Matemáticas I (B) | Problemas adicionales 1 | 17-18

1 a) $f(X\cup Y)=\{f(z):z\in X \text{ ó } z\in Y\}=f(X)\cup f(Y)$.

b) $z\in X\cap Y \Rightarrow f(z)\in f(X)$ y $f(z)\in f(Y) \Rightarrow f(z)\in f(X)\cap f(Y)$. Por tanto, $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$.

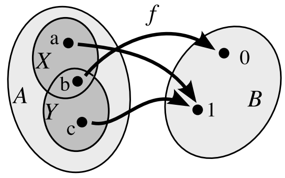
c) $f(x)\in f(X) \Rightarrow f(x)\in f(Y)$ pues también $x\in y$: $X\subset Y \Rightarrow f(X)\subset f(Y)$.

No es cierto en general que $f(X\cap Y)\supset f(X)\cap f(Y)$, pero sí cuando f es inyectiva:

$b\in f(X)$ y $b\in f(Y) \Rightarrow \exists$ único $z\in A$ tal que $f(z)=b$ y z pertenece a X y a Y .

Falta ver que $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y) \Rightarrow f$ inyectiva:

$z\neq w \Rightarrow f(\{z\})\cap f(\{w\})=f(\{z\}\cap\{w\})=f(\varnothing)=\varnothing \Rightarrow f(z)\neq f(w)$.



---

2 a) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$. Cierto para $n=1$: $1=1^2$.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=0}^{n}(2k-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

b) $\sqrt{n}\le\cdots$. Cierto para $n=1$: $\sqrt{1}\le\frac{1}{1}$; para $n=2$: $\sqrt{2}\le 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($1\le\sqrt{2}$);

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$: $1+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ge\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}$

$\cdots\le 2\sqrt{n}$. Cierto para $n=1$: $\frac{1}{1}\le 2\sqrt{1}$; para $n=2$: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\le 2\sqrt{2}$ ($1\le\sqrt{2}\le 3$);

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$: $1+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{2n+1+1}{\sqrt{n+1}}=2\sqrt{n+1}$ (es $4n^2+4n\le 4n^2+4n+1$)

---

3 i) es cierta para $n=1$: $\frac{2}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}$, y para $n=2$: $\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}=\frac{1}{2}=\frac{2}{2+2}$, ... Suponiéndola cierta para n , probémosla para $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}\overset{P(n)\text{ cierta}}{=}\frac{n}{n+2}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+3)+2}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}=\frac{n+1}{n+3}$$ cierta para $n+1$.

ii) es falsa, pues aunque es cierta para $n=1$, $n=2$ y $n=3$: $\frac{2}{1}=2=\frac{8}{4}$, $\frac{2}{1}+\frac{2}{2}=3=\frac{15}{5}$, $\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}=\frac{22}{6}$,

no se cumple ya para $n=4$: $\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}=\frac{11}{3}+\frac{1}{2}=\frac{25}{6}\neq\frac{29}{7}$.

---

4 $\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{ veces}}=n$. $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=(a_1-a_0)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k)\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{a_k})\neq\sum_{k=1}^{n}1$ en general $\left[\text{por ejemplo } (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=1+1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\neq 2\right]$.

---

5 $12345=3\cdot5\cdot823$ mcd$=3\cdot5=15$

$67890=2\cdot3\cdot5\cdot31\cdot73$ mcm$=2\cdot3\cdot5\cdot31\cdot73\cdot823=55873470$. Restos Euclides: 6165, $\boxed{15}$, 0 .

$135=3^3\cdot5$

$315=3^2\cdot5\cdot7$ mcd$=3^2=9$

$351=3^3\cdot13$ mcm$=3^3\cdot5\cdot7\cdot13=12285$. $\begin{cases}135\\315\end{cases}$ Euclides: $\boxed{45}$, 0 ; $\begin{cases}45\\351\end{cases}$ Euclides: 30 , $\boxed{9}$, 0 .

---

6 La suma S de los términos $a_1, a_2=a_1+d, \ldots, a_n=a_1+(n-1)d$, se puede poner: $S=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

En nuestro caso: $a_4=-\frac{6}{5}$, $a_{28}=\frac{66}{5}$, $a_4+\cdots+a_{28}=\frac{-6/5+66/5}{2}25=150$.

Buscamos enteros tales que: $25a_1+25\cdot12\cdot d=150 \Leftrightarrow a_1+12d=6$. Infinitas posibilidades, como:

$d=1, a_1=-6$: $-6-5-\cdots+0+1+\cdots+18=150$; $d=2, a_1=-18$: $-18-16-\cdots+30=150$; ...

Si $n=24$: $24a_1+12\cdot23\cdot d=150 \Leftrightarrow 2[2a_1+23d]=25$ es imposible (impar $\neq$ par).

---

7 x,y,z en geométrica: $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$. $x+y+z=70$.

$4x,5y,4z$ en aritmética $\to 5y-4x=4z-5y$. $\left.\begin{matrix}2x+2y+2z=140\\5y-2x-2z=0\end{matrix}\right\}\to y=20$. $\left.\begin{matrix}x+z=50\\xz=400\end{matrix}\right\}\to x=10, z=40$ (o al revés).

---

8 $\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21=\binom{7}{5}$, $\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35=\binom{7}{4}\to$

$(\sqrt{2}-1)^7=8\sqrt{2}-7\cdot8+21\cdot4\sqrt{2}-35\cdot4+35\cdot2\sqrt{2}-21\cdot1+7\sqrt{2}-1=\boxed{169\sqrt{2}-239}$

---

9 $\sqrt{3}\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$. Utilizaremos que p múltiplo de 3 $\Leftrightarrow p^2$ múltiplo de 3: si $p=3k$, $p^2=3(3k^2)$ múltiplo de 3 ,

pero no lo es en los otros casos: si $p=3k+1$, $p^2=3(3k^2+2k)+1$; si $p=3k+2$, $p^2=3(3k^2+4k+1)+1$.

$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ irreducible $\Rightarrow p^2=3q^2 \Rightarrow p^2$ múlt. de $3 \Leftrightarrow p$ múlt. de 3 , $p=3k \Rightarrow 3k^2=q^2 \Rightarrow q$ mult. de 3 . Imposible.

$\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}$ irreducible $\Rightarrow p^3=2q^3 \Rightarrow p^3$ par $\Leftrightarrow p$ par, $p=2k \Rightarrow 4k^3=q^3 \Rightarrow q^3$ par $\Leftrightarrow q$ par. Imposible.

---

10 ¿ $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{c_1}{d_1}<\frac{c_2}{d_2} \Rightarrow \frac{a_1+c_1}{b_1+d_1}<\frac{a_2+c_2}{b_2+d_2}$? **No es cierto** en general. Por ejemplo: $\frac{1}{2}<\frac{4}{7}$, $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$ pero $\frac{5}{7}>\frac{9}{13}$.

---

11 $\underset{>0}{\sqrt{xy}}\le\underset{>0}{\frac{x+y}{2}} \Leftrightarrow xy\le\frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow 4xy\le x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\ge0\ \forall xy$. Sólo coinciden si $x=y$.

12 a) $x^2+x-2=(x+2)(x-1)\le 0 \Leftrightarrow x\in[-2,1]$.

b) $\left|x^3+11x-30\right|\le 30 \Leftrightarrow -30\le x^3+11x-30\le 30$. Debe ser $x(x^2+11)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$ y además $x^3+11x-60=(x-3)(\underbrace{x^2+3x+20}_{>0})\le 0 \Leftrightarrow x\le 3$. Son los $x\in[0,3]$.

[Más largo es discutir el $\left|x^3+11x-30\right|=\left|(x-2)(x^2+2x+15)\right|$, que cambia de expresión en $x=2$].

c) $-2\le \frac{x-2}{x+1}\le 2 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1}\ge 0$ y $\frac{x+4}{x+1}\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup[0,\infty)$ y $x\in(-\infty,-4]\cup(-1,\infty)$. $\boxed{x\in(-\infty,-4]\cup[0,\infty)}$.

[No es necesario discutir el $|\cdot|$ que daría dos expresiones distintas, una en $(-1,2]$ y otra en $(-\infty,-1)\cup[2,\infty)$].

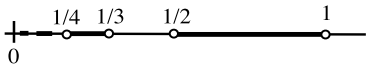
d) $-2<\frac{|x-1|}{x}=\begin{cases}1-\frac{1}{x}, & x\ge 1\\ \frac{1}{x}-1, & x\le 1\end{cases}\to\begin{cases}\frac{3x-1}{x}>0 \Leftrightarrow x>\frac13 \text{ ó } x<0.\ \text{De la región } x\ge 1 \text{ valen todos.}\\ \frac{1+x}{x}>0 \Leftrightarrow x<-1 \text{ ó } x>0.\ \text{Con } x\le 1 \text{ cierto si } x<-1 \text{ o si } 0<x\le 1.\end{cases}$ $\boxed{(-\infty,-1)\cup(0,\infty)}$.

[Como claramente lo cumplen los positivos bastaría mirar los $x<0$: $\frac{|x-1|}{x}>-2 \Leftrightarrow |x-1|=1-x\overset{\text{cambia}}{<}-2x \Leftrightarrow x<-1$].

13 Supongamos que $x=\max(x,y)$ e $y=\min(x,y)$ (si no, análogo):

$$x\ge y \Rightarrow |y-x|=x-y \Rightarrow \tfrac12(x+y+x-y)=x,\ \tfrac12(x+y-x+y)=y.$$

14 i) falso; ii) cierto; iii) falso; iv) falso; v) cierto; vi) falso; vii) falso; viii) cierto; ix) falso.

15 

0 es ínfimo (no mínimo). 1 supremo (no máximo).

Abierto: todo punto de cada $\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right)$ es interior.

No es cerrado: los de acumulación son $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right]\cup\{0\}$ y ni 0 ni los $\frac{1}{n}$ pertenecen al conjunto.

