv f'(x)dx}$, la integración por partes se escribe $\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$.

Ej. $\int x\operatorname{sen}x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x\,,\ dv=\operatorname{sen}x\,dx \\ \to du=dx\,,\ v=-\cos x \end{array}\right] = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen}x$.

Ej. $\int x\mathrm{e}^{-x}dx = [\,u=x\,,\ dv=\mathrm{e}^{-x}dx \to du=dx\,,\ v=-\mathrm{e}^{-x}\,] = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}dx = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
[las primitivas de $\operatorname{sen}x$ y e^{-x} no son peores que ellas, pero la derivada del x sí es más sencilla].

Otras funciones que mejoran al derivarlas son los logaritmos (las potencias de x no se complican):

Ej. $\int \sqrt{x}\log|x|dx = \left[\,u=\log|x|\ ,\ dv=\sqrt{x}\,dx\,\right] = \frac{2}{3}x^{3/2}\log|x| - \frac{2}{3}\int x^{3/2}\frac{dx}{x} = x^{3/2}\left[\frac{2}{3}\log|x| - \frac{4}{9}\right]$.

Algunas veces conviene tomar $g'=1$ (es decir, $dv=dx$):

Ej. $\int \log x\,dx = \left[\,u=\log x\,,\ dv=dx \to du=\frac{dx}{x}\,,\ v=x\,\right] = x\log x - \int dx = x\log x - x$.

Ej. $\int \arctan x\,dx = [\,u=\arctan x\,,\ dv=dx\,] = x\arctan x - \int\frac{x}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$.

Otras veces hay que repetir la integración por partes:

Ej. $\int \underset{u\uparrow}{x^2}\ \underset{dv\uparrow}{\mathrm{e}^x dx} = x^2\mathrm{e}^x - 2\int \underset{u\uparrow}{x}\ \underset{dv\uparrow}{\mathrm{e}^x dx} = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\int \mathrm{e}^x dx = [x^2-2x+2]\,\mathrm{e}^x$.

Ej. Otro truco: $\int\frac{\log x\,dx}{x} = \log x\,\log x - \int\frac{\log x\,dx}{x} \to \int\frac{\log x\,dx}{x} = \frac{1}{2}[\log x]^2$ [se podía haber hecho a ojo].

Combinando las dos últimas ideas:

Ej. $I = \int \underset{u\uparrow}{\operatorname{sen}x}\ \underset{dv\uparrow}{\mathrm{e}^x dx} = \operatorname{sen}x\,\mathrm{e}^x - \int \underset{u\uparrow}{\cos x}\ \underset{dv\uparrow}{\mathrm{e}^x dx} = \mathrm{e}^x[\operatorname{sen}x - \cos x] - I \ \Rightarrow\ I = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x[\operatorname{sen}x - \cos x]$.

Ej. Curiosidad: $\int\frac{dx}{x} = \left[\,u=x, dv=\frac{dx}{x^2} \to du=dx, v=-\frac{1}{x}\,\right] = -1 + \int\frac{dx}{x}$ ¿$\Rightarrow$? $0=-1$!!
[no olvidemos que hay una K arbitraria aunque no la escribamos].

Primitivas de funciones racionales: $\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx\,,\ \text{con } P \text{ y } Q \text{ polinomios}}$.

Si el $\operatorname{gr}P \geq \operatorname{gr}Q$, dividimos: $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ con el resto R de grado menor que Q.

Vimos que Q se puede escribir como producto de polinomios del tipo $(x-a)^m$ [raíces reales] y $\left(x^2+cx+d\right)^n$ [complejas], siendo m y n la multiplicidad de las raíces [$m=1$ si son simples].

[El problema es que (como vimos en 3.3), salvo para Q especialmente sencillos, realizar esta descomposición es, en la práctica, imposible por ser imposible hallar sus raíces].

Se prueba que $\frac{R}{Q}$ se puede escribir como suma de constantes por funciones del tipo:

$$\frac{1}{(x-a)^j}\,,\ \frac{1}{(x^2+cx+d)^k} \text{ y } \frac{x}{(x^2+cx+d)^k}\,,\ \text{con } 1\leq j\leq m,\ 1\leq k\leq n$$ (llamadas **fracciones simples**).

Para 'descomponer en fracciones simples' $\frac{R}{Q}$ (hallar la constante que acompaña a cada fracción) basta resolver un sistema lineal de ecuaciones. Y así, el problema de integrar P/Q se reduce, una vez factorizado Q, al de integrar el polinomio C y funciones como las últimas.

Ej. $I = \int \frac{4x^4-6x^3+5x^2-11x+4}{x^5-x^4+x^3-3x^2+2x}\,dx = \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ (ya es $4<5$). Empezamos factorizando:

$Q(x) = x\,(x-1)^2(x^2+x+2)$ [suerte hemos tenido] y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+2} = \frac{A(x^4-x^3+x^2-3x+2)+B(x^4+x^2-2x)+C(x^3+x^2+2x)+(Dx+E)(x^3-2x^2+x)}{x(x-1)^2(x^2+x+2)}$$

$\big[$Si hubiera $(x-1)^m$ escribiríamos $\frac{B_1}{x-1}+\cdots+\frac{B_m}{(x-1)^m}$; si $(x^2+x-2)^n$, $\frac{D_1x+E_1}{x^2+x+2}+\cdots+\frac{D_nx+E_n}{(x^2+x+2)^n}\big]$.

Igualando coeficientes de x^4, x^3, x^2, x y la constante de ambos términos se obtiene el sistema:

$A+B+D=4\,,\ -A+C-2D+E=-6\,,\ A+B+C+D-2E=5\,,\ -3A-2B+2C+E=-11\,,\ 2A=4$

Resolviéndolo: $A=2\,,\ B=1\,,\ C=-1\,,\ D=1\,,\ E=-1$

$$\Rightarrow\ I = \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+2}$$

Las $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$ son casi inmediatas. Más trabajo dan las otras. Primero se busca un logaritmo:

$$\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2+x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+2}$$

Y luego un arco tangente completando el cuadrado: $x^2+x+2 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4} = \frac{7}{4}\Big[\big(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\big)^2+1\Big]$.

Por tanto: $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+2} = \frac{1}{2}\log(x^2+x+2) - \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{2/\sqrt{7}\,dx}{\left([2x+1]/\sqrt{7}\right)^2+1}\ \to$

$$I = 2\log|x| + \log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\log(x^2+x+2) - \frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\big(\tfrac{2x+1}{\sqrt{7}}\big)\,.$$

Ej. $I = \int \frac{x^4-5x^2+x+8}{x^3+x^2-4x-4}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)}\,dx$ [de nuevo las raíces eran sencillas].

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+2)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$$

Cuando haya tantas raíces reales, mejor que igualar coeficientes se hace $x=a$ para cada raíz a:

$x=-1 \to -3A=3\,,\ A=-1\ ;\ \ x=-2\to 4B=2\,,\ B=\frac{1}{2}\ ;\ \ x=2\to 12C=6\,,\ C=\frac{1}{2}$

$$\to\ I = \tfrac{1}{2}x^2 - x - \log|x+1| + \tfrac{1}{2}\log|x+2| + \tfrac{1}{2}\log|x-2| = \tfrac{1}{2}\Big[x^2-2x+\log\frac{|x^2-4|}{|x+1|^2}\Big]$$

$\big[$Para hallar las primitivas de las fracciones simples más complicadas como $\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^n}$ se utilizarían fórmulas de reducción como la propuesta en problemas$\big]$.

Cambios de variable:

Supongamos que buscamos una primitiva de $\int f(g(x))g'(x)dx$ (con f y g' continuas). Si F es una primitiva de f, por la regla de la cadena: $(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$. Así pues, $F\circ g$ es la primitiva buscada. Basta pues integrar la f y evaluar el resultado en $g(x)$. Si lo que queremos es la integral definida entre a y b su valor es $F(g(b))-F(g(a))$. Por tanto:

$$\boxed{\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(u)\,du\Big|_{u=g(x)}\ ;\ \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du}$$

En la práctica se suele usar la notación de diferenciales: se escribe $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ y si hay límites de integración es fácil recordar que: $x=a\to u=g(a)$, $x=b\to u=g(b)$.

En algunos casos la $g'(x)$ **aparece explícitamente** y es claro el cambio que hay que hacer:

Ej. $\int \operatorname{sen}^3 2x\cos 2x\,dx=[\ u=\operatorname{sen}2x, du=2\cos 2x\,dx\ ]=\frac{1}{2}\int u^3du=\frac{1}{8}u^4=\frac{1}{8}\operatorname{sen}^4 2x$.

[en casos tan sencillos no será necesario escribir la sustitución, es fácil ver a ojo que $\operatorname{sen}^4 2x$ es casi la primitiva; derivándola mentalmente se ve que falta el $1/8$].

Ej. $\int_{\mathrm{e}}^5 \frac{dx}{x\log x}=\left[\begin{array}{c} u=\log x\ ,\ du=\frac{dx}{x} \\ x=\mathrm{e}\to u=1\,,\,x=5\to u=\log 5\end{array}\right]=\int_1^{\log 5}\frac{du}{u}=\log|\log 5|-0=\log(\log 5)$.

[podíamos haber calculado la primitiva olvidando límites de integración y sustituir al final, una vez deshecho el cambio].

Ej. $\int \mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,dx=\big[\ u=\mathrm{e}^x, du=\mathrm{e}^x dx\ \big]=\int\sqrt{u-1}\,du=\frac{2}{3}[u-1]^{3/2}=\frac{2}{3}[\mathrm{e}^x-1]^{3/2}$.

Ej. $\int \operatorname{sh}^3 x\,\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}dx=\left[\begin{array}{c} u=\operatorname{ch}x,\,du=\operatorname{sh}x\,dx\\ \operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x-1\end{array}\right]=\int[u^2-1]\mathrm{e}^{-u}du=[\text{partes}]$
$=-u^2\mathrm{e}^{-u}+2\int u\mathrm{e}^{-u}du+\mathrm{e}^{-u}=[\text{partes}]=[1-2u-u^2]\mathrm{e}^{-u}+2\int \mathrm{e}^{-u}du=-[1+2u+u^2]\mathrm{e}^{-u}$
$=-\big[1+2\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}^2x\big]\,\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}$.

