Soluciones del control 1 de Matemáticas (25 de octubre de 2017)

1. Hallar todos los x que satifacen: **a]** $|2x|-|2+x|\geq 1$, **b]** $\cos 2x+\cos x+1=0$. [0.3 ptos]

a] Necesitamos discutir los valores absolutos (no hay igualdades para su suma):

$$|2x|=\begin{cases}2x\,,\ x\geq 0\\ -2x\,,\ x\leq 0\end{cases},\quad |2+x|=\begin{cases}2+x\,,\ x\geq -2\\ -2-x\,,\ x\leq -2\end{cases},\quad |2x|-|2+x|=\begin{cases}2-x\,,\ x\leq -2 & \geq 1\ \text{siempre} & (-\infty,-2]\\ -2-3x\,,-2\leq x\leq 0 & \geq 1\ \text{si}\ 3x\leq -3 & [-2,-1]\\ x-2\,,\ x\geq 0 & \geq 1\ \text{si}\ x\geq 3 & [3,\infty)\end{cases}$$

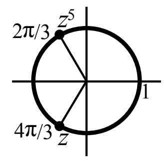
Lo cumplen los $\boxed{x\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)}$.

b] $\cos 2x+\cos x+1=2\cos^2 x+\cos x=\cos x\,(2\cos x+1)=0$ $\to \boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\pi}$; $\to \cos x=-\frac{1}{2}$, $\boxed{x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi}$ $k\in\mathbf{Z}$.

2. Si $z=\dfrac{2\,\mathrm{i}^3}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$, escribir los complejos z y z^5 en la forma $a+b\mathrm{i}$ y $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Hallar el $\left|z^{155}\right|$. [0.2 ptos]

$z=\dfrac{-2\mathrm{i}(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}}$, pues $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$, $\tan\theta=\sqrt{3}$ y θ es del tercer cuadrante.

$\big[$O haciendo el cociente en polares: $\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}=-\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\,\big]$.



Por tanto, $z^5=\mathrm{e}^{\mathrm{i}20\pi/3}=\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}}=-\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}=\boxed{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$.

$\big[$Más corto que $z^5=-\frac{1}{32}\big(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\big)^5=-\frac{1}{32}\big(1+5\sqrt{3}\mathrm{i}-30-30\sqrt{3}\mathrm{i}+45+9\sqrt{3}\mathrm{i}\big)\,\big]$.

Cualquier potencia z^n tiene por módulo $r^n=1$. En particular $\boxed{\left|z^{155}\right|=1}$.

3. ¿Es cierto que $\{a_n\}$ creciente y convergente $\Rightarrow$ $\{a_n^2\}$ creciente? Probarlo o dar un contraejemplo. [0.1 ptos]

Falso. Por ejemplo, $\left\{-\frac{1}{n}\right\}=-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\dots$ es creciente y tiende a 0 , pero $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}=1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\dots$ decrece.

4. Calcular el límite de la sucesión $a_n=\big(3+n-\sqrt{n^2+5n}\,\big)^{n-\sqrt{n+5}}$. [0.2 ptos]

Para el exponente basta sacar factor común: $n\big(1-\sqrt{n^{-1}+5n^{-2}}\,\big)\to\infty$ $[\,\infty\times 1\,]$.
Para la base hay que racionalizar: $3-\frac{5n}{n+\sqrt{n^2+5n}}=3-\frac{5}{1+\sqrt{1+5n^{-1}}}\to 3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.
Por tanto, $a_n\to\boxed{0}$ $\big[\,(\frac{1}{2})^{\infty}\,\big]$.

5. Sea $f(x)=2x^2\arctan\frac{1}{1-x}$, $f(1)=\pi$. **a]** Probar que tiene límite en $x=0$ utilizando sólo la definición $\varepsilon-\delta$.
b] Estudiar si f es continua en $x=1$. [0.2 ptos]

a] El límite es $f(0)=0$ (continua). $\forall\varepsilon$: $\left|2x^2\arctan\frac{1}{1-x}-0\right|=2|x|^2\left|\arctan\frac{1}{1-x}\right|\leq\pi|x|^2<\varepsilon$ si $|x|<\delta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}$.

b] Debe existir el $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ y valer π . Pero $f(x)\xrightarrow[x\to 1^+]{}-\pi$ $\big[\,2\cdot\arctan\frac{1}{-0}\,\big]$. **Discontinua** en $x=1$.