16 A,B **abiertos**, $p\in A\cup B\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}p\in A\Rightarrow\exists B(p,r)\subset A\subset A\cup B\\ \text{ó}\qquad\qquad \text{ó}\\ p\in B\Rightarrow\exists B(p,r)\subset B\subset A\cup B\end{array}\right\}\Rightarrow p$ interior a $A\cup B\Rightarrow A\cup B$ abierto.

$p\in A\cap B\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}p\in A\Rightarrow\exists B(p,r_1)\subset A\\ \text{y}\qquad\qquad \text{y}\\ p\in B\Rightarrow\exists B(p,r_2)\subset B\end{array}\right\}$. Si $R=\min\{r_1,r_2\}\Rightarrow B(p,r)\subset A\cap B$ y es abierto.

Si $\{A_n\}$ **abiertos**, se ve igual que la $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$ es **abierto**. Pero falla la demostración para la $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$, pues el $\min\{r_1,r_2,\dots\}$ pudiera no existir. **La intersección de infinitos abiertos puede no ser abierto**. Por ejemplo, $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$ no lo es.

Si A,B **cerrados**: $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{R}-(A\cup B)=\underset{\text{abierto}}{(R-A)}\cap\underset{\text{abierto}}{(\mathbf{R}-B)}\text{ abierto }\Leftrightarrow A\cup B\text{ cerrado}\\ \mathbf{R}-(A\cap B)=(R-A)\cup(\mathbf{R}-B)\text{ abierto }\Leftrightarrow A\cap B\text{ cerrado}\end{array}\right\}$. Análogamente, $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$ cerrado.

La unión de infinitos cerrados puede no ser cerrado: $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]=[0,1)$ no cerrado.

17 a) $D_f=\{|x|\le 1\}\cap\{|x|\le 1\}=\{-1,1\}$. b) $g(x)=\sqrt[4]{2}\sqrt{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$, $D_g=\cdots\cup\left[-\frac{9\pi}{4},-\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{4}\right]\cup\cdots$

c) $D_h=D(\tan x)\cap\{x:\tan x\ne 0\}=\mathbf{R}-\left\{\frac{n\pi}{2}:n\in\mathbf{Z}\right\}$. d) $D_k=(-1,1]$. e) $D_l=(-1,1)$. f) $D_m=R-\left\{\pm\sqrt{\frac{2n-1}{2}},n\in\mathbf{N}\right\}$.

18 g definida si lo está la raíz y si $2+\sqrt{x+3}>0$, para que lo esté el logaritmo. Lo primero ocurre se da $x\ge -3$, y lo segundo para todos esos x ($2>0$, y raíz positiva). $\boxed{D=[-3,\infty)}$. **Nunca** es $g(x)=0$, pues para ningún x puede ser $2+\sqrt{x+3}=1$.

19 $4x-3\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(4\sqrt{x}-3\right)>0 \Leftrightarrow x\ge 0$ y $\sqrt{x}>\frac34 \Leftrightarrow x>\frac{9}{16}$. $\boxed{D=\left(\frac{9}{16},\infty\right)}$.

[En general es falso que $a>b\Leftrightarrow a^2>b^2$, sí equivalen si $a,b>0$: el paso $4x>3\sqrt{x}\Leftrightarrow 16x^2>9x$ no es trivial].

$g(x)=0 \Leftrightarrow 4x-3\sqrt{x}-1=0$, $\sqrt{x}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{8}=1,-\frac14\to\boxed{x=1}$ (pues $\sqrt{x}=-\frac14$ es imposible).

[Elevar al cuadrado $4x-1>3\sqrt{x}$, es pérdida de tiempo y genera soluciones falsas].

20 a) Falso f impar $\Rightarrow f$ inyectiva en $\mathbf{R}$: Por ejemplo, $f(x)=\operatorname{sen}x$ es impar en todo $\mathbf{R}$ y no es inyectiva.

b) Falso f inyectiva en $\mathbf{R}\Rightarrow f$ impar: Por ejemplo, $f(x)=e^x$ es inyectiva en todo $\mathbf{R}$ y no es impar.

Falso f inyectiva en $D\Rightarrow f$ estrictamente monótona en D. Ejemplo, $f(x)=\frac{1}{x}$ es inyectiva en su dominio y no monótona.

21 i) $x^2\le 4\Leftrightarrow |x|\le 2\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{4-x^2}{3x} & \text{si } |x|\le 2, x\ne 0\\ \frac{x^2-4}{3x} & \text{si } |x|\ge 2\end{cases}=-\frac{5}{9}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\frac53x-4=0\to x=3,-\frac43, & |x|\le 2, x\ne 0\\ x^2+\frac53x-4=0\to x=-3,\frac43, & |x|\ge 2\end{cases}$.

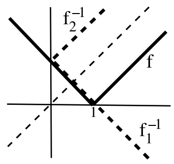
Los dos x que cumplen i) son pues: $\boxed{x=-3 \text{ ó } x=-\frac43}$ [y de esto se deduce que f **no es inyectiva**].

ii) Para $0<|x|\le 2$, $\frac{4-x^2}{3x}\le 1\Leftrightarrow 1-\frac{4-x^2}{3x}=\frac{x^2+3x-4}{x}=\frac{(x+4)(x-1)}{x}\ge 0\Leftrightarrow x\in[-4,0)\cup[1,\infty)$.

y para $|x|\ge 2$, $\frac{x^2-4}{3x}\le 1\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{3x}-1=\frac{x^2-3x-4}{x}=\frac{(x-4)(x+1)}{x}\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup(0,4]$.

Tomando los valores dentro de cada conjunto, ii) lo cumplen: $\boxed{x\in(-\infty,0)\cup[1,4]}$ [los x negativos cumplían la igualdad claramente].

22 $f(x)=(r\circ c\circ l)(x)=|1-x|$ inyectiva en $(-\infty,1]$ $\left(f_1^{-1}:\mathbf{R}^+\to(-\infty,1]\,,\ f_1^{-1}(x)=1-x\right)$,
y en $[1,\infty)$ $\left(f_2^{-1}:\mathbf{R}^+\to[1,\infty)\,,\ f_2^{-1}(x)=1+x\right)$.



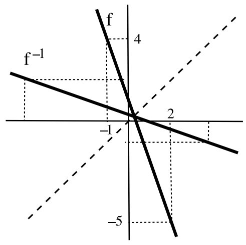
$g(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=(r\circ l\circ r\circ L\circ x)(x)$.

Su dominio es $[-1,1]$: $|x|\le 1\Rightarrow 0\le 1-x^2\le 1\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\le 1\Rightarrow 1-\sqrt{1-x^2}\ge 0$.

---

23 $y=1-3x=f(x)\ \forall x\ \to\ y=\frac{1-x}{3}=f^{-1}(x)\ \forall x$

[es la recta que pasa por $(4,-1)$ y $(-5,2)$ y su pendiente es la inversa de la de la dada]



$f^2(x)=(1-3x)^2\,,\ \ (f^{-1})^2(x)=\frac{1}{9}(1-x)^2$

$\left[f^2\circ(f^{-1})^2\right](x)=\left[1-\frac{1}{3}(1-x)^2\right]^2=\frac{1}{9}[x^4-4x^3+8x+4]$

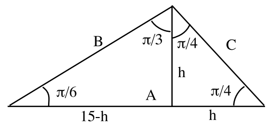
$\left[(f^{-1})^2\circ f^2\right](x)=\frac{1}{9}\left[1-(1-3x)^2\right]^2=x^2[2-3x]^2=9x^4-12x^3+4x^2$

---

24 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\,,\ \operatorname{sen}2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}\,,\ \tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}\,,\ \operatorname{sen}3\alpha=\frac{23}{27}$.

---

25 El otro ángulo es $\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}=105^o$. $\left.\begin{array}{l} h=\frac{C}{\sqrt{2}}=\frac{B}{2}\\ 15-h=\frac{\sqrt{3}}{2}B\end{array}\right\}\to \begin{array}{l} B=15(\sqrt{3}-1)\text{ m}\\ C=\frac{15}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}\text{ m}\end{array}$



---

26 $\gamma=\frac{\pi}{4}$. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}\to\tan(\alpha+\beta)=\frac{1/2+1/3}{1-1/6}=1$. $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

---

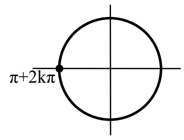
27 a) $0<4x^2-3x\le 1\Leftrightarrow 4x\left(x-\frac{3}{4}\right)>0$ y $4x^2-3x-1=4\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-1)\le 0\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{4},0\right)\cup\left(\frac{3}{4},1\right]$.

b) $\cos 3x=\cos 2x\cos x-\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x=4\cos^3x-3\cos x$. $\left[\text{ó } \cos 3x+\mathrm{i}\operatorname{sen}3x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}=(\cos x+\mathrm{i}\operatorname{sen}x)^3=4\cos^3x-3\cos x+\mathrm{i}(\cdots)\right]$.

Nuestra igualdad equivale a: $\cos x\left(4\cos^2x-6\right)=0\Leftrightarrow\cos x=0\,,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\left[\cos^2x=\frac{3}{2}\text{ es imposible}\right]$.

c) $\cos^2x-\operatorname{sen}^2x-2\cos x=3\Leftrightarrow 2\cos^2x-2\cos x-4=0\overset{t=\cos x}{\Longleftrightarrow}t^2-t-2=(t+1)(t-2)=0$.

$\cos x=2$ es imposible; $\cos x=-1\Rightarrow x=(2k+1)\pi\,,\ k\in\mathbf{Z}$.