$\big($o partes directamente: $\int \operatorname{sh}^3x\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}dx=\left[\begin{array}{c} u=\operatorname{sh}^2x\\ dv=\operatorname{sh}x\,\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}dx\end{array}\right]=-\operatorname{sh}^2x+2\int\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}dx$
$=[\text{partes}]=-\operatorname{sh}^2x\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}-2\operatorname{ch}x\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}+2\int\operatorname{sh}x\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}dx=-[2+2\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}^2x]\,\mathrm{e}^{-\operatorname{ch}x}\ \big)$.

Pero en la mayoría de los casos no es tan evidente el cambio ni hay una clara du. La forma del integrando puede sugerir hacer algún cambio $u=g(x)$. Para obtener entonces la $f(u)$ **se despeja la** x **en función de** u**, se calcula el** dx **y se sustituyen** x **y** dx **en la integral** (sin olvidar el cambio de límites de integración, si los hay):

Ej. $\int_4^9\cos\sqrt{x}\,dx=\big[u=\sqrt{x}\,,\,x=u^2,\,dx=2udu\,,\,x=4\to u=2\,,\,x=9\to u=3\big]=2\int_2^3 u\cos u\,du=$
$[\text{partes}]=2[u\operatorname{sen}u]_2^3-2\int_2^3\operatorname{sen}u\,du=2[u\operatorname{sen}u]_2^3+2[\cos u]_2^3=2[3\operatorname{sen}3-2\operatorname{sen}2+\cos 3-\cos 2]$.

Ej. $\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,dx=[\,u=\mathrm{e}^x\,,\,x=\log u\,,\,dx=\frac{du}{u}\,]=\int\frac{\sqrt{u-1}}{u}du=\big[\,\sqrt{u-1}=z\,,\,u=z^2+1\,,\,du=2zdz\,\big]$
$=2\int\frac{z^2}{z^2+1}dz=2\int\big[1-\frac{1}{z^2+1}\big]dz=2z-2\arctan z=2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$

[con un poco más de vista podríamos haber hecho directamente $z=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$ acabando antes].

[En los cambios de variable las funciones f y g' deben ser continuas. Si g' aparece explícitamente es fácil ver que es así. Pero si no aparece se nos podría olvidar y cometer errores].

La práctica sugiere qué y cuándo sustituir. Para tipos concretos de funciones (trigonométricas, con radicales...) hay cambios típicos que se sabe que dan buen resultado (los veremos a continuación) y que suelen llevar a la integración de funciones racionales de las que hemos visto.

Primitivas de funciones trigonométricas

[Aparecen muy a menudo, ya que están muy ligadas a la integración en polares].

Para integrar $\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx$, con R función racional en $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$, existe siempre un cambio $\left[u=\tan\frac{x}{2}\right]$ que la lleva a una racional, pero veamos antes una serie de casos más fáciles.

$\boxed{\int \operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx}$:

Si m **ó** n **son impares**: $\operatorname{sen}^{2k+1}x=\operatorname{sen}x\,(1-\cos^2 x)^k$ y se hace $u=\cos x$.
$\cos^{2k+1}x=\cos x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)^k$ y se hace $u=\operatorname{sen}x$.

Si m **y** n **pares**, se escriben en función del ángulo doble: $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

Ej. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx=\int (1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^2 x\cos x dx=\underset{\text{o a ojo}}{[u=\operatorname{sen}x]}=\int (u^2-u^4)\,du=\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x$.

Ej. $\int \cos 2x\operatorname{sen}x\,dx=\int \left[\cos^2 x\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}^3 x\right]dx=\int \left[2\cos^2 x\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\right]dx=\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$.

O bien $\left(\operatorname{sen}a\cos b\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)]\right)$: $\int \frac{1}{2}[\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x]\,dx=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{6}\cos 3x$.

[Este tipo de igualdades se usan para integrar productos de senos y cosenos de distinto ángulo].

Ej. $\int \cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx=\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}$.

La integral general $\boxed{\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx}$ se convierte en cociente de polinomios haciendo:

$\boxed{u=\cos x}$, si R es impar en $\operatorname{sen}x$ [es decir, si $R(-\operatorname{sen}x,\cos x)=-R(\operatorname{sen}x,\cos x)$].

$\boxed{u=\operatorname{sen}x}$, si R es impar en $\cos x$ [es decir, si $R(\operatorname{sen}x,-\cos x)=-R(\operatorname{sen}x,\cos x)$].

$\boxed{u=\tan x}$ $\left[\cos^2 x=\frac{1}{1+u^2},\ dx=\frac{du}{1+u^2}\right]$, si $R(-\operatorname{sen}x,-\cos x)=R(\operatorname{sen}x,\cos x)$.

$\boxed{u=\tan\frac{x}{2}}$ $\left[\operatorname{sen}x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx=\frac{2du}{1+u^2}\right]$, para cualquier R [último recurso].

Ej. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x}=\int \frac{\operatorname{sen}x\,dx}{1-\cos^2 x}=[\,u=\cos x\,]=\int \frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1}-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|$.

O de otra forma: $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x}=[\,u=\tan\frac{x}{2}\,]=\int \frac{2du/[1+u^2]}{2u[1+u^2]}=\int \frac{du}{u}=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

[Ha salido tan fácil por casualidad; las dos expresiones de la primitiva deben coincidir salvo K arbitraria (con pocas cuentas se ve que son iguales)].

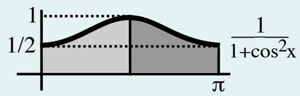
Ej. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\operatorname{sen}x}=\int \frac{dx}{\cos^4 x\tan x}=[\,u=\tan x\,]=\int \frac{[1+u^2]^2 du}{u[1+u^2]}=\int \frac{du}{u}+\int u\,du=\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x$.

Más largo: $\int \frac{dx}{\cos^3 x\operatorname{sen}x}=\int \frac{\operatorname{sen}x\,dx}{\cos^3 x[1-\cos^2 x]}\overset{u=\cos x}{=}\int \frac{du}{u^3[u+1][u-1]}=\cdots=\int \left[\frac{1/2}{u+1}+\frac{1/2}{u-1}-\frac{1}{u}-\frac{1}{u^3}\right]du$

$=\frac{1}{2}\log|1-u^2|-\log u+\frac{1}{2u^2}=\log|\operatorname{sen}x|-\log|\cos x|+\frac{1}{2\cos^2 x}$.

[Peor todavía sería hacer $u=\operatorname{sen}x$ (también es impar en coseno) ó $u=\tan\frac{x}{2}$; por ejemplo, con el último cambio queda la complicada primitiva $\int \frac{(1+u^2)^3}{u(1-u^2)^3}\,du$].

Ej. $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\left[\,u=\tan x,\ dx=\frac{du}{1+u^2}\,\right]=\int_0^0\frac{du}{2+u^2}=0$



[resultado evidentemente **falso**: el integrando es siempre positivo y la integral debía ser un número positivo. No olvidemos que en los cambios de variable las funciones f y g' deben ser continuas. El cambio hecho (clásico, como hemos dicho, para este tipo de integrales) es válido sólo hasta $\frac{\pi}{2}$; sí es cierto que

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\infty}\frac{du}{2+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{1/\sqrt{2}\,du}{1+[u/\sqrt{2}]^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big]_0^{\infty}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\ \to\ \int_0^{\pi}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

pues el integrando es simétrico respecto a $x=\frac{\pi}{2}$. Al ∞ que nos ha aparecido (que como siempre representará un límite) le daremos más seriedad cuando estudiemos las integrales impropias].

Primitivas de irracionales

(las más simples; R función racional de x y de la raíz que se indica).

$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\,\right)\, dx}$ se convierte en racional haciendo $u = \sqrt[n]{ax+b}$.

Ej. $\int x[1+x]^{1/4}dx = \left[\begin{array}{c} u=[1+x]^{1/4},\ x=u^4-1 \\ dx=4u^3du \end{array}\right] = \int 4(u^8-u^4)du = \frac{4u^9}{9} - \frac{4u^5}{5} = \frac{4}{9}[1+x]^{9/4} - \frac{4}{5}[1+x]^{5/4}.$

También se puede hacer por partes:

$$\int x[1+x]^{1/4}dx = \tfrac{4}{5}x[1+x]^{5/4} - \tfrac{4}{5}\int [1+x]^{5/4}dx = \tfrac{4}{5}x[1+x]^{5/4} - \tfrac{16}{45}[1+x]^{9/4} .$$

Ej. $\int_4^5 \frac{dx}{x-4\sqrt{x-4}} = \left[\begin{array}{c} u=\sqrt{x-4},\ x=u^2+4 \\ dx=2u\,du \end{array}\right] = \int_0^1 \frac{2u\,du}{u^2-4u+4} = \int_0^1 \frac{2(u-2+2)\,du}{(u-2)^2} = \int_0^1 \frac{2du}{u-2} + \int_0^1 \frac{4du}{(u-2)^2}$

$$= 2\log|u-2|\Big|_0^1 - \frac{4}{u-2}\Big|_0^1 = 2(1-\log 2) .$$

$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\,\right) dx}$ se convierte en trigonométrica haciendo $x = a\,\mathrm{sen}\,u$.

Ej. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx = [\ x = 2\,\mathrm{sen}\,u\ ,\ dx = 2\cos u\,du\ ] = \int 4\cos^2 u\,du = 2u + \mathrm{sen}\,2u$

$$= 2u + 2\,\mathrm{sen}\,u\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 u} = 2\,\mathrm{arc\,sen}\,\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2} .$$

$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{x^2+a}\,\right) dx}$ se convierte en racional haciendo $u = x + \sqrt{x^2+a}$,

puesto que $(u-x)^2 = u^2-2xu+x^2 = x^2+a \to x = \frac{u}{2} - \frac{a}{2u} \to dx = \left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2u^2}\right)du$.

(El cambio $u = \sqrt{x^2+a}$ no sirve de nada pues vuelven a aparecer raíces al despejar la x).

Ej. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \left[\ u = x+\sqrt{x^2+1}\, , x = \frac{u^2-1}{2u}\ , dx = \frac{1+u^2}{2u^2}du\ \right] = \int \frac{2du}{u^2-1} = \log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \log\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| .$

Ej. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$ [¡a ojo! , antes de ponerse a calcular a lo loco, miremos si es inmediata].

[Las primitivas con raíces $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se reducen a las últimas completando cuadrados].

