resumen 1P (17-18)

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n\,,\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,.$$

$a<b \Rightarrow a+c<b+c\,,\ a-c<b-c$	$a/c<b/d \Leftrightarrow ad<bc$, si $a,b,c,d>0$
$a<b\,,\ c>0 \Rightarrow ac<bc\,,\ a/c<b/c$	$1<a \Rightarrow a<a^2\ ;\ \ 0<a<1 \Rightarrow a>a^2$
$a<b\,,\ c<0 \Rightarrow ac>bc\,,\ a/c>b/c$	$a<b \Leftrightarrow 1/a>1/b,\ a^2<b^2,\ \sqrt{a}<\sqrt{b}$, si $a,b>0$

$|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ -x, & x\le 0\end{cases}$

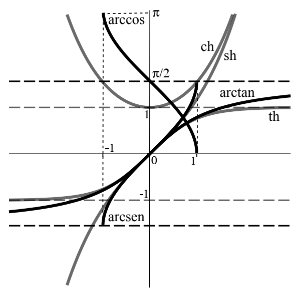
$|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a\,.\ |x|\ge a \Leftrightarrow x\le -a$ o $x\ge a\,.$
$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a\,.\ |x|>a \Leftrightarrow x<-a$ o $x>a\,.$

$|x\pm y|\le |x|+|y|$

$A\subset\mathbf{R}$ está acotado superiormente si existe $k\in\mathbf{R}$ (cota superior) tal que $a\le k$ para todo $a\in A$.
s supremo de A es la menor de sus cotas superiores. $M\in A$ máximo de A si $a\le M$, $\forall a\in A$.
Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee extremo superior.

f es inyectiva en $A\subset\mathbf{R}$ si $x\ne x^* \Rightarrow f(x)\ne f(x^*)$. Si f es inyectiva en A existe función inversa $f^{-1}: f(A)\to A$; $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. f estrictamente monótona en $A \Rightarrow f$ inyectiva en A.

$\log x\equiv\int_1^x \frac{dt}{t}\,,\ x>0$. e^x su inversa. $b^x\equiv e^{x\log b},\ b>0$. $x^b\equiv e^{b\log x},\ x>0$.
$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,,\ \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,,\ \mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\,,\ \mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1\,.\ 1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}\,,$
$\mathrm{sen}(a\pm b)=\mathrm{sen}\,a\cos b\pm\cos a\,\mathrm{sen}\,b\,,\ \cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b\,,$
$\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}\,,\ \mathrm{sen}^2a=\frac{1}{2}\big(1-\cos 2a\big)\,,\ \cos^2a=\frac{1}{2}\big(1+\cos 2a\big)\,.$



$5!=120\,,\ 6!=720\,,\ 7!=5040\,,\ 8!=40320\,,\ \sqrt{2}\approx 1.41\,,\ \sqrt{3}\approx 1.73\,,\ \sqrt{5}\approx 2.24\,.$
$e\approx 2.72\,.\ \pi\approx 3.14\,,\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\,,\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$

$z=a+ib=r(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)=re^{i\theta},\ r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}\,,\ \tan\theta=\frac{b}{a}\,,\ |e^{i\theta}|=1\ ;\ \bar z=a-ib\,,\ |z|^2=z\cdot\bar z\,.$
$w=c+id=se^{i\alpha}\to\frac{z}{w}=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}=\frac{r}{s}e^{i(\theta-\alpha)}.\ z^n=r^n e^{in\theta}.\ \sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\phi},\ \phi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\,,\ k=0,\dots,n-1\,.$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ si para todo $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbf{N}$ tal que para todo $n\ge N$ es $|a_n-a|<\varepsilon$.
$\{a_n\}$ diverge hacia $+\infty$ ($-\infty$) si $\forall K\ \exists N$ tal que $\forall n\ge N$ se cumple $a_n\ge K$ $\big(a_n\le K\big)$.

$\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ acotada.

$\{a_n\}$ monótona y acotada $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente.