[Con un poco de vista: las únicas soluciones posibles son los x que, a la vez, hacen $\cos 2x=1$, $\cos x=-1$].

d) $2\operatorname{sen}^2x-3\operatorname{sen}x-2=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ó $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.

e) $8\operatorname{sen}^4x+2\operatorname{sen}^2x-1=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ ó $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi$.

f) $\operatorname{sen}x(2\cos x-1)=0\Rightarrow x=k\pi$ ó $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $(k\in\mathbf{Z})$

g) Si $\cos x\neq 0,\pm 1\Rightarrow\operatorname{sen}x\neq 0,\pm 1\Rightarrow\cos^{58}x<\cos^2x$ y $\operatorname{sen}^{40}x<\operatorname{sen}^2x\Rightarrow\cos^{58}x+\operatorname{sen}^{40}x<1$. Soluciones $x=\frac{k\pi}{2}$.

---

28 $\operatorname{th}\left(\log(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6})\right)=\operatorname{th}\left(\log\frac{1}{2}\right)=\frac{\mathrm{e}^{-\log 2}-\mathrm{e}^{\log 2}}{\mathrm{e}^{-\log 2}+\mathrm{e}^{\log 2}}=\frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}+2}=\boxed{-\frac{3}{5}}$. $\log\frac{1}{2}=-\log 2$, $\mathrm{e}^{-\log 2}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\log 2}}=\frac{1}{2}$ ó $\mathrm{e}^{\log 2^{-1}}=\frac{1}{2}$.

---

29 $-5\mathrm{i}=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}$, $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$, $-3-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6}$, $-\pi=\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, $4-3\mathrm{i}=5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan\frac{3}{4}}$.

$3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=3(\cos\pi+\mathrm{i}\operatorname{sen}\pi)=-3$, $3\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}}=-3$, $4\cos\frac{\pi}{6}-4\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{sen}2}=\cos(\operatorname{sen}2)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(\operatorname{sen}2)$, $\mathrm{i}^{765432}=1$.

---

30 $z=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=-\mathrm{i}\to\bar{z}=\mathrm{i}$. $z^3=-\mathrm{i}^3=\mathrm{i}=\cos\frac{9\pi}{2}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{9\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$.

---

31 $z=\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}$. $w=\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}}$ $\left[r=\sqrt{1+1}\,,\ \tan\theta=-1\text{ y tercer cuadrante}\right]$. $\frac{z}{w}=\frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2-3\pi/4)}=\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}=1-\mathrm{i}$.

$w^5=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}15\pi/4}=4\sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right]=\boxed{4-4\mathrm{i}}$. $\left[\text{Más corto que }(\mathrm{i}-1)^5=\underset{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^5}-\underset{-5}{5\mathrm{i}^4}+\underset{-10\mathrm{i}}{10\mathrm{i}^3}-\underset{+10}{10\mathrm{i}^2}+5\mathrm{i}-1\right]$.

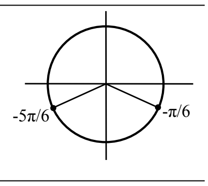
---

32 $r=\sqrt{1+3}=2$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$ y del segundo cuadrante $\Rightarrow z=2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$. $z^3=-1+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}-9\,\mathrm{i}^2+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}^3=8\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=8$.

---

33 $z=2\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ $\left[|z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1\,,\ \tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ y cuadrante }4^\circ\right]$.

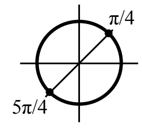
Por tanto: $z^5=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6}=\cos\frac{-5\pi}{6}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{-5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$. Mucho más largo:



$\frac{1}{2^5}\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^5=\frac{1}{2^5}\left(9\sqrt{3}-5\cdot 9\mathrm{i}+10\cdot 3\sqrt{3}\mathrm{i}^2-10\cdot 3\mathrm{i}^3+5\sqrt{3}\mathrm{i}^4-\mathrm{i}^5\right)=\frac{(9-30+5)\sqrt{3}}{32}+\mathrm{i}\frac{-45+30-1}{32}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

---

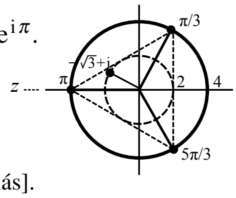
34 a) $z=\frac{(2-4\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}=\frac{2-12-10\mathrm{i}}{1+9}=-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$, pues $|z|=\sqrt{1+1}$ y $\tan\theta=1$ (tercer cuadrante).



$z^6=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}\right)^6=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}15\pi/2}=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}=-8\mathrm{i}$. $\left[\text{Mejor que hacer }(1+\mathrm{i})^6\text{ con el binomio de Newton}\right]$.

b) $\sqrt[4]{-16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}=\sqrt[4]{16\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\to\phi=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\to 1+\mathrm{i}\sqrt{3},-\sqrt{3}+\mathrm{i},-1-\mathrm{i}\sqrt{3},\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

35 $w=-\sqrt{3}+\mathrm{i}=\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}}$, pues $|\cdot|=\sqrt{3+1}$, $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2° cd. $z=w^6=2^6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi}=\boxed{-64}=64\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.
[En cartesianas claramente mucho más largo].



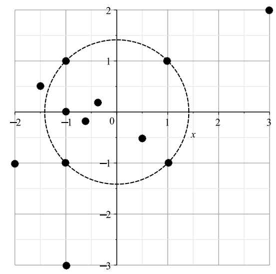
$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{64}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi+2k\pi}{3}}_{k=0,1,2}$. Las 3 raíces son: $4\left[\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right]=\boxed{2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$, $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=\boxed{-4}$

y $4\left[\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right]=\boxed{2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$. [Una de la raíces será w^2 pero hay otras 2 más].

[Como estamos resolviendo $z^3=-64$ y $z=-4$ es raíz: $z^3+64=(z+4)(z^2-4z+16)=0\to z=2\pm\sqrt{4-16}$, además de $z=-4$].

---

36 $z=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $w=-2-\mathrm{i}=\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\pi+\arctan(1/2)]}$, $z+w=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$,



$z-w=3+2\mathrm{i}=\sqrt{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(2/3)}$, $zw=-1-3\mathrm{i}=\sqrt{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\pi+\arctan 3]}$,

$\frac{1}{z}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$, $\frac{1}{w}=\frac{-2+\mathrm{i}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\pi-\arctan(1/2)]}$,

$\frac{w}{z}=\frac{-3+\mathrm{i}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\pi-\arctan(1/3)]}$, $\frac{z}{w}=\frac{-3-\mathrm{i}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\pi+\arctan(1/3)]}$.

$z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$, $z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$, $z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-z=z\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}}$, $z\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=z$. (Son giros).

---

37 $z=2+3\mathrm{i}$, $w=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=1+\mathrm{i}\ \to\ z+w=3+4i$, $\bar{z}-w=1-4\mathrm{i}$, $zw=-1+5\mathrm{i}$, $w^4=4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-4$,
$\sqrt{w}=\pm\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2}\pm\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$, $\frac{z}{w}=\frac{5}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$, $\frac{w}{z}=\frac{5}{13}-\frac{\mathrm{i}}{13}$, $|w|=\sqrt{2}$, $|z|\,\mathrm{Re}\,w=\sqrt{13}$, $|z|\,\mathrm{Im}\,w=\sqrt{13}$.

---

38 $z+\bar{z}+z\cdot\bar{z}=2x+x^2+y^2\ \to\ \mathrm{Re}=2x+x^2+y^2\ \big(=2\,\mathrm{Re}\,z+|z|^2\big)$, $\mathrm{Im}=0$.
$\frac{1}{z^2}=\frac{\bar{z}^2}{|z|^4};\to\ \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y}=\mathrm{e}^{-y}(\cos x+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,x)\ \to\ \mathrm{Re}=\mathrm{e}^{-y}\cos x$, $\mathrm{Im}=\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{sen}\,x$.

---

39 a) $2\,\mathrm{Re}(z)=2x=z+\bar{z}$ (cierto). b) $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{x^2+y^2}$ (cierto).

c) $\mathrm{Re}(z\cdot w)=\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(w)$ es falso: por ejemplo, $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i})=-1\neq 0\cdot 0=\mathrm{Re}(\mathrm{i})\cdot\mathrm{Re}(\mathrm{i})$.

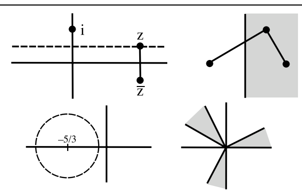
d) $z^2=|z|^2$ es falso: por ejemplo, $\mathrm{i}^2=-1\neq 1=|\mathrm{i}|^2$ (sólo es cierto si z real: $x^2-y^2-2xy\mathrm{i}=x^2+y^2\Leftrightarrow y=0$).

---

40 $z-\bar{z}=\mathrm{i}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$; $|z-1|\leq|z+1|\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2\leq x^2+2x+1+y^2\Leftrightarrow x\geq 0$;

$|z-1|=2|z+1|\Leftrightarrow y^2+\left(x+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$; $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}=\mathrm{Re}(z)\to$ ningún z ;

$\mathrm{Arg}(z^3)=\mathrm{Arg}(r^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta})=3\theta\leq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$.



$\boxed{\mathbf{1}}$ Son iguales a un entero z a partir de un N.

$\boxed{\mathbf{2}}$ a) $a_{2k}=\operatorname{sen}k^2\pi-\frac{7}{4k^2}=-\frac{7}{4k^2}\to 0$, $a_{2k+1}=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+k(k+1)\pi)-\frac{7}{(2k+1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{7}{(2k+1)^2}\to\frac{\sqrt{2}}{2}$ (como $|a_n|\le 8$ debían existir subsoluciones convergentes).

b) $b_{2k+1}=\left(2^{2^{2k+1}}\right)^{-1}\to 0$ (a pesar de que la sucesión no está acotada).

c) No (ninguna subsucesión está acotada, pues $c_n\ge n-1$).

$\boxed{\mathbf{3}}$ ¿Será cierto que si $a_n\le a_{n+1}$ entonces $a_n^2\le a_{n+1}^2$? Para los negativos no. Esto nos sugiere el contraejemplo:

$\{a_n\}=\{-\frac{1}{n}\}=-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots$ es creciente, pero $\{a_n^2\}=\{\frac{1}{n^2}\}=1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots$ es estrictamente decreciente.