Recordamos que si las raíces son más complicadas (como $\sqrt{x^3+a}$ ó $\sqrt[3]{x^2+a}$), las integrales, son, en general, no calculables. Esto no quiere decir que alguna, en particular, lo sea:

Ej. $\int \frac{x^7dx}{\sqrt{x^4+1}} = [\,t=x^4\,] = \frac{1}{4}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t+1}} = [\,u = \sqrt{t+1}\,] = \frac{1}{2}\int (u^2-1)du = \frac{u^3}{6} - \frac{u}{2} = \frac{1}{6}[x^4-2]\sqrt{x^4+1} .$

[Pero no se podría hallar la primitiva de $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$].

Otro tipo de primitivas que se convierten en racionales mediante cambios de variable son:

$\boxed{\int R(\mathrm{e}^x)\, dx}$, siendo R función racional de e^x .

Haciendo $u = \mathrm{e}^x$ se convierte en la racional $\int \frac{R(u)}{u}$, pues $dx = \frac{du}{u}$.

Ej. $\int \frac{dx}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{2x})} = \int \frac{du}{u(1+u^2)} = \int \left[\frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2}\right] du = \left[\begin{array}{c} A(1+u^2)+Bu^2+Cu=1 \\ C=0,\ A=1,\ B=-A \end{array}\right]$

$$= \int \frac{du}{u} - \int \frac{u\,du}{1+u^2} = \log u - \tfrac{1}{2}\log(1+u^2) = x - \tfrac{1}{2}\log\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right) .$$

[Aunque (parecido) también se podía hacer con $u = \mathrm{e}^{2x} \to \frac{1}{2}\int \frac{du}{u(1+u)} = \frac{1}{2}\log u - \frac{1}{2}\log(1+u)$ $\uparrow$

Más ejemplos variados de cálculo de integrales:

Ej. $\int_0^1 \log\left(3+x^2\right) dx = \left[\begin{matrix}\text{Partes: } dv=dx \\ u=\log(3+x^2)\end{matrix}\right] = x\log(3+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2+6-6}{3+x^2} dx = 2\log 2 - 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$,

pues $\int_0^1 \frac{6dx}{3+x^2} = 2\sqrt{3}\int_0^1 \frac{dx/\sqrt{3}}{1+(x/\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_0^1$.

Ej. $\int_0^4 \log\left(1+\sqrt{x}\right) dx$. El aspecto del integrando sugiere hacer el cambio: $t=\sqrt{x}$, $dx = 2t\,dt$.

Los nuevos límites de integración son $x=0 \to t=0$, $x=4 \to t=2$ y la integral queda:

$$2\int_0^2 t\log(1+t)\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{partes}}}{=} t^2\log(1+t)\Big]_0^2 - \int_0^2 \frac{t^2\,dt}{t+1} = \left[(t^2-1)\log(1+t) - \tfrac{1}{2}(t-1)^2\right]_0^2 = 3\log 3\,.$$

$$\searrow = \frac{t^2-1+1}{t+1} = t-1+\frac{1}{t+1}$$

Ej. $\int\cos(\log x)\,dx$. Apetece, para simplificar el integrando, hacer $\log x = t$, $dx = e^t dt$, que lleva a

$$\int e^t\cos t\,dt = e^t\cos t + \int e^t \operatorname{sen} t\,dt = e^t[\cos t+\operatorname{sen} t] - \int e^t\cos t\,dt$$

$$\Rightarrow \int e^t\cos t\,dt = \tfrac{1}{2}e^t[\cos t+\operatorname{sen} t] = \tfrac{1}{2}x\left[\cos(\log x)+\operatorname{sen}(\log x)\right]\,.$$

Ej. $\int\frac{1+x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$. En la página anterior tenemos el cambio que la lleva a racional: $x=3\operatorname{sen} u$.

$$\to \int\frac{1+3\operatorname{sen} u}{3\cos u}\,3\cos u\,du = u - 3\cos u = \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} - \sqrt{9-x^2}\,.$$

Pero hubiéramos acabado antes observando que era 'casi inmediata': $\int\frac{dx/3}{\sqrt{1-(x/3)^2}} - \int\frac{-x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Ej. $\int e^{2x}\cos(e^x)\,dx \overset{e^x=u}{=} \int u\cos u\,du \overset{\text{partes}}{=} u\operatorname{sen} u - \int\operatorname{sen} u\,du = u\operatorname{sen} u + \cos u = e^x\operatorname{sen} e^x + \cos e^x$.

Ej. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int\frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}} = \int\frac{2e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 2\arctan e^x$. [A ojo, no hay que hacer ningún cambio].

Ej. $\int_{-1}^1 \operatorname{sh}^3 x\,dx = 0$, sin nada que calcular. El integrando es impar (como $\operatorname{sh} x$).

$\left[\text{Aunque se podría hallar la primitiva: } \int\left(\operatorname{ch}^2 x - 1\right)\operatorname{sh} x = \tfrac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x\right]$.

Ej. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{1+|x|}$. El $|x|$ tiene dos expresiones en el intervalo, con lo que hay que dividir la integral:

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{1-x} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -\log|1-x|\Big]_{-2}^0 + \log|1+x|\Big]_0^1 = \log 3 + \log 2\,.$$

Ej. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{1+x}$. Esta parece más inofensiva y podría pensarse que es: $\log|1+x|\Big]_{-2}^1 = \log 2$.

Pero esto es absolutamente falso. La integral se ha definido para funciones acotadas y existía para funciones continuas (o a trozos) y los teoremas fundamentales eran también para ese tipo de funciones. Nuestro integrando tiene una asíntota en $x=-1$ (dentro del intervalo) y **la integral no existe**.

[Ni siquiera existirá como una **integral impropia** de las que vamos a definir en la próxima sección].

5.4. Integrales impropias

La integral la hemos definido para funciones f acotadas en intervalos $[a,b]$ finitos. Extendemos la definición, primero para intervalos de integración no acotados $[a,\infty)$ ó $(-\infty,b]$. Como siempre que aparece un ∞ aparecerá un límite en la definición:

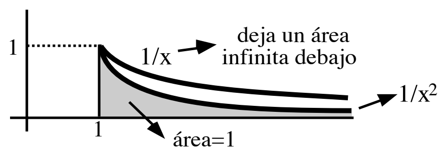
Def. Supongamos que $\int_a^b f$ existe para todo $b\geq a$. Si existe el $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$ se le llama **integral impropia** de f en $[a,\infty)$, se representa por $\int_a^\infty f$ ó $\int_a^\infty f(x)dx$ y la integral impropia se dice **convergente**. Si $\int_a^\infty f$ no es convergente, se dice **divergente**.

$\big[$Análogamente se define $\int_{-\infty}^b f = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f$ $\big]$.

[La integral entre a y b existe $\forall b$, como sabemos, si por ejemplo f es continua (o continua a trozos) en $[a,\infty)$; como para cada b la integral es un número, tenemos una función de b y tiene sentido hablar de su límite cuando $b\to\infty$; este límite (el valor de la integral impropia) será otro número si la integral converge].

Ej. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\big[-\frac{1}{x}\big]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}\big[1-\frac{1}{b}\big] = 1$.
[la integral es convergente y su valor es 1].

Ej. $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\,[\log x]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}[\log b]$ diverge.



En general, $\boxed{\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ diverge si } s\leq 1 \text{ y converge si } s>1\ \big[\text{hacia } \frac{1}{s-1}\big].}$

[es inmediato comprobarlo; para los mismos s converge la $\int_a^\infty \frac{dx}{x^s}$ $\forall a>0$, pues $\int_a^b$ e $\int_1^b$ son dos funciones de b que sólo difieren en la constante $\int_1^a$]

$\boxed{\int_0^\infty e^{ax}dx} = \frac{1}{a}\lim\limits_{b\to\infty}[e^{ax}]_0^b = \frac{1}{a}\lim\limits_{b\to\infty}[e^{ab}-1]$ $\boxed{\text{converge si } a<0}$ $\big[$hacia $-\frac{1}{a}\big]$ y diverge si $a\geq 0$.

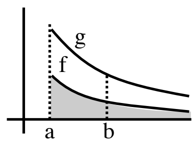
[Se suele abreviar $[e^{ax}]_0^\infty$ en lugar de $\lim\limits_{b\to\infty}[e^{ax}]_0^b$; pero no olvidemos que es un límite].

Aunque no sepamos calcular la primitiva podremos, en bastantes ocasiones, determinar si es o no convergente (como ocurría con las series; incluso teníamos un criterio integral que relacionaba unas y otras; los criterios de convergencia son muy parecidos).

Criterios para **funciones positivas** $\big($los damos para la $\int_a^\infty$; son análogos para $\int_{-\infty}^b\big)$.
En todos suponemos que las funciones que aparecen son integrables en $[a,b]$ $\forall b$.

Teorema:

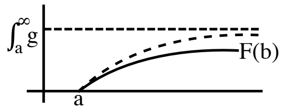
$\boxed{\text{Si } 0\leq f(x)\leq g(x) \text{ para } x\geq a ,\ \int_a^\infty g \text{ converge } \Rightarrow \int_a^\infty f \text{ converge, e } \int_a^\infty f\leq\int_a^\infty g\, .}$



$0\leq F(b)=\int_a^b f\leq\int_a^b g\leq\int_a^\infty g\ \ \forall b\geq a\ \Rightarrow$

$F(b)$ creciente y acotada superiormente $\Rightarrow$ $F(b)$ tiene límite si $b\to\infty$

(la última $\Rightarrow$ se prueba como en las sucesiones).



[El teorema dice también que $\int_a^\infty f$ divergente $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g$ divergente, desde luego; pero como siempre, en este tipo de criterios, de que la pequeña converja o de que la gorda diverja, no se sigue nada; e insistimos en que es para funciones positivas: si una f cualquiera es menor que otra de integral convergente, no tiene que converger su integral, ya que podría irse a $-\infty$].

Las comparaciones con $\leq$ son siempre más complicadas que las hechas por paso al límite:

Teorema:

Si f y g son positivas para $x \geq a$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ finito, entonces:
Si $c > 0$, $\int_a^\infty g$ convergente $\Leftrightarrow$ $\int_a^\infty f$ convergente.
Si $c = 0$, $\int_a^\infty g$ convergente $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f$ convergente [es decir, $\int_a^\infty f$ diverge $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g$ diverge].