Sean $\{c_n\}\to 0,\ \{b_n\}\to b,\ \{p_n\}\to p>0,\ \{q_n\}\to q<0,\ \{a_n\}$ acotada, $\{i_n\}\to\infty$. Entonces:
$\{a_n\pm i_n\}\to\pm\infty,\ \{c_n a_n\}\to 0,\ \{\frac{a_n}{i_n}\}\to 0,\ \{p_n i_n\}\to\infty,\ \{q_n i_n\}\to-\infty,\ \{\frac{i_n}{p_n}\}\to\infty,\ \{\frac{i_n}{q_n}\}\to-\infty,$
$\{p_n^{b_n}\}\to p^b\,,\ \{i_n^{p_n}\}\to\infty\,,\ \{i_n^{q_n}\}\to 0\,,\ \{p_n^{i_n}\}\to\begin{cases}\infty & \text{si } p>1\\ 0 & \text{si } 0<p<1\end{cases},\ \{(1+c_n)^{1/c_n}\}\to e\,,\ n^{1/n}\to 1\,.$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$
$\Leftrightarrow$ toda sucesión $\{a_n\}\subset\mathrm{dom}f-\{a\}$ con $\{a_n\}\to a$ satisface $\{f(a_n)\}\to L$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ $\big[\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L\big]$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists M$ tal que si $x>M$ $[x<M]\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ $[-\infty]$ si $\forall K\ \exists\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>K$ $[f(x)<K]$.

$x^a\log x\xrightarrow{x\to 0^+}0\,,\ \frac{(\log x)^b}{x^a}\xrightarrow{x\to\infty}0\,,\ \frac{x^b}{e^{ax}}\xrightarrow{x\to\infty}0\,,\ a,b>0\,.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(\frac{1}{x})=\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)\,.$

f continua en $[a,b]$ $\Rightarrow$ f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.
f continua en $[a,b]$ $\Rightarrow$ existen los valores máximo y mínimo de f en $[a,b]$.

g derivable en a y f derivable en $g(a)$ $\Rightarrow$ $f\circ g$ derivable en a y $(f\circ g)'(a)=f'[g(a)]\,g'(a)$.
f derivable en $f^{-1}(b)$ y $f'[f^{-1}(b)]\ne 0$ $\Rightarrow$ f^{-1} derivable en b y $(f^{-1})'(b)=1/f'[f^{-1}(b)]$.

$[\mathrm{sh}x]'=\mathrm{ch}x\,,\ [\mathrm{ch}x]'=\mathrm{sh}x\,,\ [\mathrm{th}x]'=1-\mathrm{th}^2x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}\ ;\ [\mathrm{arc\,sen}\,x]'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ [\mathrm{arc\,cos}\,x]'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$

f es $C^n(I)$, I intervalo abierto, si $f^{(n)}$ existe $\forall x\in I$ y es $f^{(n)}$ continua en I.
f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) $\Rightarrow$ $\exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Si f es continua en a y f' tiene límite cuando $x\to a$ $\Rightarrow$ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

resumen 2P (17-18)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r}$ si $|r|<1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[b_n-b_{n+1}]=b_1-\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\sum|a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge $\Rightarrow a_n\to 0$

$\sum\frac{1}{n^s}$ converge si $s>1$ y diverge si $s\le 1$

Criterio integral: Si $f(x)\ge 0$ y decrece, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ converge. Error $S-S_k\le\int_k^\infty f(x)dx$.

Comparación por desigualdades: Si $0\le a_n\le b_n$, entonces $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\le\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Comparación por límites: $a_n,b_n\ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c<\infty$. Entonces: Si $c>0$, $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ converge. Si $c=0$, $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Leibniz: $0\le a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y decreciente $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+\cdots$ converge. $|S-S_N|\le a_{N+1}$. $S_{2n}<S<S_{2n+1}$.