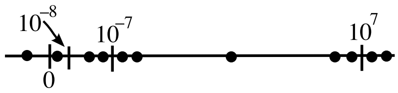
$\boxed{\mathbf{4}}$ $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}|a_n-a|\le\frac{1}{\sqrt{a}}|a_n-a|$ y sabemos que $\exists N$ tal que $|a_n-a|<\varepsilon\sqrt{a}$ si $n\ge N$. [A partir de un n es $a_n>0$ y $\sqrt{a_n}$ tiene sentido].

$\forall K>0\ \exists N$ tal que $a_n>K^2$, $\forall n>N\Rightarrow\sqrt{a_n}>K$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ i) Como $a_n-L\le b_n-L\le c_n-L$ y $\begin{array}{l}\exists N_1\,/\,n\ge N_1\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<a_n-L\\ \exists N_2\,/\,n\ge N_2\Rightarrow|c_n-L|<\varepsilon\Rightarrow c_n-L<\varepsilon\end{array}$ $\Rightarrow -\varepsilon<b_n-L<\varepsilon$, si $n\ge\max\{N_1,N_2\}$.

ii) $b_n\to\infty\left[\Leftrightarrow\forall K\,\exists N\,/\,n\ge N\Rightarrow b_n>K\right]\Rightarrow\forall K\,\exists N\,/\,n\ge N\Rightarrow c_n\ge b_n>K\Rightarrow c_n\to\infty$. [iii) casi igual].

$\boxed{\mathbf{6}}$ Existirá un N_1 tal que si $n\ge N_1$ será $a_n>10^{-8}$, por ejemplo.
(como $\exists K/|a_n|\le K$, en $[-K,10^{-8}]$ hay un número finito de a_n, pues si no, serían subsucesión acotada y habrían más puntos de acumulación).



$\forall M$ será $a_nb_n>10^{-8}b_n>M$ si $n\ge\max\{N_1,N_2\}$, siendo N_2 tal que $b_n>10^8M$ si $n\ge N_2$ (N_2 existe pues $b_n\to\infty$).

$\boxed{\mathbf{7}}$ La sucesión tiende claramente a 0 porque el numerador tiende a $\frac{\pi}{2}-1$ y el denominador tiende a infinito.

$$|a_n-0|=\frac{|\arctan\sqrt{n}-2^{1/n}|}{\sqrt{4n^2-1}}\underset{(1)}{\le}\frac{\arctan\sqrt{n}+2^{1/n}}{\sqrt{4n^2-1}}\underset{(2)}{\le}\frac{4}{\sqrt{4n^2-1}}<\varepsilon\underset{(3)}{\Leftrightarrow}4n^2-1>\frac{16}{\varepsilon^2}\text{, cierto si } n\ge N>\sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2}+\frac{1}{4}}\,.$$

(1): Desigualdad triangular y todo positivo. (2): $\arctan\frac{\pi}{2}<2$ y $2^{1/n}\le 2$ si $n\ge 1$. (3): Todo positivo.

Por tanto, si $\varepsilon=10^{-1}$, un N válido es $N=21$ pues es mayor que $\sqrt{400.25}$ $\left(21^2=441\right)$.

[Para evitar raíces podríamos usar por ejemplo que $\sqrt{4n^2-1}>n\Leftrightarrow 3n^2>1$, que lleva a $N>\frac{4}{\varepsilon}$.
No podemos quitar sin más el -1 de denominador, pues, al ser mayor, la fracción disminuiría].

$\boxed{\mathbf{8}}$ a) $\boxed{n\left(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n-1}}-\sqrt{2}\right)}=n\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-2}}{\sqrt{n-1}}=\frac{n}{\sqrt{n-1}\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-2}\right)}\to\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

b) $\boxed{\frac{1}{2n}\sqrt{12n^3+6n-2}-\sqrt{3n-5}}=\frac{1}{2n}\frac{2n^3+6n-4n^2(3n-5)}{\sqrt{12n^3+6n-2}+2n\sqrt{3n-5}}=\frac{20+6/n}{\sqrt{12n+\cdots}+2\sqrt{3/n+\cdots}}\to 0$.

c) $\boxed{\sqrt[3]{n^4-n^2}-n\,e^{\arctan n}}=n\left(\sqrt[3]{n-\frac{1}{n}}-e^{\arctan n}\right)\to\infty$. d) $\boxed{n^3-\sqrt{n!}}=n^3\left[1-\sqrt{1\cdot 2\cdots(n-4)\frac{(n-5)\cdots n}{n^6}}\right]\to-\infty$ ("$\infty(-\infty)$").

e) $\boxed{n\operatorname{th}2n-2n\operatorname{th}n}$ $n(\operatorname{th}2n-2\operatorname{th}n)\to-\infty$ $\left(\infty\times(-1)\text{, pues }\operatorname{th}n\to 1\right)$.

f) $\boxed{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{k}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n}{n}\le\frac{1}{2^k}\to 0$, siendo $k=\begin{cases}n/2 & \text{si } n \text{ par}\\(n-1)/2 & \text{si } n \text{ impar}\end{cases}$ (si $n\to\infty$, $k\to\infty$).

g) $\boxed{\frac{2n-\sqrt{n^3}}{3n+\log n}}=\frac{2-\sqrt{n}}{3+\frac{\log n}{n}}\to 3$ ("$-\frac{\infty}{3}$", pues $\frac{\log n}{n}\to 0$). h) $\boxed{\frac{\sqrt[3]{8n^7(1-n^2)}-n^3\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{(n+1)^3}}=\frac{2\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-1}-\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^3}\to\frac{2\sqrt[3]{-1}-0}{1}=-2$;

i) $\boxed{[n^5+n+7]^{1/n}}=n^{5/n}\left[1+\frac{1}{n^4}+\frac{7}{n^5}\right]^{1/n}\to 1\cdot 1=1$ $\left([n^{1/n}]^5\to 1^5=1\right)$. i) $\boxed{\left(2-\frac{1}{n}\right)^{2n}}$ diverge a ∞ ["$2^\infty=\infty$"];

k) $\boxed{\left(\frac{3n^2+10}{\sqrt{10n^4+3n}}\right)^n}$ $\frac{3n^2+10}{\sqrt{10n^4+3n}}=\frac{3+10n^{-2}}{\sqrt{10+3n^{-3}}}\to\frac{3}{\sqrt{10}}\in(0,1)\Rightarrow a_n\to\boxed{0}$ $\left(p^\infty\text{ con } 0<p<1\right)$.

l) $\boxed{\left(\frac{2^{2n+1}+3^n}{2^{2n-1}+3}\right)^{\frac{\sqrt{n^2+2n}}{2n+\operatorname{sen}n}}}$ La base $\frac{2+(3/4)^n}{1/2+3/4^n}\to 4$ $\left[(3/4)^n\to 0\right]$ y el exponente $\frac{\sqrt{1+2/n}}{2+\operatorname{sen}n/n}\to\frac{1}{2}$. Por tanto, $a_n\to 4^{1/2}=2$.

m) $\boxed{\left[\frac{n+1}{n^2+2}\right]^n}\to 0$ (0^∞ no es ninguna indeterminación). n) $\boxed{\left[\frac{n^2+1}{n^2+2}\right]^n}=\left(\left[1-\frac{1}{n^2+2}\right]^{-(n^2+2)}\right)^{-n/(n^2+2)}\to e^0=1$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ **a]** $a_n=n^2\left[\sqrt{4+\frac{1}{n^3}}-\frac{n-1}{n}(n-2)!\right]\underset{\infty\times(2-1\times\infty)}{\longrightarrow}\boxed{-\infty}$. $b_n=\frac{\frac{2}{n}-\frac{4(-1)^n}{n^2}}{1+\frac{4(-1)^n}{n^2}}\to\frac{0}{1}=\boxed{0}$ $\left[\frac{\frac{2}{\infty}-\frac{ac}{\infty}}{1+\frac{ac}{\infty}}\right]$.

b] $|b_n-0|\underset{n>2}{=}\frac{2n-4(-1)^n}{n^2+4(-1)^n}\le\frac{2n+4}{n^2-4}=\frac{2}{n-2}<\frac{1}{10}\underset{n>2}{\Rightarrow}n>22$. Si $n\ge N=23$ [todos los pasos con $n>2$ son válidos].

[Sin simplificar, y aunque no fuese simplificable: $\frac{2n+4}{n^2-4}<\frac{1}{10}\underset{n>2}{\Leftrightarrow}n^2-20n-44=(n+2)(n-22)>0$, cierto si $n>22$].

c] $\frac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{0}$ ["$\frac{\text{acot}}{-\infty}$"]. $\frac{\operatorname{sen}(b_n)}{b_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{1}$, pues $b_n\to 0$ y $\frac{\operatorname{sen}x}{x}\underset{x\to 0}{\to}1$.

10 a] $a_n=\dfrac{\left[2-\sqrt{1+\frac{9}{n}}\right]n}{\left[\frac{9}{\sqrt{n}}-\sqrt{2}\right]\sqrt{n}}=\dfrac{2-\sqrt{1+\frac{9}{n}}}{\frac{9}{\sqrt{n}}-\sqrt{2}}\sqrt{n}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{-\infty}$ “$(-\frac{1}{\sqrt{2}})\times\infty$”. $b_n=\dfrac{e^{-2/n}}{e^{2n}+e^{-2n}}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{0}$ “$\frac{1}{\infty+0}$”.

b] $|b_n-0|=\dfrac{e^{-2/n}}{e^{2n}+e^{-2n}}<\frac{1}{e^{2n}+0}<\frac{1}{2^{2n}}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow 2^n>10\Rightarrow$ si $n\geq N=4$ se cumple seguro.

---

11 NADA. Pueden converger (salvo $\frac{b_n}{c_n}$) o divergir. Ni siquiera se puede afirmar alguna $\to\infty$ ó $\to-\infty$.