Si $c > 0$, para $x \geq M$ es $\frac{c}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3c}{2}$ $\Rightarrow$ $0 \leq \frac{c}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3c}{2} g(x)$ y podemos aplicar el teorema anterior. Si $c = 0$, para $x \geq M$ es $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y de nuevo el teorema. Además está claro que $\int_M^\infty f$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_a^\infty f$ converge.

Si el integrando f no es positivo, como en las series, conviene considerar el $|f|$:

Teorema: $\boxed{\int_a^\infty |f| \text{ convergente } \Rightarrow \int_a^\infty f \text{ convergente}}$ $\big[$ f se dice absolutamente integrable en $[a,\infty)$ $\big]$.

$0 \leq f+|f| \leq 2|f| \Rightarrow \int_a^\infty \big[f+|f|\big]$ convergente $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f = \int_a^\infty \big[f+|f|\big] - \int_a^\infty |f|$ convergente.

Ej. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx$ diverge, pues si $x \geq 3$ es $\frac{[\log x]^2}{x} \geq \frac{1}{x}$ e $\int_3^\infty \frac{dx}{x}$ diverge.

Por paso al límite debemos utilizar la parte con $c = 0$ ya que $\log x$ no se parece a ningún x^s :

$\frac{1/x}{[\log x]^2/x} \underset{x\to\infty}{\to} 0$ e $\int_3^\infty \frac{dx}{x}$ divergente $\Rightarrow$ $\int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx$ diverge (mayor que divergente).

También nos bastaba la definición: $\int_3^\infty \frac{[\log x]^2}{x} dx = \frac{1}{3}[\log x]^3\Big]_3^\infty \to \infty$.

Ej. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5-x+1}}$. Cuando $x \to \infty$, $\frac{x}{\sqrt{x^5-x+1}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ $\Big[$es decir, $\frac{x/\sqrt{x^5-x+1}}{1/x^{3/2}} \underset{x\to\infty}{\to} 1\Big]$.

Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}$ converge, la dada también (no sabemos a qué número).

Ej. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (sin primitiva elemental) converge, pues $\frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = e^{x-x^2} \underset{x\to\infty}{\to} 0$ e $\int_0^\infty e^{-x} dx$ converge.

O bien, por desigualdades: si $x \geq 1$ es $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ y de aquí:

$\int_1^\infty e^{-x} dx$ converge ($\Leftrightarrow \int_0^\infty$ converge) $\Rightarrow$ $\int_1^\infty e^{-x^2}$ converge ($\Leftrightarrow \int_0^\infty$ converge).

$\big[$con técnicas de integrales dobles se puede ver que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ $\big]$.

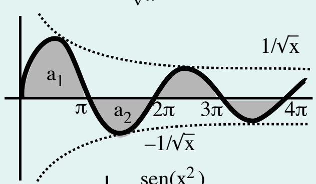
Ej. $\int_1^\infty \operatorname{sen}\frac{1}{x} dx \sim \int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergente $\Big[$pues $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1\Big]$ $\Rightarrow$ la dada diverge.

Ej. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^3} dx$ es convergente pues $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3}$ e $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ converge $\big(\sim \frac{1}{x^3}$ cuando $x \to \infty\big)$.

Ej. Aplicando la misma idea a $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx$ no podemos concluir nada, ya que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}$ diverge.

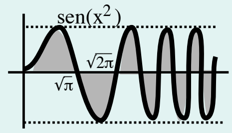
Pero $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \cdots \equiv \sum\limits_{k=1}^\infty a_k$, donde

$|a_k| = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{x}} \leq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\big[\sqrt{k\pi} - \sqrt{[k-1]\pi}\,\big]$.



La serie es alternada, decreciente y con $a_k \to 0$, con lo que por Leibniz converge (y por tanto la integral).

De aquí deducimos que



$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = [\ t = x^2\ ] = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} dt$ también converge.

(¡a pesar de que $f(x)$ no tiende a 0 si $x \to \infty$! [esto no es como en las series]).

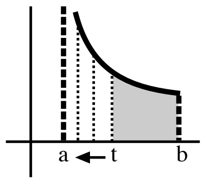
La segunda extensión de la integral es para f **no acotada en un extremo del intervalo**:

Def. Supongamos que $\int_t^b f$ existe para todo $t\in(a,b]$. Se define $\int_{a^+}^b f = \lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f$ si el límite existe y en ese caso la integral impropia se dice convergente.

$\big[$ Análogamente: $\int_a^{b^-} f = \lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f$ $\big]$.

(En vez de a^+ y b^- suele escribir a y b; no olvidemos que la integral es impropia).

[No se pide que f esté acotada en $(a,b]$, ni siquiera que esté definida en el punto a; para que f sea integrable en $[t,b]$, debe, desde luego, estar acotada en cada intervalo de esa forma; por ejemplo, si f es continua en $(a,b]$ se tiene, para todo t, garantizada la existencia de la integral de f en $[t,b]$, aunque el límite puede no existir y divergir la integral impropia].



Ej. $\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{t\to 0^+}\big[\frac{1}{t}-1\big]$ no existe (la integral impropia diverge).

$\int_{0^+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{t\to 0^+}[2-2\sqrt{t}\,] = 2$, converge (y su valor es 2).

En general, se ve fácil que $\boxed{\int_{a^+}^b \frac{dx}{[x-a]^s} \text{ e } \int_c^{a^-}\frac{dx}{[a-x]^s} \text{ convergen si } s<1 \text{ y divergen si } s\geq 1.}$

$\big($ $[x-a]^s$ tiene sentido para $x<a$ si $s=\frac{1}{3},\frac{2}{7},\ldots$; si $s=\frac{1}{2}$ ó $s=\pi$ la función no está definida$\big)$.

Para este otro tipo de impropias existen criterios de convergencia totalmente análogos a los vistos para las del primer tipo. Resumiendo (las de a^+) y sin demostraciones:

Teorema:

Si $0\leq f\leq g$ en $(a,b]$, $\int_{a^+}^b g$ convergente $\Rightarrow$ $\int_{a^+}^b f$ convergente e $\int_{a^+}^b f\leq\int_{a^+}^b g$.

Sean f, $g\geq 0$ en $(a,b]$ y sea finito el $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=c$, entonces:

si $c>0$, $\int_{a^+}^b g$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_{a^+}^b f$ converge; si $c=0$, $\int_{a^+}^b g$ converge $\Rightarrow$ $\int_{a^+}^b f$ converge.

$\int_{a^+}^b |f|$ convergente $\Rightarrow$ $\int_{a^+}^b f$ convergente.

Ej. $\int_{0^+}^1 \frac{\cos^2 x}{x^{3/4}}\,dx$ converge, pues $0\leq\frac{\cos^2 x}{x^{3/4}}\leq\frac{1}{x^{3/4}}$ e $\int_{0^+}^1\frac{1}{x^{3/4}}$ converge $\big($o porque $\frac{\cos^2 x/x^{3/4}}{1/x^{3/4}}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}1\big)$.

Ej. $\int_{2^+}^7 \frac{dx}{x^3-8}$ diverge, pues se parece cerca de $x=2$ a $\int_{2^+}^7\frac{dx}{x-2}$ divergente:

$\frac{1/[x^3-8]}{1/[x-2]}=\frac{1}{x^2+2x+4}\underset{x\to 2}{\longrightarrow}\frac{1}{12}$ (o usando L'Hôpital).

Ej. $\int_{0^+}^3\frac{dx}{\operatorname{sen}x}$. Cerca de 0 el $\operatorname{sen}x\sim x$: $\frac{1/\operatorname{sen}x}{1/x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1$. Como $\int_{0^+}^3\frac{dx}{x}$ diverge, la dada diverge.

Ej. La $\int_{0^+}^\infty\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}dx$ de antes, no plantea problemas en $x=0$, a pesar de anularse su denominador, pues se parece cerca de 0 a $\sqrt{x}$ que no sólo converge, es continua.

Ej. $\int_{0^+}^1(\log x)^2dx$ es convergente, pues $\frac{(\log x)^2}{1/\sqrt{x}}=(x^{1/4}\log x)^2\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$ (lo sabemos desde 4.5), con lo que la nuestra es más pequeña que una convergente. Y podemos hallar su valor:

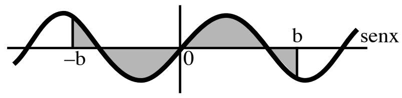
$\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx=x(\log x)^2-2x\log x+2x \Rightarrow \int_{0^+}^1(\log x)^2dx=2$.

Hay otras integrales que reúnen **más de un tipo de impropiedad**: $\int_{-\infty}^{\infty}$, $\int_{a^+}^{\infty}$, $\int_{a^+}^{b^-}$, ...
Cada integral de estas se dice convergente si, dividido el intervalo en subintervalos tales que en cada uno de ellos haya una única impropiedad, **todas** las integrales resultantes convergen. Por ejemplo, si f es continua en todo $\mathbf{R}$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f \text{ e } \int_{0}^{\infty} f \text{ convergen y su valor es } \int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f}$$

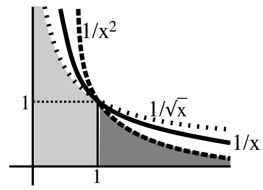
[esta integral no se define como $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f$ que podría existir a pesar de ser $\int_{-\infty}^{\infty} f$ divergente; a ese límite de las integrales calculadas en intervalos simétricos $[-b,b]$, si existe, se le llama valor principal de Cauchy de la integral y aparece en matemáticas más avanzadas].

Ej. $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx$ diverge, pues $\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} [1-\cos b]$ no existe (y tampoco existe $\int_{-\infty}^{0} \operatorname{sen} x\, dx$).
[Sí existe el valor principal de Cauchy:
$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \operatorname{sen} x\, dx = 0$ ($\operatorname{sen} x$ es impar)].

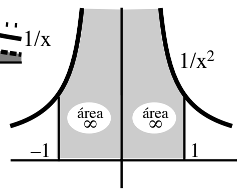


Ej. $\int_{0^+}^{\infty} \frac{\arctan x}{x+x^2}$. $\int_{1}^{\infty}$ es convergente pues comporta como $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ convergente $\left[\frac{\arctan x/x+x^2}{1/x^2} \underset{x\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2} \right]$.
Cerca de 0 : $\frac{\arctan x}{x+x^2} \sim \frac{1}{1+x}$ con límite finito $\Rightarrow \int_{0^+}^{1}$ converge.
Como convergen las dos, $\int_{0^+}^{\infty}$ converge.