6. Sea $g(x)=\log\frac{x^2-4}{3(x-1)}$. **a]** Hallar el dominio de g . **b]** Precisar si $g(c)=0$ para algún c del intervalo i) $(3,4)$ ii) $(0,3)$
[0.3 ptos] **c]** Hallar el límite de g cuando: i) $x\to\infty$, ii) $x\to 1^-$, iii) $x\to 2^+$. **d]** ¿Es g inyectiva?

a] g está definida si $\frac{(x+2)(x-2)}{3(x-1)}>0\Leftrightarrow x\in\boxed{(-2,1)\cup(2,\infty)=\mathrm{dom}\,g}$ $\big[\,\frac{\pm}{\pm}$ ó $\frac{-}{-}\,\big]$.

b] i) $g(3)=\log\frac{5}{6}<0$, $g(4)=\log\frac{4}{3}>0$ y g continua en $[3,4]\overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}g$ **se anula** en $(3,4)$.

ii) Pese a que $g(0)=\log\frac{4}{3}>0$ y $g(3)=\log\frac{5}{6}<0$, Bolzano no dice nada, porque g no es continua en $[0,3]$.
De hecho, la función sólo se anula cuando $x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x_\pm=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. $\sqrt{13}>3\Rightarrow x_-<0$ y $x_+>3$ y ambas están fuera del intervalo. **No se anula** en $(0,3)$.

c] i) $g(x)=\log\frac{x-4x^{-1}}{3-3x^{-1}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\boxed{\infty}$ $[\,\log\infty\,]$. ii) $g(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}\boxed{\infty}$ $\big[\,\log(\frac{-3}{-0})\,\big]$. iii) $g(x)\xrightarrow[x\to 2^+]{}\boxed{-\infty}$ $\big[\,\log(\frac{+0}{3})\,\big]$.

q] **No es inyectiva**. Por ejemplo, hemos visto que $g(0)=g(4)$ o que $g(x_-)=g(x_+)=0$.

Soluciones del control 2 de Matemáticas (17 de enero de 2018)

1. Precisar razonadamente todos los x para los qué converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2n+\cos n\pi}$. [0.25 puntos]

$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{2n+(-1)^n}{2n+2+(-1)^{n+1}}\frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}}=\frac{2+(-1)^n/n}{2+2/n+(-1)^{n+1}/n}|x|^3\xrightarrow[n\to\infty]{}|x|^3\Rightarrow$ la serie converge si $|x|<1$ y diverge si $|x|>1$.

Para $x=1$, $\sum\frac{1}{2n+\cos n\pi}$ diverge por comportarse como la divergente $\sum\frac{1}{n}$: $\frac{1/(2n+\cos n\pi)}{1/n}=\frac{1}{2+\cos n\pi/n}\to\frac{1}{2}$.

Para $x=-1$, $\sum\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ converge por Leibniz, $a_n=\frac{1}{2n+(-1)^n}\to 0$, y decrece (no es obvio):

$\{a_n\}=1,\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\dots$, es $a_n\geq a_{n+1}\Leftrightarrow 2n+2+(-1)^{n+1}\geq 2n+(-1)^n\Leftrightarrow 2\geq 2(-1)^n$. $\boxed{x\in[-1,1)}$

2. Sea $f(x)=3x^2-x^3\arctan\frac{3}{x}$. Determinar su límite cuando: i) $x\to 0$, ii) $x\to\infty$. [0.15 puntos]

i) Es muy fácil: $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\boxed{0}$, pues $3x^2\to 0$ y también $x^3\arctan\frac{3}{x}\to 0$ $(0\times ac)$.

ii) Como $\arctan\bullet=\bullet-\frac{\bullet}{3}+\cdots$, se parecerá $x^3\arctan\frac{3}{x}\sim x^3\big(\frac{3}{x}-\frac{9}{x^3}\big)=3x^2-9$ y el límite será 9 .

Con más rigor: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)\overset{t=1/x}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{3t-\arctan 3t}{t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{3t-(3t-9t^3+\cdots)}{t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{9t^3+\cdots}{t^3}=\boxed{9}$.

3. Sea $F(x)=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{x}s\,e^{\cos s}\,ds$. **a]** Esudiar su crecimiento. **c]** Hallar su recta tangente en $x=\frac{\pi}{2}$. **c]** Precisar si son positivas o negativas: i) $F(0)$, ii) $F(\pi)$. [0.2 puntos]

a] f continua en $\mathbf{R}\Rightarrow F'(x)=x\,e^{\cos x}\ \forall x\Rightarrow F$ decrece en $(-\infty,0]$ y crece en $[0,\infty)$.