$\underset{\infty-\infty}{\{i_n+d_n\}}:\ \begin{array}{l} n-n\to 0\\ n^2-n\to\infty\\ n-n^2\to-\infty\end{array}$. $\{c_n+a_n\}:\ \begin{array}{l}\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\to 0\\ \frac{1}{n}+(-1)^n \text{ div}\end{array}$. $\underset{0\cdot\infty}{\{c_n i_n\}}:\ \begin{array}{l}\frac{1}{n}n\to 1\\ \frac{1}{n}n^2\to\infty\end{array}$. $\{i_n a_n\}:\ \begin{array}{l}n\frac{1}{n}\to 1\\ \frac{1}{n}+(-1)^n \text{ div}\end{array}$.

$\{b_n a_n\}:\ \begin{array}{l}1\cdot 1\to 1\\ 1\cdot(-1)^n \text{ div}\end{array}$. $\{\frac{c_n}{a_n}\}:\ \begin{array}{l}\frac{1/n}{1/n}\to 1\\ \frac{1/n}{(-1)^n/n^2}=n(-1)^n \text{ div}\end{array}$. $\{\frac{b_n}{c_n}\}:$ seguro que diverge, pero no podemos asegurar que tienda a $\to\infty$ ó $\to-\infty$: $\frac{1}{1/n}\to\infty$, $\frac{1}{-1/n}\to\infty$, $\frac{1}{(-1)^n/n}$ div .

$\underset{-\infty/\infty}{\{\frac{i_n}{d_n}\}}:\ \begin{array}{l}\frac{n}{-n}\to -1\\ \frac{n^2}{-n}\to-\infty\end{array}$. $\underset{\infty^0}{\{i_n^{c_n}\}}:\ \begin{array}{l}n^0\to 1\\ \left([1+\frac{1}{n}]^{n^3}\right)^{1/n}=\left([1+\frac{1}{n}]^n\right)^n\to\infty\end{array}$. $\underset{1^\infty}{\{b_n^{i_n}\}}\ \begin{array}{l}1^n\to 1\\ [1+\frac{1}{n}]^{n^2}=\left([1+\frac{1}{n}]^n\right)^n\to\infty\end{array}$.

---

12 $\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\Rightarrow\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{6n^3}n(n+1)(2n+1)\to\frac{1}{3}$.

---

13 $a_n=(-1)^n\frac{2n-1}{n!}$ toma esos valores; $0<a_n\leq\frac{2}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(n-1)}\leq\frac{2}{n-1}\to 0\Rightarrow a_n\to 0$” .

---

14 Inducción: $a_1<2$; $a_n<2\Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$. $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>a_n\Leftrightarrow a_n^2-a_n-2=(a_n+1)(a_n-2)<0$, y esto es cierto pues $0<a_n<2$. $a_n\to a,\ a_{n-1}\to a\Rightarrow a=\sqrt{2+a}\Rightarrow a=2$.

---

15 Si $a>1$: $a^{1/n}>1\Rightarrow a^{1/n}=1+a_n$ con $a_n>0\ \forall n\Rightarrow a=(1+a_n)^n>1+na_n$, $a_n<\frac{a-1}{n}\Rightarrow a_n\to 0\Rightarrow a^{1/n}\to 1$.

Si $a=1$: $1^n=1\to 1$. Si $a<1$: $a^{1/n}=\frac{1}{(1/a)^{1/n}}\to\frac{1}{1}=1$ pues $\frac{1}{a}>1$. Y si $a=0$: $0^n=0\to 0$.

---

16 a) $\forall\varepsilon\ \exists\delta>0:|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ no lo puede satisfacer **ninguna función**, pues para los ε negativos es imposible que un valor absoluto (≥ 0) sea menor que ellos.

b) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0:|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$: si es $\forall\delta$ (por gordo que sea), la condición $0:|x-a|<\delta$ no impone nada a las x; debe ser $|f(x)-f(a)|<\varepsilon\ \forall\varepsilon$ y $\forall x$. Las únicas f que pueden cumplirlo son las **constantes**.

---

17 Es falso, pues la afirmación de la derecha dice que f tiende a 1 cuando $x\to\infty$ y la nuestra tiende a 0 $\left(\frac{acot}{\infty}\right)$.

---

18 $f(x)=\frac{2x-\operatorname{sen}x}{x+2\operatorname{sen}x}=\frac{2-\operatorname{sen}x/x}{1+2\operatorname{sen}x/x}\underset{x\to\infty}{\to}2$ (pues $\operatorname{sen}x/x\to$ “acotado$/\infty=0$).

$\left|\frac{2x-\operatorname{sen}x}{x+2\operatorname{sen}x}-2\right|=\left|\frac{-5\operatorname{sen}x}{x+2\operatorname{sen}x}\right|\leq\frac{5}{|x+2\operatorname{sen}x|}\overset{\bullet}{=}\frac{5}{x+2\operatorname{sen}x}\leq\frac{5}{x-2}<0.1\overset{\bullet}{\Leftrightarrow}x-2>50$, si $\boxed{x>52}$ ($\to$ los pasos $\bullet$ son válidos).

---

19 a) $\lim_{x\to\infty}(4x+100\cos x)=\infty:\ \forall M>0,\ \exists K=\frac{M+100}{4}>0,$ tal que si $x>K$ entonces $4x+100\cos x>M$.

b) $\lim_{x\to 3}x^2=9\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ tal que, si $0<|x-3|<\delta$, entonces $|x^2-9|=|x+3||x-3|<\varepsilon$.

Si $|x-3|<1\Rightarrow|x|<4\Rightarrow|x+3|<7$. Basta tomar $\delta=\text{mín}\left(1,\frac{\varepsilon}{7}\right)$.

c) Dado $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\forall\delta$ existe $x=2+\frac{\delta}{3}$ tal que $0<|x-2|<\delta$ pero $|3x-5|=|1+\delta|\geq\frac{1}{2}$.

d) Dado $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\forall M$ existen x con $x>M$ pero $|\operatorname{sen}x-0|\geq\frac{1}{2}$: cualquier $x=\frac{2n+1}{2}\pi>M,\ n\in\mathbf{N}$.

---

20 $|x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}|\leq|x^2|=|x|^2<\varepsilon$, si $|x|<\sqrt{\varepsilon}$. Escribiéndolo mejor: $\quad\varepsilon=1\to\delta=1$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$ tal que $|x-0|<\delta\Rightarrow|x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}-0|<\varepsilon$ $\quad\varepsilon=0.01\to\delta=0.1$

$\left|\sqrt{|x|}-5x-0\right|\leq\sqrt{|x|}+5|x|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ si $|x|<\delta=\text{mín}\left(\frac{\varepsilon^2}{4},\frac{\varepsilon}{10}\right)$. $\quad\varepsilon=1\to\delta=\frac{1}{10}$

[Habrá δ mayores, pero se trata de encontrar uno]. $\quad\varepsilon=0.01\to\delta=\frac{1}{40000}$

---

21 $\boxed{f(x)=x\arctan\frac{1}{x-2}}$ **a]** El límite será $f(0)=0$ (continua). $\forall\varepsilon:\ \left|f(x)-0\right|=|x|\left|\arctan\frac{1}{x-2}\right|\leq\frac{\pi}{2}|x|<\varepsilon$ si $|x|<\delta=\frac{2}{\pi}\varepsilon$.

b] Debe existir el $\lim_{x\to 2}f(x)$ y valer π . Pero $f(x)\xrightarrow[x\to 2^-]{}-\pi$ $\left[2\cdot\arctan(-\infty)\right]$. **Discontinua** en $x=2$.

---

22 $\boxed{f(x)=x^2-x^2\arctan\frac{2}{x}}$ $x^2\left(1-\arctan\frac{2}{x}\right)\xrightarrow[x\to-\infty]{}\boxed{\infty}$ [“$\infty(1-0)$”; ni de “$\infty\times acotado$”, ni de “$\infty-\infty\times 0$” se saca nada] .

El límite será 0 . $\left|f(x)-0\right|=|x|^2\left|1-\arctan\frac{2}{x}\right|\leq\left(1+\left|\arctan\frac{2}{x}\right|\right)|x|^2\leq\left(1+\frac{\pi}{2}\right)|x|^2<3|x|^2<\varepsilon$ si $0<|x-0|<\delta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.
[“$0-0\times acotado$”]

---

23 $\frac{3x-2}{2x}>0\Leftrightarrow\underset{-/-}{x<0}$ ó $\underset{+/+}{x>2/3}$. $D=\boxed{(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)}$. $\lim_{x\to 2/3^+}f(x)=\boxed{-\infty}$ $\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{x}=\frac{3x-2}{2x}\xrightarrow{x\to 2/3^+}+0\right.$, ya que $\left.x>\frac{2}{3}\right]$.

24 **a]** Como $f(-x)=\frac{-2x}{4-\sqrt{(-x)^2-9}}=-f(x)$, es **impar** (y su gráfica es simétrica respecto del origen).

b] La raíz esta definida si $x^2\geq 9 \Leftrightarrow |x|\geq 3 \Leftrightarrow x\geq 3$ o $x\leq -3$.
El denominador se anula si $\sqrt{x^2-9}=4 \Rightarrow x^2=25$, $x=\pm 5$.

$\boxed{D=(-\infty,-5)\cup(-5,-3]\cup[3,5)\cup(5,\infty)}$.
(simétrico como debía)

c] i) Si $x>0$ es $f(x)=\frac{2}{\frac{4}{x}-\sqrt{1-9x^{-2}}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{2}{0-1}=\boxed{-2}$.

ii) Si $x>5$ es $\sqrt{x^2-9}>4$ con lo que el denominador es positivo. $f(x)\xrightarrow[x\to 5^+]{}\boxed{-\infty}$ $\left(\frac{10}{+0}\right)$.

iii) $f(x)\xrightarrow[x\to -3^-]{}\frac{-6}{4-0}=\boxed{-\frac{3}{2}}$ (lo de dentro de la raíz es positivo)

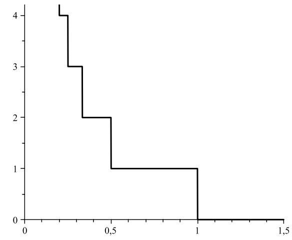
iv) Como f es impar será $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{2}$, pero es fácil equivocarse si no se tiene en cuenta que $\sqrt{x^2}=|x|$.