Ej. $\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \int_{0^+}^{1} + \int_{1}^{\infty}$ diverge $\forall s$:
Si $s>1$ converge la de ∞ , pero diverge la de 0^+, si $s<1$ ocurre al revés y si $s=1$ divergen ambas.



Ej. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ no es una integral normal y ni siquiera existe como impropia, pues no convergen ni $\int_{-1}^{0}$ ni $\int_{0}^{1}$.
(Tampoco existe el VP de Cauchy de la impropia, definido en estos casos por $\lim\limits_{b\to 0} \left[\int_{-1}^{-b} f + \int_{b}^{1} f\right]$).



Ej. $\int_{1^+}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$. $\int_{1^+}^{2}$ converge (pues $\frac{x}{\sqrt{x-1}\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \underset{1^+}{\sim} \frac{x}{2\sqrt{x-1}}$), pero $\int_{2}^{\infty}$ diverge (pues $\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}$).
Por tanto, la inicial diverge (insistimos en que deben converger las dos para ser convergente).

Ej. $\int_{0^+}^{\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx$ converge, pues lo hacen $\int_{0^+}^{1}$ (tiene límite en $x=0$) e $\int_{1}^{\infty}$ (es $0 \le \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$).

Ej. $\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. En $x=0$ converge si y sólo si $x>0$ (pues se parece a $\int_{0}^{\infty} t^{x-1} dt$).
En ∞ converge siempre: $\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{-2}} \frac{t^{x+1}}{e^t} \underset{t\to\infty}{\to} 0\, \forall x$ e $\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. La $\int_{0}^{\infty}$ inicial converge $\forall x>0$.
La $\Gamma(x)$ (**función gamma**) definida por esta impropia generaliza el factorial:

$$\Gamma(x+1) = \int_{0}^{\infty} t^x e^{-t} dt \overset{\text{partes}}{=} -t^x e^{-t}\big]_0^{\infty} + x\int_{0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t} = x\Gamma(x) \;\Rightarrow\; \text{si } n \in \mathbf{N},$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n!\,, \text{ pues } \Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} dt = 1\,.$$

Ej. $\int_{0^+}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^3 \log x} dx$. Plantea problemas en 0^+, $1^{\pm}$, ∞ . Para converger, deben hacerlo las cuatro.
Analizamos todas. En 0^+ : $\sim \int_{0^+}^{1/2} \frac{dx}{x\log x} = \log(|\log x|)\big]_t^{1/2} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ (diverge).
En $1^{\pm}$: $\sim \int \frac{dx}{\log x} \sim \int \frac{dx}{x-1}$ (divergen ambas). En ∞ : $\le \int \frac{dx}{x^3}$ (converge).

5.5. Integración aproximada

Como sabemos, funciones integrables pueden no tener primitivas elementales o exigir un cálculo muy largo. Pero en muchas ocasiones, sólo se necesita el **valor aproximado** de una integral definida (en otras, simplemente, **cotas** de dicha integral). Las U_n y L_n de 5.1 (y algún teorema con desigualdades visto en ella) nos daban ya alguna (mala) estimación, pero será más preciso utilizar **series de Taylor** o utilizar las fórmulas sencillas (sobre todo para los ordenadores) de los **trapecios** o de **Simpson** que veremos al final de esta sección.

Integración de series de Taylor.

Estas series se podían derivar término a término (en el intervalo de convergencia). Veamos que también se pueden integrar término a término en ese intervalo (de nuevo como si se tratasen de 'polinomios infinitos'). Esto será consecuencia de los siguientes resultados:

Teorema: Sea $\{f_n\}$ sucesión de funciones continuas que converge **uniformemente** hacia f en $[a,b]$. Entonces $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe un N tal que si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x \in [a,b]$.

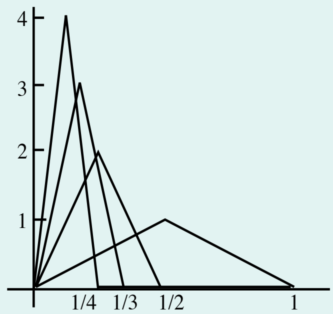
Si $n \geq N$, $\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon$.

Este resultado es **falso** si la sucesión de funciones converge sólo puntualmente (el límite de las integrales puede ser distinto de la integral del límite) como para la siguiente $\{f_n\}$:

Ej. $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x\,,\ 0 \leq x \leq 1/2n \\ 2n - 2n^2x\,,\ 1/2n \leq x \leq 1/n \\ 0\,,\ 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$.

La gráfica de cada f_n es un triángulo isósceles de altura n sobre el intervalo $[0, \frac{1}{n}]$ y vale 0 en el resto de $[0,1]$; el área encerrada por cada f_n es $\frac{1}{2}$ para todo n. El límite puntual de las f_n es $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ ya que para cada x, a partir de un N todas las $f_n(x) = 0$ y $f_n(0) = 0\ \forall n$. Está claro que $\{f_n\}$ no converge uniformemente y que se tiene:

$$0 = \int_0^1 f_n \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f = \tfrac{1}{2} .$$



Como consecuencia inmediata de lo anterior, tenemos que:

Teorema:

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge **uniformemente** hacia f en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$

Ej. Como $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ converge uniformemente en todo **R**, es $\int_0^\pi f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{[2n-1]^3}$.

Y en el caso particular de las series de potencias concluimos:

Teorema: Si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < R \Rightarrow$

$\int_0^x f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots$ si $|x| < R$.

Pues en $[-x,x]$ sabemos que la serie converge uniformemente.

[Fuera de $(-R,R)$ la serie no convergerá y no servirá para aproximar niguna integral].

$\Big[$El conjunto de primitivas de f será, desde luego: $\int f(x)\,dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots\Big]$.

Ej. Calculemos aproximadamente $\boxed{\int_0^1 \operatorname{sen} x^2 dx}$ (función sin primitiva elemental). Tenemos que:

$$\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt = \int_0^x [t^2 - \tfrac{1}{3!}t^6 + \tfrac{1}{5!}t^{10} - \tfrac{1}{7!}t^{14} + \cdots]dt = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{42}x^7 + \tfrac{1}{1320}x^{11} - \tfrac{1}{75600}x^{15} + \cdots \ \forall x$$

$$\to \int_0^1 \operatorname{sen} t^2 dt = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{1320} - \tfrac{1}{75600} + \cdots$$

y podemos aproximar la integral con las sumas parciales de esta serie alternada decreciente:

$$\int_0^1 \approx \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} \approx 0.3095 \quad \text{con error menor que } \tfrac{1}{1320} \approx 0.0007 < 10^{-3}$$

$$\int_0^1 \approx \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{1320} \approx 0.310281 \quad \text{con error menor que } \tfrac{1}{75600} \approx 0.000013 \sim 10^{-5}$$

$$\int_0^1 \approx \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{1320} - \tfrac{1}{75600} \approx 0.310268158 \quad \text{con error menor que } \tfrac{1}{9!\cdot 19} \approx 0.000000145 \sim 10^{-7}$$

La misma serie de potencias nos da la integral para cualquier otro x. Por ejemplo, si $x = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{1/2} \operatorname{sen} t^2 dt = \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{5376} + \tfrac{1}{2703360} - \tfrac{1}{2477260800} + \cdots$$ (converge mucho más rápidamente, pues cerca de $x=0$ se parece más el desarrollo).

También vemos que si $x=\sqrt{2\pi}$ (≈ 2.51) la integral es positiva (como sospechábamos en 5.2):

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sen} t^2 dt = \tfrac{[2\pi]^{2/3}}{3}\left[1 - \tfrac{2\pi^2}{7} + \tfrac{2\pi^4}{55} - \tfrac{4\pi^6}{1575} + \cdots\right] \approx 5.24\,[1 - 2.82 + 3.54 - 2.44 + 1.06 - 0.31 + \cdots]$$

Las sumas parciales de la serie entre corchetes son: $1, -1.82, 1.72, -0.72, 0.34, 0.09, \ldots$ (todo va más lento ahora). Como es alternada decreciente (a partir de tercer término) su suma está entre dos sumas parciales consecutivas, con lo que la integral es > 0. [Para dar su valor con un error $< 10^{-2}$ se ve que hay que sumar 8 términos (dos más) y se obtiene 0.43].

Como disponemos de su desarrollo de Taylor, aparte de las anteriores aproximaciones, podemos realizar otras operaciones en la que aparezca la integral, como, por ejemplo, calcular algún límite indeterminado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt - x^4}{\arctan x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{[x^4 - \frac{1}{14}x^8 + \cdots] - x^4}{x^8 - \frac{1}{3}x^{24}} = \frac{\frac{1}{14}x^8 + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)} = -\frac{1}{14}$$

$\Big($Por L'H más largo: $\lim_{x\to 0}[1+x^{16}]\dfrac{3\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt + 3x \operatorname{sen} x^2 - 4x^3}{\arctan 8x^7} = \lim_{x\to 0} \dfrac{6 \operatorname{sen} x^2 + 6x^2 \cos x^2 - 12x^2}{\arctan 56x^6} = \cdots\Big)$.

Ej. Encontremos cotas racionales de $\boxed{I = \int_0^1 g}$ si $\boxed{g(x) = x^2 e^{-x^2}}$ (de primitiva no calculable).

Las cotas más sencillas, pues claramente $0 \le g(x) \le 1$, son $0 = \int_0^1 0 \le I \le \int_0^1 1 = 1$.