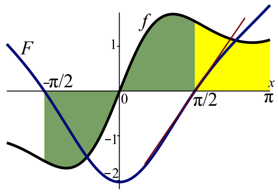
b] $F\big(\frac{\pi}{2}\big)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}=0$ por ser el integrando impar. $F'\big(\frac{\pi}{2}\big)=\frac{\pi}{2}e^0=\frac{\pi}{2}$. Tangente: $\boxed{y=\frac{\pi}{2}\big(x-\frac{\pi}{2}\big)}$.

c] i) $F(0)=\int_{-\pi/2}^{0}<0$ por ser el integrando negativo en todo el intervalo.

ii) $F(\pi)=\int_{-\pi/2}^{\pi}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}=0+\int_{\pi/2}^{\pi}>0$ (integrando positivo).

O bien, porque F crece estrictamente para $x>0$ y es $F\big(\frac{\pi}{2}\big)=0$.

[Esquematizando la gráfica del integrando es claro. A la derecha con Maple].



4. Sea $f(x)=\frac{1}{1-3x+2x^2}$. **a]** Calcular la integral $I=\displaystyle\int_{-1}^{0}f$. **b]** Probar que $I\geq\frac{1}{6}$. [0.5 puntos]
c] Hallar por **dos** caminos distintos (•) su desarrollo de Taylor en $x=0$ hasta x^3 y deducir el valor de $f'''(0)$.
(•) [haciendo suma, o producto, o cociente, o composisición de series, o (lo peor) derivando f].

a] $\frac{1}{(x-1)(2x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-1}=\frac{A(2x-1)+B(x-1)}{(x-1)(2x-1)}\to A=1,B=-2$. $\displaystyle\int_{-1}^{0}f=\Big[\log|x-1|-\log|2x-1|\Big]_{-1}^{0}=\boxed{\log\tfrac{3}{2}}$.

b] No se necesita hallar I . Aumentando el denominador de la fracción positiva: $I=\displaystyle\int_{-1}^{0}f\geq\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+3+2}\,dx=\frac{1}{6}$.

O se puede desarrollar el resultado exacto utilizando Taylor:

$I=\log\big(1+\frac{1}{2}\big)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\cdots\overset{\bullet}{>}\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}>\frac{1}{6}$ (• es positivo el siguiente término de la serie de Leibniz).

c] $f(x)=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=2\big[1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\big]-\big[1+x+x^2+x^3+\cdots\big]=\boxed{1+3x+7x^2+15x^3+\cdots}$ (si $|x|<\frac{1}{2}$).

$f(x)=\frac{1}{1-x}\frac{2}{1-2x}=\big[1+x+x^2+x^3+\cdots\big]\big[1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\big]=1+(1+2)x+(1+2+4)x^2+(1+2+4+8)x^3+\cdots$

$f(x)=\frac{1}{1-(3x-2x^2)}=1+(3x-2x^2)+(3x-2x^2)^2+(3x-2x^2)^3+\cdots=1+3x+2x^2+(-12+27)x^3+\cdots$

$1=\big[1-3x+2x^2\big]\big[c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\big]\to x^0:\ 1=c_0$, $x^1:\ 0=c_1-3c_0$, $c_1=3$.

$x^2:\ 0=c_2-3c_1+2c_0$, $c_2=7$. $x^3:\ 0=c_3-3c_2+2c_1$, $c_3=15$. Como $\frac{f'''(0)}{6}=15$, es $\boxed{f'''(0)=90}$.

5. Calcular $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$. [0.2 puntos]

$x=2\,\mathrm{sen}\,t$, $dx=2\cos t\,dt$; $\mathrm{sen}\,0=0$, $2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}=2$ $\to 32\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^3t\cos^2t\,dt=\int_0^{\pi/2}\big(\cos^2t-\cos^4t\big)\,\mathrm{sen}\,t\,dt=32\Big[\frac{\cos^5t}{5}-\frac{\cos^3t}{3}\Big]_0^{\pi/2}=\boxed{\tfrac{64}{15}}$.

[O por partes con con $dv=x\sqrt{4-x^2}\,dx$, $u=x^2\dots$, o haciendo primero $x^2=s$ y luego $\sqrt{4-s}=u$ o partes.
Aunque hacer $u=\sqrt{4-x^2}$ no arregla este tipo de integrales, aquí sí sirve, pero no serviría para $x^2\sqrt{4-x^2}$].