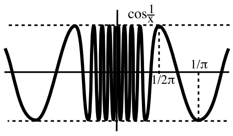
Para $x<0$ es $f(x)=\frac{2x}{4+x\sqrt{1-9x^{-2}}}=\frac{2}{\frac{4}{x}+\sqrt{1-9x^{-2}}}\xrightarrow[x\to-\infty]{}\frac{2}{0+1}=\boxed{2}$.

---

25 $\boxed{f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]}$, $x>0$. Si $a\neq\frac{1}{n}$, f es constante en un entorno de $a \Rightarrow f$ continua en a.

Si $a=\frac{1}{n}$, $f\xrightarrow[x\to a^+]{} n-1$, $f\xrightarrow[x\to a^-]{} n \Rightarrow$ no tiene límite y es discontinua. $f\xrightarrow[x\to\infty]{}0$.



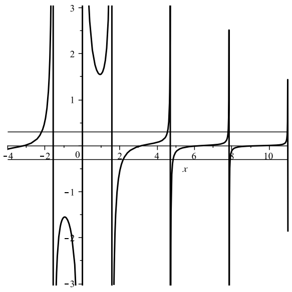


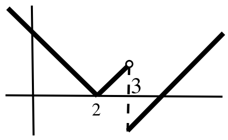
$\boxed{g(x)=\cos\frac{1}{x}}$ Si $a\neq 0$ es continua por ser composición de continuas.
No tiene límite (ni laterales, y no es continua) en 0:
$\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\},\left\{\frac{1}{(2n-1)\pi}\right\}\to 0$, pero $g\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=1$, $g\left(\frac{1}{(2n-1)\pi}\right)=-1$. $g\xrightarrow[x\to\infty]{}1$.

$\boxed{h(x)=\frac{\tan x}{x^2}}$. Continua en $\mathbf{R}-\{x=0\}-\{x=\frac{\pi}{2}+k\pi\}$. $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cos x\frac{1}{x}=\pm\infty$.

Si $a=\frac{\pi}{2}+k\pi$: $h\xrightarrow[x\to a^+]{}\frac{-\infty}{a^2}=-\infty$, $h\xrightarrow[x\to a^-]{}\frac{\infty}{a^2}=\infty \Rightarrow$ no tiene límite y es discontinua.

No existe límite cuando $x\to\infty$ porque la gráfica se sale de cualquier banda.





$\boxed{k(x)=\begin{cases}|2-x| \text{ si } x<3\\ x-4 \text{ si } x\geq 3\end{cases}}$ continua si $a\neq 3$ (y existe límite y laterales).

$k\xrightarrow[x\to a^+]{}1$, $k\xrightarrow[x\to a^-]{}-1 \Rightarrow$ no existe límite cuando $x\to 3$ (y es discontinua).

---

26 a) $\boxed{\frac{e^{\operatorname{sen}|x|-x}-1}{1-\log(x+\cos x)}}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{e^{\operatorname{sen}0-0}-1}{1-\log(0+\cos 0)}=0$ por ser función continua en 0 por ser composición, suma, producto,... de funciones continuas en los puntos en que están evaluadas.

b) $\boxed{\frac{|x|}{7x}}=\begin{cases}1/7, & x>0\\ -1/7, & x<0\end{cases}$. Como $\lim_{x\to 0^+}=\frac{1}{7}\neq-\frac{1}{7}=\lim_{x\to 0^-}$, no existe $\lim_{x\to 0^+}$. c) $\boxed{\left[\frac{3+2x}{x+5x^2}-\frac{3}{x}\right]}=\frac{3x+2x^2-3x-15x^2}{x^2+5x^3}=-\frac{13}{1+5x}\xrightarrow[x\to 0]{}-13$.

d) $\boxed{\frac{6x-\operatorname{sen}2x}{2x+3\operatorname{sen}4x}}=\frac{6-2\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}}{2+12\frac{\operatorname{sen}4x}{4x}}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{6-2}{2+12}=\frac{2}{7}$. e) $\boxed{\log\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to 0^+]{}\infty$. f) $\boxed{\frac{\operatorname{sen}(x-1)^2}{x^2-1}}=\frac{\operatorname{sen}(x-1)^2}{(x-1)^2}\frac{x-1}{x+1}\xrightarrow[x\to 1]{}1\cdot 0=0$.

g) $\boxed{\left[\sqrt{2x^2}-\sqrt{2x^2-6x}\right]}=\frac{6x}{\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-6x}}\overset{x>0}{=}\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{2-6/x}}\xrightarrow{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2}}$. h) $\boxed{\operatorname{th}(\operatorname{ch}x-\cos x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$, (“tan(∞−acotado)=1”).

i) $\boxed{\frac{\arctan x}{x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ (“$\frac{\pi}{2}/\infty$”). j) $\boxed{\left[\frac{2}{\log x}-\frac{3}{\sqrt{\log x}}\right]}=\frac{2-3\sqrt{\log x}}{\log x}\xrightarrow[x\to 1^+]{}\infty$ (si $x<1$, $\log x<0$ no definido).

k) $\boxed{e^{-1/|x-1|}}\xrightarrow[x\to 1]{}0$ (“$e^{-\infty}$”). l) $\boxed{\operatorname{sh}(\log x)}\xrightarrow[x\to 1]{}\operatorname{sh}(\log 1)=\operatorname{sh}0=0$. m) $\boxed{\frac{x^5-1}{x-1}}=x^4+x^3+x^2+x+1\xrightarrow[x\to 1]{}5$.

ñ) $\lim_{x\to 0^+}e^{1/x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ no existe, $\lim_{x\to 0^-}e^{1/x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}=0$ ($0\times$ acotado) ; no existe límite.

---

27 **a]** $2\operatorname{sen}x+\cos^2x-\operatorname{sen}^2x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(2\operatorname{sen}x-1\right)^2=0\Leftrightarrow\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$.

Todos los x que lo cumplen son $\boxed{x=\frac{\pi}{6}+2k\pi}$ y $\boxed{x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi}$.

b] La función g es continua en $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ y podemos ver si el teorema de Bolzano nos da la respuesta.

$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}<0$. $g(0)=2\cdot 0+1=1>0\overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow}\exists c\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ con $g(c)=0$.

$\big[$El cero se hallaría resolviendo $2\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x-1=0\to x=-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, que es del intervalo$\big]$.

c] Evidentemente g **no es inyectiva**. Como toda función periódica cada valor que alcanza no lo toma una única vez, sino infinitas veces (por ejemplo, arriba hay infinitos en los que vale $\frac{3}{2}$).

28 $\boxed{g(x)=\log\left(3-\frac{5}{x-1}\right)}$ **a]** g está definida si $3-\frac{5}{x-1}=\frac{3x-8}{x-1}>0 \Leftrightarrow x\in\boxed{(-\infty,1)\cup\left(\frac{8}{3},\infty\right)}=\operatorname{dom} g$.

b] Pese a que $g(0)=\log 8>0$ y $g(3)=\log\frac{1}{2}<0$, Bolzano no dice nada, porque g no es continua en $[0,3]$.

De hecho, la función sólo se anula cuando $3-\frac{5}{x-1}=1 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$ fuera del intervalo. **No se anula**.

c] $g(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{\log 3}$. $g(x)\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}\boxed{\infty}$ $\left[\log(3+\infty)\right]$. $g(x)=\log\frac{3x-8}{x-1}\underset{x\to 8/3^+}{\longrightarrow}\boxed{-\infty}$ $\left[\log\left(\frac{+0}{5/3}\right)\right]$.

---

29 Aplicando el teorema de Bolzano a $f(x)=x^5-2^x$, por ejemplo en $[0,2]$ y en $[2,32]$ se tiene:

$f(0)=-2$, $f(2)=28$, $f(2^5)=2^{5\cdot 5}-2^{2^5}=2^{25}-2^{32} \Rightarrow$ existen $c\in(-2,0)$, $c^*\in(2,32)$ con $f(c)=f(c^*)=0$.

---

30 $\boxed{P(x)=4x^4+2x-1}$ Como $P(-1)=1$, $P(1)=5$, Bolzano no nos dice nada inicialmente en el intervalo $[-1,1]$.
Pero es claro que $P(0)=-1$ tiene signo opuesto al de la función continua P en -1 y en 1 .
Bolzano asegura que P se anula al menos 2 veces en el intervalo $\left[\text{en } (-1,0) \text{ y en } (0,1)\right]$.

---

31 Es constante, pues si tomase dos valores distintos racionales debería tomar también los irracionales intermedios.

---

32 (No se puede aplicar Bolzano en $[0,2]$: aunque $f(0)=-1$, $f(2)=-\cos 2>0$, f no es continua en $[0,2]$).

f continua en $\left[\frac{3}{2},2\right]$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\log 2-\cos\frac{3}{2}<0$, $f(2)>0 \Rightarrow \exists c\in\left(\frac{3}{2},2\right)\subset(0,2)$ con $f(c)=0$.

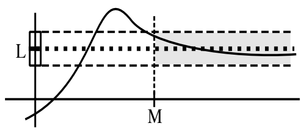
No hay mínimo en $[0,4]$, pues $f\to-\infty$ cuando $x\to 1$.

---

33 $f\underset{x\to\infty}{\to}L \Rightarrow \exists M/|f(x)-L|<1 \Rightarrow |f(x)|<1+|L|$ si $x\geq M \Rightarrow f$ acotada en $[M,\infty)$.