Podemos mejorar la cota superior hallando el máximo de g en $[0,1]$:

$$g'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2} \Rightarrow \text{ máximo si } x=1 \text{ y } g(1)=e^{-1} \Rightarrow I \le \int_0^1 e^{-1} \le e^{-1} \overset{e>2.7}{<} \tfrac{10}{27}.$$

Si comparamos en $[0,1]$ con diversas funciones integrables:

$$g(x) \le x^2 \Rightarrow I \le \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3} \text{ (mejor que la anterior)}$$

$$g(x) \le xe^{-x^2} \Rightarrow I \le -\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}[1-e^{-1}] \overset{e<2.8}{<} \tfrac{1}{2}[1-\tfrac{10}{28}] = \tfrac{9}{28} \text{ (aún menor)}$$

$$g(x) \le x^2 e^{-x^3} \Rightarrow I \le -\tfrac{1}{3}e^{-x^3}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3}[1-e^{-1}] < \tfrac{1}{3}[1-\tfrac{10}{28}] = \tfrac{3}{14} \text{ (más pequeña aún)}$$

$$g(x) \ge x^2 e^{-x} \Rightarrow I \ge \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \underset{\text{partes}}{=} -[x^2+2x+2]e^{-x}\Big]_0^1 = 2 - 5e^{-1} > 2 - \tfrac{50}{27} = \tfrac{4}{27}$$

Pero si queremos obtener cotas con la precisión que necesitemos, lo mejor es usar Taylor:

$$I = \int_0^1 \left[x^2 - x^4 + \tfrac{1}{2}x^6 - \tfrac{1}{6}x^8 + \cdots\right] dx = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{54} + \cdots \ \forall x$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = \tfrac{2}{15} < \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{54} = \tfrac{176}{945} < \cdots < I < \cdots < \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{14} = \tfrac{43}{210} < \tfrac{1}{3}.$$

La cota inferior $\frac{2}{15}$ es peor que la obtenida comparando, pero $\frac{176}{945} > \frac{4}{27}$ ya la mejora.

Y la superior $\frac{43}{210}$ es más pequeña que la menor de las anteriores: $\frac{43}{210} < \frac{3}{14}$.

[Con un ordenador se consigue mucha precisión ($I \approx 0.189472$), nosotros hemos conseguido sólo deducir que $\frac{176}{945} \approx 0.186 < I < \frac{43}{210} \approx 0.205$; pero nos costaría poco sumar más términos].

Ej. Si $\boxed{h(x)=\frac{2x}{8-x^2}}$, hallemos racionales que aproximen $\boxed{I=\int_0^1 h}$ con error menor que 10^{-2}.

Parece inútil aproximarla si podemos fácilmente dar el valor exacto: $I=-\log|8-x^2|\big]_0^1=\log\frac{8}{7}$.

El problema es que, sin calculadora, no sabemos el valor de ese logaritmo. Pero por Taylor:

$$\log\left(1+\tfrac{1}{7}\right)=\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{2\cdot 49}+\tfrac{1}{3\cdot 243}-\cdots \text{ serie de Leibniz } \to I\approx\tfrac{13}{98}\text{ , con error } < \tfrac{1}{729}<10^{-2}\ .$$

Podríamos también desarrollar primero el integrando y luego integrar la serie:

$$\frac{2x}{8-x^2}=\frac{x}{4}\frac{1}{1-x^2/8}=\frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^2}{8}\right]^n=\frac{x}{4}+\frac{x^3}{32}+\frac{x^5}{256}+\cdots\to I=\frac{1}{8}+\frac{1}{128}+\frac{1}{1536}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n8^n}\ .$$

El problema de esta serie (que, desde luego, debe sumar lo mismo) es que no es alternada, lo que hace menos fácil y mecánico estimar los errores.

Sumando dos términos $I\approx\frac{17}{128}$, el error cometido es $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n8^n}<\frac{1}{3\cdot 8^3}\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{1}{8}\right]^n=\frac{1}{3\cdot 7\cdot 8^2}<10^{-2}$.

Ej. Dibujar la gráfica de $\boxed{r(x)=\frac{x-1}{x^4+1}}$ y hallar, si existen, los x en los que la función $\boxed{R(x)=\int_0^x r}$, con $x\in[0,\infty)$, alcanza sus extremos.

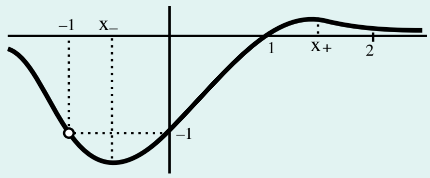
$r\in C^\infty(\mathbf{R})$. $r(x)\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$. $r(x)\gtrless 0$ si $x\gtrless 1$. $r'(x)=-\frac{3x^4-4x^3-1}{[x^4+1]^2}$, $r''(x)=-\frac{4x^2[3x^5-5x^4-5x+3]}{[x^4+1]^3}$.

$P=3x^4-4x^3-1$ tiene 1 raíz positiva x_+ $[+--]$ y 1 negativa x_- $[++-]$.

$P(-1)=6$, $P(0)=-1$, $P(1)=-2$, $P(2)=15$ $\Rightarrow$ $x_-\in[-1,0]$ y $x_+\in[1,2]$

$\Rightarrow$ r decrece hasta x_- , crece hasta x_+ y decrece a partir de entonces.

$x=-1$ inflexión; en $x=0$ no hay (no cambia de signo r''); los otros puntos de inflexión los darían las raíces (ya no hay más enteras y negativas sólo la -1) de $3x^4-8x^3+8x^2-8x+3$ $\big($se pueden hallar haciendo $z=x+\frac{1}{x}$ $\big)$.



Valores: $r(-2)=-\frac{3}{17}$, $r(2)=\frac{1}{17}$,

$r(-1)=-1$, $r(0)=-1$ (Rolle confirma x_-);

$r'(-1)=-\frac{3}{2}$, $r'(0)=1$ (otra vez x_-),...

A la vista de la gráfica de r : R decrece si $0\leq x\leq 1$ [añadimos áreas negativas] y luego crece [lo mismo se deduce del signo ya analizado de $R'(x)=r(x)$]. El **mínimo** se da, pues, si $x=1$.

Aproximemos el valor de $R(1)$ desarrollando por Taylor el integrando, que si $|x|<1$ es:

$$[x-1][1-x^4+x^8-\cdots]=-1+x+x^4-x^5-x^8+\cdots\overset{?}{\to}I_1=-1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{13}+\cdots$$

En principio, quizás no podamos integrar hasta 1 , pero parece ir bien, pues la serie converge:

$$S_1=-1<S_5\approx-0.578<\cdots<I_1<\cdots<S_7\approx-0.401<S_3=-0.3$$

Podría no haber máximo de R en $[0,\infty)$. Si $\int_1^\infty$ fuese divergente (que no lo es, pues $r(x)\sim x^{-3}$ en el ∞), la R tendería a ∞; si fuese convergente y tendiese a un valor $I_2>|I_1|$, R tendería hacia $I_1+I_2>0$ (valor que no alcanzaría); y si converge hacia un $I_2<|I_1|$ entonces el máximo se alcanza en $x=0$ (y vale $R(0)=0$). Veamos que esto último es lo que sucede realmente:

$r\geq 0$ en $[1,\infty)$. El criterio de comparación por desigualdades da cotas fáciles de la impropia:

$$I_2\equiv\int_1^\infty r<\int_1^\infty\frac{x}{x^4+1}=\left[\arctan x^2\right]_1^\infty=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right]=\tfrac{\pi}{8}<0.4\text{ , o bien:}$$

$$I_2<\int_1^\infty\frac{x-1}{x^4}=\left[\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{6}<0.17\text{ , bastante mejor cota.}$$

$$R(x)\underset{x\to\infty}{\to}\int_0^1 f+\int_1^\infty f=I_1+I_2<0\text{, según las cotas halladas } \Rightarrow \text{ el **máximo** es } R(0)\ .$$

[Con esfuerzo podemos hallar la primitiva R (el denominador lo factorizamos en 1.5):

$$R(x)=\int_0^x\frac{t\,dt}{[t^2+\sqrt{2}t+1][t^2-\sqrt{2}t+1]}=\cdots=\arctan x^2-\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\right]$$

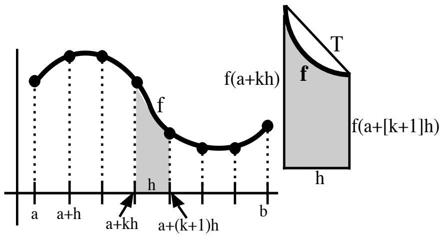
y el valor exacto de ambas integrales. Con calculadora obtenemos: $I_1\approx-0.474$, $I_2\approx 0.149$].

Fórmulas de los trapecios y de Simpson.

Para aplicar cualquiera de estos dos métodos no necesitamos la expresión analítica de f; nos bastan algunos de sus valores [situación que experimentalmente se presenta a menudo].

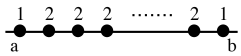
Trapecios:

Dividimos $[a,b]$ en n partes iguales de anchura $\frac{b-a}{n}=h$.
Como aproximación de $\int_{a+kh}^{a+[k+1]h} f$ tomamos el área del trapecio T de la figura: $\frac{h}{2}[f(a+kh)+f(a+[k+1]h)]$.
Entonces $\int_a^b f$ será aproximadamente igual a la suma de las áreas del los n trapecios:



$$\int_a^b f \approx \tfrac{h}{2}[f(a)+f(a+h)]+\tfrac{h}{2}[f(a+h)+f(a+2h)]+\cdots+\tfrac{h}{2}[f(a+[n-1]h)+f(a+nh)] \,,$$

$$\boxed{\int_a^b f \approx \tfrac{h}{2}\big[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\cdots+2f(a+[n-1]h)+f(b)\big]}$$



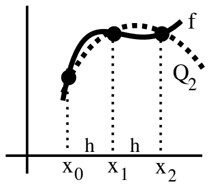
Simpson:

Una aproximación mejor se tendrá si, dividido $[a,b]$ en un número par $n=2m$ de partes iguales de longitud $h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}$, en vez de sustituir cada trozo de f por una recta, la sustituimos por la parábola que interpola la gráfica de f en tres puntos consecutivos:

$x_0=a+kh$, $x_1=a+[k+1]h=x_0+h$ y $x_2=a+[k+2]h=x_0+2h$,

es decir, por el polinomio: $Q_2(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_1)$,

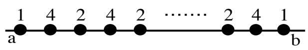
con: $A_0=f(x_0)$, $A_1=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]$, $A_2=\frac{1}{2h^2}[f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)]$.