Cociente y raíz: Sea $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=r$ o $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$. Entonces $\sum a_n$: converge si $0\le r<1$; diverge si $r>1$ (ó $r=\infty$)

$\{f_n\}\to f$ uniformemente en A si $\forall\varepsilon>0\,\exists N$ tal que $n\ge N\Rightarrow |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in A$.
$|f_n(x)|\le M_n$ $\forall x\in A$ y $\sum M_n$ convergente $\Rightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformemente en A .

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $|x|<R \Rightarrow f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$, $\int_0^x f(t)\,dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\cdots$, $|x|<R$.
$g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, $|x|<P$, $f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$ $|x|<\text{mín}(R,P)$.

Si $f\in C^{n+1}([a,x])$ [ó $[x,a]$], $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n,a}(x)$
con $R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún $c\in(a,x)$ si $x>a$ $\big[$ó $c\in(x,a)$ si $x<a\big]$.

$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\operatorname{sen}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^nx^{2n}}{(2n)!}$, $\operatorname{sh}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\operatorname{ch}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\forall x\in\mathbf{R}$
$\log(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^nx^{n+1}}{n+1}$, $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^nx^{2n+1}}{2n+1}$, $[1+x]^r=1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\cdots$, $|x|<1$

f y g integrables en $[a,b]$ y $f\le g$ en $[a,b]\Rightarrow \int_a^b f\le\int_a^b g$. $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$.

f continua a trozos en $[a,b]\Rightarrow f$ integrable en $[a,b]\Rightarrow F(x)=\int_a^x f$ continua en $[a,b]$.
Si además f es continua en $x\in(a,b)$ entonces F es derivable en x y $F'(x)=f(x)$.
Si f continua y a,b derivables, $H(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f\Rightarrow H'(x)=f[b(x)]\,b'(x)-f[a(x)]\,a'(x)$.

$\int R(\operatorname{sen}x,\cos x)\,dx$, se hace racional haciendo: $u=\cos x$, si $R(-\operatorname{sen}x,\cos x)=-R(\operatorname{sen}x,\cos x)$,
$u=\operatorname{sen}x$, si $R(\operatorname{sen}x,-\cos x)=-R(\operatorname{sen}x,\cos x)$, $u=\tan x$, si $R(-\operatorname{sen}x,-\cos x)=R(\operatorname{sen}x,\cos x)$,
$u=\tan\frac{x}{2}$ $\left[\operatorname{sen}x=\frac{2u}{1+u^2}\right.$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\left.dx=\frac{2du}{1+u^2}\right]$ (siempre).
$\int R(e^x)\,dx$, función racional de e^x , se convierte en racional con el cambio $u=e^x$.
Se hace racional $\int R\big(x,\sqrt[n]{ax+b}\big)dx$ con $u=\sqrt[n]{ax+b}$, $\int R\big(x,\sqrt{x^2+a}\big)dx$ con $u=x+\sqrt{x^2+a}$.
$\int R\big(x,\sqrt{a^2-x^2}\big)dx$ se convierte en trigonométrica haciendo $x=a\operatorname{sen}u$.

$\int_a^\infty f=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$, $\int_{-\infty}^b f=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f$, $\int_{a^+}^b f=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f$, $\int_a^{b^-}f=\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f$, si los límites existen.

Si $0\le f(x)\le g(x)$ para $x\ge a$, $\int_a^\infty g$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f$ converge e $\int_a^\infty f\le\int_a^\infty g$.
$f,g\ge 0$ y $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to\infty]{} c<\infty$, entonces: Si $c>0$, $\int_a^\infty g$ converge $\Leftrightarrow \int_a^\infty f$ converge. Si $c=0$, $\int_a^\infty g$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f$ converge.
$\int_a^\infty|f|$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f$ convergente. $\Big[$Análogos para $\int_{a^+}^b$, $\ldots\Big]$.

$\int_1^\infty\frac{dx}{x^s}$ converge si $s>1$, diverge si $s\le 1$

$\int_1^\infty e^{ax}dx$ converge si $a<0$, diverge si $a\ge 0$

$\int_{a^+}^b\frac{dx}{(x-a)^s}$ converge si $s<1$, diverge si $s\ge 1$