Y en $[a,M]$ lo está por ser continua en el intervalo cerrado.

No tiene que alcanzar su valor máximo (por ejemplo, $f(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ no lo hace).



---

34 $d\left[(c,0),(x,f(x))\right]=\sqrt{f(x)^2+(x-c)^2}\equiv d(x)$ continua en $[a,b] \Rightarrow \exists$ un x (al menos) que hace mínima esa distancia.

Si (a,b) abierto es falso: no hay punto más cercano a $(2,0)$ de la gráfica de $f(x)=1$, $x\in(0,1)$.

Para $\mathbf{R}$ cierto: $d\underset{x\to\pm\infty}{\to}\infty \Rightarrow \exists M/d(x)>d(0)$ si $|x|>M$. Entonces el mínimo de d en $[-M,M]$ será el mínimo en $\mathbf{R}$.

---

35 a) $|7x-5-(7y-5)|=7|x-y|<\varepsilon$ si $|x-y|<\delta=\varepsilon/7$, no depende del punto.

b) $\exists\varepsilon$ tal que $\forall\delta$ existen x,y con $|x-y|<\delta$ pero $|x^2-y^2|>\varepsilon$:

basta tomar $\varepsilon=1$, $x=\frac{1}{\delta}$, $y=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$, pues $|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$, pero $|x^2-y^2|=1+\frac{\delta^2}{4}>1$.

Matemáticas I (B) **Problemas adicionales 3** **17-18**

1 a) $f'(x)=\frac{2}{x[1+4(\log|x|)^2]}$, en $\mathbf{R}-\{0\}$. $f''(x)=-\frac{2[1+8\log|x|+4(\log|x|)^2]}{x^2[1+4(\log|x|)^2]^2}$, en $\mathbf{R}-\{0\}$.

b) $g'(x)=-\frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$, en $\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$. $g''(x)=\frac{8x^4-2x^2-2}{(1-x^2)^2(1-2x^2)^{3/2}}$, en $\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$.

---

2 a) $f''(x)=\frac{2(x+1)(5x-1)}{(3x+1)^{7/3}}\to x=-1,\frac15$. b) $g''(x)=-\frac{1}{1+\cos x}\to$ nunca.

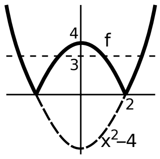
---

3 i) $f'(x)=2-\frac{3\cos x}{\operatorname{sen}^2x}=0$, $2\cos^2x+3\cos x-2=0$, $\cos x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac12,-2\to\boxed{x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi}$. [$\cos x=-2$ imposible].

ii) Mejor derivamos como producto, para evitar la aparición de $\operatorname{sen}x$ de más en numerador y denominador:

$$f''(x)=\frac{3}{\operatorname{sen}x}+\frac{6\cos^2x}{\operatorname{sen}^3x}=3\frac{\operatorname{sen}^2x+2\cos^2x}{\operatorname{sen}^3x}=3\frac{1+\cos^2x}{\operatorname{sen}^3x}\neq0$$. **No se anula** f'' para ningún x.

4



$|x^2-4|<3\Leftrightarrow -3<x^2-4<3\Leftrightarrow 1<x^2<7\Leftrightarrow 1<|x|<\sqrt7$.

$f(x)=\begin{cases}x^2-4, & \text{si } |x|\geq2\\ 4-x^2, & \text{si } |x|\leq2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x, & \text{si } |x|>2\\ -2x, & \text{si } |x|<2\end{cases}\Rightarrow$

$f'(-3)=-6$. $f'(2^-)=-4$, $f'(2^+)=4\Rightarrow\nexists f'(2)$.

---

5 $|x^2-1|<1\Leftrightarrow 0<x^2<2\Leftrightarrow |x|>0$ y $|x|<\sqrt2$. El dominio es $D=(-\sqrt2,\sqrt2)-\{0\}=(-\sqrt2,0)\cup(0,\sqrt2)$.

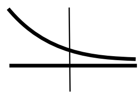
$f(x)=\begin{cases}\log(2-x^2)\,,\ 1\leq|x|<\sqrt2\\ 2\log|x|\,,\ 0<|x|\leq1\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}\frac{-2x}{2-x^2}\,,\ 1<|x|<\sqrt2\to f'(1^+)=-2\\ \frac{2}{x}\,,\ 0<|x|<1\to f'(1^-)=2\end{cases}$, $\nexists f'(1)$. $f'(-\frac43)\underset{\uparrow}{=}\frac{8/3}{2-16/9}=12$.

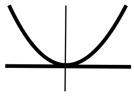
$-\sqrt2<-4/3<-1$

---

6 Falsa. Posible contrajemplo: $f(x)=0<\mathrm{e}^{-x}=g(x)\ \forall x$ pero $f'(x)=0>-\mathrm{e}^{-x}=g'(x)$.

O algo del tipo $f(x)=0\leq x^2=g(x)\ \forall x$ pero $f'(x)=0>2x=g'(x)$ para $x<0$.





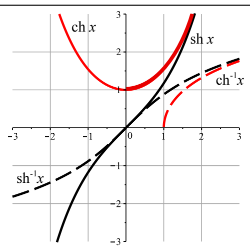
---

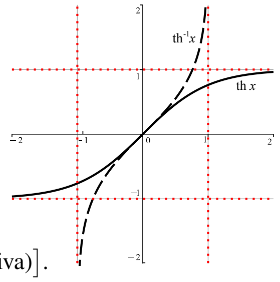
7 $f(x)=f(-x)\Rightarrow f'(x)=\frac{d}{dx}[f(-x)]=-f'(-x)$, f' impar. $f(x)=-f(-x)\Rightarrow f'(x)=-(-1)f'(-x)=f'(-x)$, f' par.

$f^{(n)}$ es par si n y f son ambas pares o ambas impares. $f^{(n)}$ es impar en los demás casos.

Si $f(x+T)=f(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)\ \forall x$, sí es periódica [veremos que para integrales en general no].

8





[ch^{-1} es la inversa de ch en $[0,\infty)$ (debe ser inyectiva)].

Sabemos que $(\mathrm{sh})'=\mathrm{ch}$, $(\mathrm{ch})'=\mathrm{sh}$,

$(\mathrm{th})'=1-\mathrm{th}^2=\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$, $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1$.

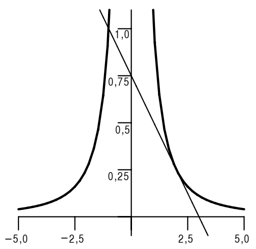
$$[\mathrm{sh}^{-1}]'=\frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{sh}^{-1}x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

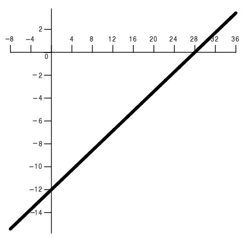
$$[\mathrm{ch}^{-1}]'=\frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{ch}^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

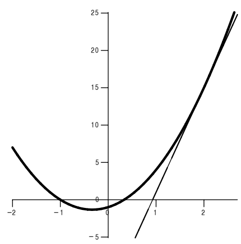
$$[\mathrm{th}^{-1}]'=\frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{th}^{-1}x)}=\frac{1}{1-x^2}$$

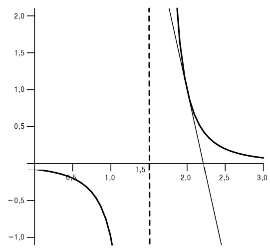
---

9 f) $y=\frac{3-x}{4}$; g) $y=\frac{3x}{7}-12$; h) $y=14x-13$; k) $y=\frac{31-14x}{3}$.









---

10 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ ($0\times$acot) $\Rightarrow f$ **continua**. $\lim\limits_{h\to0^\pm}\frac{h\arctan(\frac{1}{\operatorname{sen}h})-0}{h}=\lim\limits_{h\to0^\pm}\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sen}h}\right)=\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow f'(0)$ **no existe**.

$f'(x)=\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)+x\frac{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2x}}{1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}}=\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)-\frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^2x+1}$ si $x\neq0$. Como $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}=1$ y $\cos\frac{5\pi}{2}=0$:

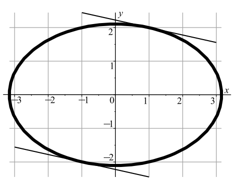
$f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{5\pi}{2}\arctan1=\frac{5\pi^2}{8}$, $f'\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$ recta tangente: $y=\frac{5\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)$, es decir, $\boxed{y=\frac{\pi}{4}x}$.

---

11 Derivando implícitamente: $8x+18yy'=0$, $y'=-\frac{4x}{9y}=-\frac29\to y=2x\to 40x^2=40$, $x=\pm1$.

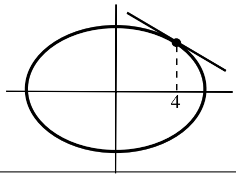
Los puntos pedidos son $\boxed{(1,2)}$ y $\boxed{(-1,-2)}$.

[Más largo es derivar explícitamente las funciones $y=\pm\frac23\sqrt{10-x^2}$].



12 Pasa por $(1,1)$ y su pendiente en 1 ha de ser 1: $\begin{matrix} b+c+1=1 \\ 2+b=1 \end{matrix} \rightarrow y=x^2-x+1$.

13



La elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ debe pasar por $(4,\frac{9}{5})$ y la pendiente de su tangente en el punto debe ser $-\frac{4}{5}$:

$$\left.\begin{matrix} y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \rightarrow \frac{9}{5}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-16} \\ \frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{25}\,,\ \frac{b}{a}=\frac{3}{5} \end{matrix}\right\} \rightarrow a=5\,,\, b=3\,,\quad \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

---

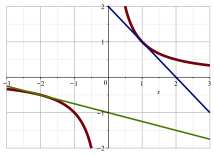
14 Derivando implícitamente: $4y^3y'-8xyy'-4y^2+2=0$, $y'=\frac{2y^2-1}{2y(y^2-2x)} \xrightarrow{(2,1)} \frac{7}{8}$. Tangente: $y=2+\frac{7}{8}(x-1)$, $\boxed{y=\frac{7x+9}{8}}$.