Integrando Q_2 se tiene tras algunos cálculos:

$$\int_{a+kh}^{a+[k+2]h} f \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} Q_2(x)dx = 2hA_0+2h^2A_1+\tfrac{2}{3}h^3A_1 = \tfrac{h}{3}\big[f(x_0)+4f(x_0+h)+f(x_0+2h)\big]$$

Y sumando las m integrales anteriores obtenemos:



$$\boxed{\int_a^b f \approx \tfrac{h}{3}\big[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+2f(a+4h)+\cdots+4f(a+[n-1]h)+f(b)\big]}$$

Si se quiere utilizar con seriedad un método numérico se debe hablar del error cometido. Demos algún resultado sin demostración. La estimación por trapecios es exacta si $f(x)$ es una recta, función con $f''=0$. No es de extrañar que el error dependa de f''. Puede probarse que:

Si $|f''(x)|\leq M_2$ para $x\in[a,b]$ entonces: $\boxed{|\text{error}|\leq \frac{1}{12}(b-a)M_2h^2}$

Se prueba que Simpson es exacto si $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ y que:

Si $|f^{(4)}(x)|\leq M_4$ para $x\in[a,b]$ entonces: $\boxed{|\text{error}|\leq \frac{1}{180}(b-a)M_4h^4}$

Se ve que ambos métodos mejoran, como era esperable, cuando $h\to 0$, más rápidamente Simpson ya que h^4 tiende más fuertemente a 0 que h^2. Como las cuentas a realizar en ambos casos son casi las mismas, será mejor acudir a Simpson si tenemos que aproximar una integral (hay métodos mucho mejores, pero también más complicados).

Ej. Poco práctico, para comparar y ver si funcionan los métodos. Aproximemos $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ $(=\pi)$:

Trapecios: $h=\frac{1}{2}$, $n=2$: $\int_0^1 \approx \frac{4}{4}\big[1+2\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\big]=\frac{31}{10}=3.1$

$h=\frac{1}{4}$, $n=4$: $\int_0^1 \approx \frac{4}{8}\big[1+2\frac{16}{17}+2\frac{4}{5}+2\frac{16}{25}+\frac{4}{5}\big]\approx 3.1312$

Simpson: $h=\frac{1}{2}$, $n=2$: $\int_0^1 \approx \frac{4}{6}\big[1+4\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\big]=\frac{47}{15}\approx 3.13$

$h=\frac{1}{4}$, $n=4$: $\int_0^1 \approx \frac{4}{12}\big[1+4\frac{16}{17}+2\frac{4}{5}+4\frac{16}{25}+\frac{4}{5}\big]\approx 3.14157$

Comparemos ahora los números que nos da trapecios y Simpson con los obtenidos por otros caminos en los ejemplos anteriores de esta sección:

Ej. Calculemos aproximadamente $\boxed{\int_0^1 \operatorname{sen} x^2 dx}$ (ya estimada utilizando Taylor):

$h=\frac{1}{2}$ **T.** $\int_0^1 \approx \frac{1}{4}[0+2\operatorname{sen}\frac{1}{4}+\operatorname{sen}1] \approx 0.334$ **S.** $\int_0^1 \approx \frac{1}{6}[0+4\operatorname{sen}\frac{1}{4}+\operatorname{sen}1] \approx 0.305$

$h=\frac{1}{4}$ **T.** $\int_0^1 \approx \frac{1}{8}[0+2\operatorname{sen}\frac{1}{16}+2\operatorname{sen}\frac{1}{4}+2\operatorname{sen}\frac{9}{16}+\operatorname{sen}1] \approx 0.316$
S. $\int_0^1 \approx \frac{1}{12}[0+4\operatorname{sen}\frac{1}{16}+2\operatorname{sen}\frac{1}{4}+4\operatorname{sen}\frac{9}{16}+\operatorname{sen}1] \approx 0.3099$

$h=\frac{1}{6}$ **T.** $\int_0^1 \approx \frac{1}{12}[0+2\operatorname{sen}\frac{1}{36}+2\operatorname{sen}\frac{1}{9}+\cdots+\operatorname{sen}1] \approx 0.313$
S. $\int_0^1 \approx \frac{1}{18}[0+4\operatorname{sen}\frac{1}{36}+2\operatorname{sen}\frac{1}{9}+\cdots+\operatorname{sen}1] \approx 0.310205$

$h=\frac{1}{100}$ **T.** $\int_0^1 \approx 0.3105$ **S.** $\int_0^1 \approx 0.3102683009$

$h=\frac{1}{1000}$ **T.** $\int_0^1 \approx 0.31026839$ **S.** $\int_0^1 \approx 0.3102683017$

[estos últimos valores exigen, desde luego, o una enorme paciencia o un ordenador].

Como $f''(x)=2\cos x^2-4x^2\operatorname{sen}x^2$, $f^{(4)}(x)=(16x^4-12)\operatorname{sen}x^2-48x^2\cos x^2$, en $[0,1]$ es
$|f''|\le 6$, $|f^{(4)}|\le 4|4x^4-3|+|48x^2|\le 60 \to |\text{error}\,\mathbf{T}|\le \frac{1}{2}h^2$; $|\text{error}\,\mathbf{S}|\le \frac{1}{2}h^4$

[Para aproximar la integral de 5.2, $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sen}t^2dt$, Simpson con $n=2$ y $n=4$ da, respectivamente, 1.67 (la gráfica se parece muy poco a una parábola) y 0.42].

Ej. Para otra integral aproximada con Taylor $\boxed{I=\int_0^1 x^2 e^{-x^2}dx}$, Simpson da muy buenos resultados:

$$n=2 \;\to\; I\approx \tfrac{1}{6}[0+e^{-1/4}+e^{-1}]\approx 0.191$$
$$n=4 \;\to\; I\approx \tfrac{1}{12}[0+\tfrac{1}{4}e^{-1/16}+\tfrac{1}{2}e^{-1/4}+\tfrac{9}{4}e^{-9/16}+e^{-1}]\approx 0.18951\text{].}$$

[Lo largo de Simpson es acotar el error (tampoco sabemos con Taylor si sale serie no alternada)].

Ej. Hallemos también con estos métodos algún racional que aproxime $\boxed{I=\int_0^1 h,\ h(x)=\frac{2x}{8-x^2}}$.

Probablemente Simpson daría un error $<10^{-2}$ con ya con $h=\frac{1}{2}$, pero necesitaríamos acotar la $h^{(4)}$,
lo que es largo. Probemos con Trapecios que hay que derivar menos:

$$h'=2\frac{8+x^2}{[8-x^2]^2}\ ,\ h''=4\frac{x[24+x^2]}{[8-x^2]^3} \to \text{ en } [0,1] \text{ es } |h''|\le\frac{100}{7^3}\to|\text{error}|\le\frac{100}{12\cdot 343}h^2\to$$
basta tomar $h=\frac{1}{2}\to I\approx\big[h(0)+2h(\tfrac{1}{2})+h(1)\big]=\frac{1}{4}\big[0+\frac{8}{31}+\frac{2}{7}\big]=\frac{59}{434}$ con error $<10^{-2}$.

Ej. Por último, aproximemos con Simpson $\boxed{I_1=\int_0^1 r}$, para la $\boxed{r(x)=\frac{x-1}{x^4+1}}$.

Tomemos $h=\frac{1}{2}$: $I_1\equiv\int_0^1 r\approx\frac{1}{6}\big[-1-\frac{4\cdot 8}{17}+0\big]=-\frac{49}{102}\approx-0.480$ (sin cota del error).

Número coherente con las cotas que calculamos con Taylor:
$$S_5\approx-0.578<\cdots<I_1<\cdots<S_7\approx-0.401\,,$$
Y bastante similar al 'exacto' obtenido con la primitiva y utilizando la calculadora: $I_1\approx-0.474$.

5.6. Aplicaciones

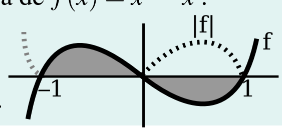
Áreas planas

Ya vimos que la integral no es exactamente un área, sino una suma de áreas con signo. Por tanto, para hallar el área encerrada entre el eje $y=0$ y la gráfica de una función f habrá que sumar las integrales de f en los intervalos en que esté por encima del eje y restar las integrales cuando f quede por debajo. Esto es equivalente a integrar $|f|$. Así:

Ej. Hallar el área de la región encerrada entre el eje horizontal y la gráfica de $f(x)=x^3-x$.

Área = $\int_{-1}^{1}|f|=\int_{-1}^{0}f-\int_0^1 f \underset{\text{f impar}}{=} -2\int_0^1 f=2\int_0^1(x-x^3)dx=\frac{1}{2}$

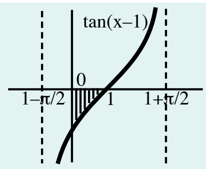
$\big[$la $\int_{-1}^{1}f$ (que es 0 por ser f impar) no representa el área sombreada$\big]$.



Ej. Determinar el área de la región acotada por los ejes y la gráfica de $h(x)=\tan(x-1)$ [la de $\tan x$ trasladada una unidad a la derecha].

Área $=\int_0^1|h|=-\int_0^1\tan(x-1)dx=\log|\cos(x-1)|\,\big]_0^1=-\log(\cos 1)>0$

(porque $\cos 1<1$; las áreas deben salir siempre positivas).



Más en general, el **área comprendida entre las gráficas de f y g en el intervalo** $[a,b]$

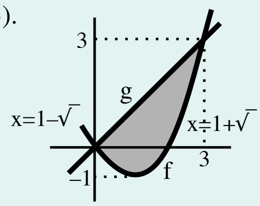
viene dada por $\boxed{\int_a^b|f-g|}$.

Ej. Determinar el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=x$.

Las gráficas se cortan si $x^2-2x=x \Leftrightarrow x=0\ (y=0)$ ó $x=3\ (y=3)$.

En $[0,3]$ la gráfica de g está por encima de la de f , por tanto:

$$A=\int_0^3[g-f]=\int_0^3(3x-x^2)dx=\frac{9}{2}\,.$$



O bien de otra forma (más complicada en este caso, pero mejor en otros), integrando respecto a y: $y=x^2-2x\leftrightarrow x=1\pm\sqrt{1+y}\ \to$

$$A=\int_{-1}^{0}\left[1+\sqrt{1+y}-(1-\sqrt{1+y})\right]dy+\int_0^3\left[1+\sqrt{1+y}-y\right]dy$$

$$=\left[\tfrac{4}{3}(1+y)^{3/2}\right]_{-1}^{0}+\left[y+\tfrac{2}{3}(1+y)^{3/2}-\tfrac{y^2}{2}\right]_0^3=\tfrac{9}{2}\,.$$

Ej. Hallar (sin calculadora) con un error menor que 0.04 el valor aproximado del área de la región acotada por la gráfica de $h(x)=\arctan x^2$ y la recta $y=\frac{\pi}{4}$.

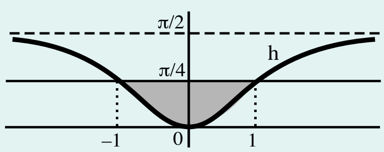
h par , $h \underset{|x|\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$, $h'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$ (crece si $x>0$) $\to$

corta $y=\frac{\pi}{4}$ si $x=\pm 1$ $\to$ Área $=\frac{\pi}{2}-2\int_0^1\arctan(x^2)dx$.

Hallar la primitiva es posible pero largo:

$\int\arctan(x^2)dx=x\arctan(x^2)-\int\frac{2x^2dx}{1+x^4}=\cdots$

[y los log y arctan del resultado no podríamos evaluarlos sin calculadora].



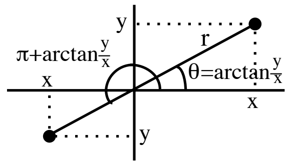
Trapecios o Simpson dan valores desconocidos del arctan (y sería largo acotar el error). Mejor es integrar el desarrollo de Taylor [se puede llegar hasta $x=1$] y usar la serie alternada que sale:

$$2\int_0^1\left[x^2-\tfrac{1}{3}x^6+\tfrac{1}{5}x^{10}-\tfrac{1}{7}x^{14}+\cdots\right]dx=\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{21}+\tfrac{2}{55}-\cdots\approx\tfrac{4}{7}\ ,\ \text{con error} <\tfrac{2}{55}<\tfrac{2}{50}=0.04\,.$$

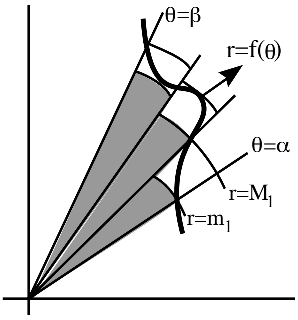
Por tanto, Área $\approx 1.571-0.571=1.00$ con error <0.04 (con ordenador: Área ≈ 0.974991).

Áreas en coordenadas polares.

Un punto P del plano de coordenadas cartesianas (x,y) se puede describir además por un par de coordenadas polares (r,θ) siendo r la distancia de P al origen y θ el ángulo en radianes comprendido entre el semieje de las x positivas y la semirrecta que une el origen con P. Unas coordenadas se pueden obtener de otras utilizando que:

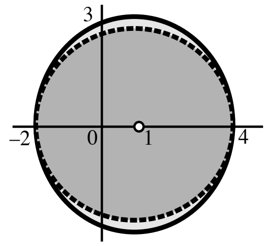


$$x=r\cos\theta,\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \leftrightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \theta=\arctan\tfrac{y}{x}\ [+\pi]\text{, si }\theta\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\ \big[\theta\in(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2})\big].$$



Para hallar el área de una región R como la del dibujo, acotada por las semirrectas $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ y la curva $r=f(\theta)$, con $f(\theta)\geq 0$, dividamos el ángulo $\beta-\alpha$ en n partes iguales (de longitud $\Delta\theta$). Como el área de un sector circular de radio r y ángulo θ es $r^2\theta/2$, si m_k y M_k son el mínimo y el máximo de $f(\theta)$ en cada sectorcillo, se tiene que el área de cada uno de ellos está comprendida entre $m_k^2\Delta\theta$ y $M_k^2\Delta\theta \to \sum m_k^2\Delta\theta \leq$ área de $R \leq \sum M_k^2\Delta\theta$. Como estas son las sumas inferior y superior de f^2 en $[\alpha,\beta]$ deducimos que:

$$\text{Área de R} = \boxed{\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big[f(\theta)\big]^2 d\theta}\ .$$



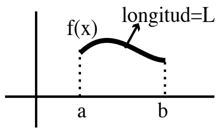
Ej. Hallar el área de la región acotada por la curva $r=3+\cos\theta$.

$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[3+\cos\theta]^2 d\theta=\int_0^{\pi}[\frac{19}{2}+6\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta]d\theta=\frac{19\pi}{2}$.

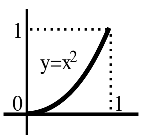
R no es el círculo de centro $(1,0)$ y radio 3, con área 9π y expresión en polares: $r^2-2r\cos\theta-8=0 \to r=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta}$; la curva dada en cartesianas es muy complicada: $x^2+y^2-x=3\sqrt{x^2+y^2}$.

De forma similar a las del área en polares se prueban las otras fórmulas de la sección:

Longitud de la gráfica de f en el intervalo $[a,b]$: $\boxed{L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$.



(Lo natural es probar la fórmula estudiando las 'integrales de línea').

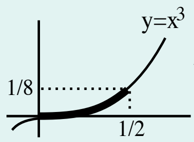


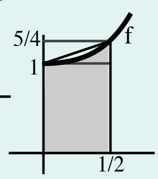
Ej. Hallar la longitud del tramo de parábola $y=x^2$ que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

$L=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\Big[u=2x+\sqrt{1+4x^2}\Big]=\frac{1}{8}\int_1^{2+\sqrt{5}}\frac{[1+u^2]^2}{u^3}du=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\log(2+\sqrt{5})}{4}\approx 1.48$

Ej. Probar que la longitud L del tramo de $y=x^3$ que une $(0,0)$ y $(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ cumple $\frac{1}{2}<L<\frac{9}{16}$.

$y'=3x^2 \to L=\int_0^{1/2}\sqrt{1+9x^4}\,dx$ (primitiva no calculable).





$f(x)\equiv[1+9x^4]^{1/2}=1+\frac{9}{2}x^4-\frac{81}{8}x^8+\cdots$ si $|9x^4|<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\to L=[x+\frac{9}{10}x^5-\frac{9}{8}x^9+\cdots]_0^{1/2}=\frac{1}{2}+\frac{9}{320}-\frac{9}{4096}+\cdots$,

[válido por estar $[0,1/2]$ dentro del intervalo de convergencia]. La serie de L es decreciente y alternada a partir de segundo término

$\to \frac{1}{2}=S_1<S_3<\cdots<L<\cdots<S_2=\frac{169}{320}<\frac{9}{16}$.

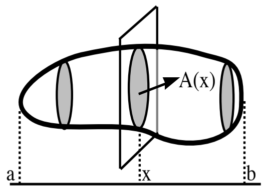
De otra forma (la integral puede describir el área limitada por f en $[0,1/2]$):

área rectángulo $=\frac{1}{2}<L$ área trapecio $=\frac{9}{16}$ [es fácil ver que f es convexa en ese intervalo].

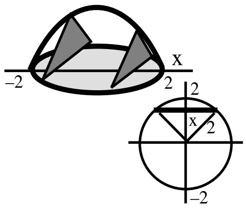
[La acotación $L>1/2$ era clara geométricamente antes de hacer ninguna cuenta].

Volúmenes (sencillos):

El instrumento natural para calcular volúmenes son las integrales múltiples del cálculo en varias variables, pero para hallar algunos bastan integrales de funciones de una variable.

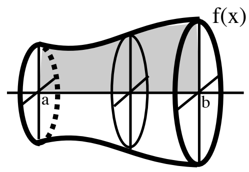


Volumen de un sólido que se extiende desde $x=a$ hasta $x=b$, **conocida el área** $A(x)$ **de cada sección plana**: $\boxed{V=\int_a^b A(x)dx}$



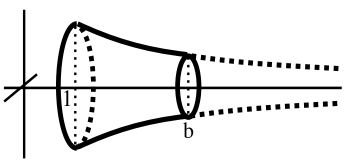
Ej. Un sólido tiene base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

$A(x)=$ área triángulo de base $2\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}(4-x^2)$, $V=2\int_0^2 A(x)dx=\frac{32\sqrt{3}}{3}$



En particular, volumen de un **sólido de revolución** engendrado al girar en torno al eje x la región comprendida entre la gráfica de f ($f(x)\geq 0$) y el eje x en $[a,b]$. El área de cada sección [círculo de radio $f(x)$] es

$A(x)=\pi[f(x)]^2$. Por tanto, $\boxed{V=\pi\int_a^b [f(x)]^2dx}$.



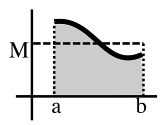
Ej. El volumen obtenido al girar la región determinada por $g(x)=\frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo $[1,b]$, $b>1$ es

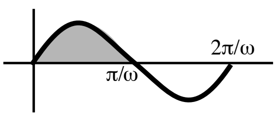
$V_b=\pi\int_1^b[\frac{1}{x}]^2dx=\pi[1-\frac{1}{b}]$. Observemos que $V_b \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} \pi$:

el volumen del sólido infinito es finito (impropia convergente).

Valor medio de una función en un intervalo; se define: $\boxed{M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$

(si $f\geq 0$, es la altura de un rectángulo de base $b-a$ y área igual a la limitada por la gráfica de f)





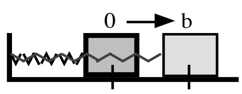
Ej. Hallar el valor medio de $f(x)=A\operatorname{sen}\omega x$ en el semiperiodo $[0,\frac{\pi}{\omega}]$:

$M=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\omega/\pi}A\operatorname{sen}\omega x\,dx=\frac{2A}{\pi}$ (el valor medio en $[0,\frac{2\pi}{\omega}]$ es 0).

Trabajo de una fuerza variable: un punto se mueve en el eje x sometido a una fuerza $f(x)$ función sólo de x. El trabajo realizado por f para mover el punto desde a hasta b es

$$\boxed{T=\int_a^b f(x)\,dx}$$

Ej. El trabajo preciso para estirar un muelle una longitud b desde su posición de equilibrio es $\int_0^b cxdx=\frac{1}{2}cb^2$.



Sea una varilla de densidad lineal variable $\rho(x)$ que ocupa desde a hasta b. Su **masa** m, su **centro de gravedad** x^* y su **momento de inercia** I respecto a 0 son:

$$\boxed{m=\int_a^b\rho(x)dx\ ,\ x^*=\int_a^b x\rho(x)dx\ ,\ I=\int_a^b x^2\rho(x)dx}$$

Distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[a,b]$ por un móvil de velocidad $v(t)$: $\boxed{D=\int_a^b v(t)dt}$.