---

15 Ecuación de la recta tangente en $x=a$: $y=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}$.

Corta $y=\frac{1}{x}$ si y sólo si $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2=0$,

es decir, si $x=a$, $y=\frac{1}{a}$.

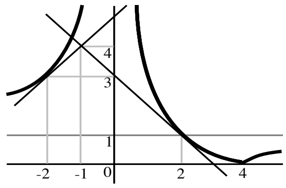


---

16 $g(x)=\begin{cases} -1+4/x\,,\ x\in(0,4] \\ 1-4/x\,,\ x\in(-\infty,0)\cup[4,\infty) \end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases} -4/x^2\,,\ x\in(0,4) \\ 4/x^2\,,\ x\in(-\infty,0)\cup(4,\infty) \end{cases}$

Rectas tangentes: $y=x+5$, $y=-x+3$. Corte: $(-1,4)$.



---

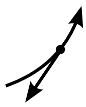
17 $f'(x)=\frac{e^{\operatorname{sen}x}\cos x}{1+e^{\operatorname{sen}x}}$. $f'(0)=\frac{1}{2}$. Recta pedida: $y=3+\frac{1}{2}(x-4)=1+\frac{x}{2}$.

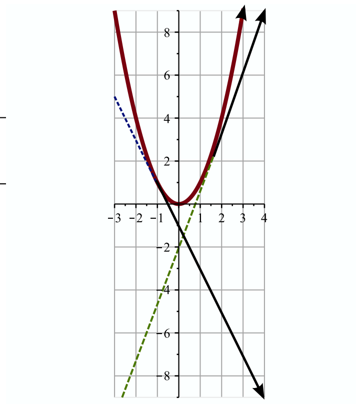
---

18 Ecuación de la recta tangente en $x=a$: $y=2a(x-a)=2ax-a^2$.

i) deber ser: $9=8a-a^2 \rightarrow a=4\pm\sqrt{7}$; sólo vale $\boxed{4-\sqrt{7}} \approx 1.35$.

ii) $-9=8a-a^2 \rightarrow a=9\,,\ \boxed{-1}$ única que vale.

(sobre las otra dos rectas tangentes el cohete retrocedería en sentido opuesto  !!)



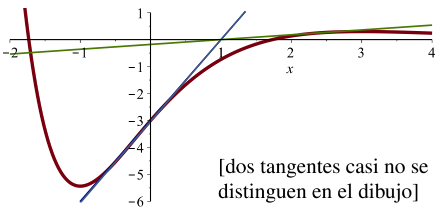
---

19 $\boxed{f(x)=(x^2-3)\,e^{-x}}$ $f'(a)=-(a-3)(a+1)\,e^{-a}$.

Recta tangente en $x=a$: $y=(a^2-3)\,e^{-a}-(a-3)(a+1)\,e^{-a}(x-a)$.

Pasa por $(1,0)$ si $a^3-2a^2-a=0 \Rightarrow$ $\boxed{a=0,\ a=1\pm\sqrt{2}}$

$\left[\,f(0)=-3\,,\ f(-1)=-2e\,,\ f(3)=\frac{6}{e^3}\,;\ f\underset{x\to\infty}{\rightarrow}0\,,\ f\underset{x\to-\infty}{\rightarrow}\infty\,\right]$.



[dos tangentes casi no se distinguen en el dibujo]

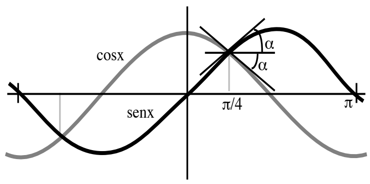
---

20 $\cos x=\operatorname{sen}x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. Pendientes de las tangentes en $x=\frac{\pi}{4}$:

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x|_{x=\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{d}{dx}\cos x|_{x=\pi/4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ángulo que forman: $2\alpha=2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}=\arctan 2\sqrt{2}$ [≈ 1.23 rad $\approx 70.53^o$].

[Análogamente en $-\frac{\pi}{4}$, y en los demás puntos por periodicidad].



---

21 $\boxed{f(x)=3+x^5(x-3)^4}$ f continua, derivable, $f(0)=f(3)=3$ y el cero de f' es consecuencia del teorema de Rolle.

Directamente: $f'(x)=x^4(x-3)^3(9x-15)=0 \rightarrow x=\frac{5}{3}\in(0,3)$.

---

22 Queremos hacer pequeño $|f(x)-f(y)|$ con $x,y\in I$, independientemente del x e y elegidos. Aplicando el TVM a f (derivable y, por tanto, continua) en el intervalo $[x,y]$ (o al $[y,x]$ si $x>y$), tenemos que $\exists c\in(x,y)$ tal que $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x) \Rightarrow |f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\leq M|x-y|$, con $M=\sup|f'|$ en I, que existe por ser f' acotada.

Por tanto, $\forall\varepsilon\ \exists\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ tal que $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ si $|x-y|<\delta\ \forall x,y\in I$.

En particular, para $f(x)=(1+x^2)^{-1}$, $f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow M=\left|f'(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})\right|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

---

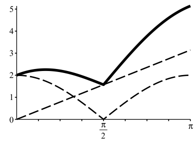
23 $\boxed{f(x)=x+2\cos x}$ continua en el intervalo cerrado $[0,1] \Rightarrow$ el mínimo existe.

Como $f'(x)=1-2\operatorname{sen}x$ sólo se anula en $[0,1]$ para $x=\frac{\pi}{6}$ y es $f'(x)>0$ en $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ y $f'(x)<0$ en $\left(\frac{\pi}{6},1\right]$, el valor mínimo se alcanzará en uno de los extremos del intervalo $\left[x=\frac{\pi}{6}\right.$ valor máximo$\left.\right]$. Será:

$f(0)=\boxed{2}<f(1)=1+2\cos 1$, pues $\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ $\left[\right.$o porque veremos que $\cos 1=1-\frac{1}{2}+\cdots>\frac{1}{2}\left.\right]$.

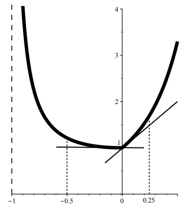
$f'(x)\geq 1-2\operatorname{sen}\frac{1}{2}>0$ si $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \Rightarrow$ existe f^{-1}. Como $f^{-1}(2)=0$ $\left[\right.$es $f(0)=2\left.\right]$: $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(0)}=\boxed{1}$.

24 a) $f(x)=\begin{cases} x+2\cos x, & x\in[0,\pi/2]\\ x-2\cos x, & x\in[\pi/2,\pi]\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}1-2\,\mathrm{sen}\,x, & x\in[0,\pi/2)\\ 1+2\,\mathrm{sen}\,x, & x\in(\pi/2,\pi]\end{cases}$. No $\exists f'(\frac{\pi}{2})$. $f'(\frac{\pi}{6})=0$.



$f(0)=2$, $f(\pi)=\pi+2$, $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$. Mínimo en $\frac{\pi}{2}$ y máximo en π.

b) $g'(x)=\begin{cases} xe^x/(1+x)^2, & x<0\\ (2-x)e^x/(1+x)^2, & x<0\end{cases}$. $g'(0^+)=2$, $g'(0^-)=0 \Rightarrow$ no es derivable en $x=0$.



$g'(x)\neq 0$ en $[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}]-\{0\}$. g decrece en $[-\frac{1}{2},0]$ y crece en $[0,\frac{1}{4}]$ $\Rightarrow x=0$ es el mínimo.

$g(-\frac{1}{2})=2e^{-1/2}<\frac{4}{3}e^{1/4}=g(\frac{1}{4}) \Leftrightarrow e^{3/4}=1+\frac{3}{4}+\cdots>\frac{3}{2} \Rightarrow$ máximo en $x=\frac{1}{4}$.

c) $\mathrm{dom}\,h=[-1,1]$ en el que h es continua $\Rightarrow \exists$ máx y mín. $h'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\sqrt{3}}{2-x}$ $\forall x\in(-1,1)$.

$h'(x)=0 \Rightarrow (2-x)^2=3(1-x^2) \to x=\frac{1}{2}$. Los valores extremos se pueden tomar en:

$h(1)=\frac{\pi}{2}\approx 0.33$, $h(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\log\frac{3}{2}\approx 1.23$, $h(-1)=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}\log 3\approx 1.57$. Máximo en 1 y mínimo en -1.

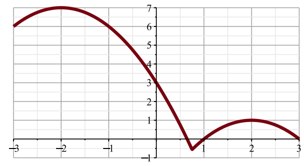
---

25 $f(x)=|4x-3|-x^2=\begin{cases}-x^2+4x-3, & x\geq 3/4\\ -x^2-4x+3, & x\leq 3/4\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}4-2x, & x>3/4\\ -4-2x, & x<3/4\end{cases}$, $f'(x)=0:$ $\begin{matrix}x=2\\ x=-2\end{matrix}$ [valen, están en los intervalos].

Candidatos:
- Extremos intervalo: $f(-3)=6$, $f(3)=0$
- Puntos sin derivada: $f(\frac{3}{4})=-\frac{9}{16}$
- Puntos con $f'=0$: $f(2)=1$, $f(-2)=7$

Valor máximo $\boxed{7}$

Valor mínimo $\boxed{-\frac{9}{16}}$



$f(0)=3$, $f(\frac{2}{3})=-\frac{1}{9} \overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}$ existe al menos un x con $f(x)=0$ [único pues $f'<0$ en $(0,\frac{2}{3})$].

[Se puede calcular: $-x^2-4x+3=0 \to x=-2\pm\sqrt{7}$ y $0<-2+\sqrt{7}<\frac{2}{3}$ pues $2<\sqrt{7}<\frac{8}{3} \Leftrightarrow 4<7<\frac{64}{9}$].

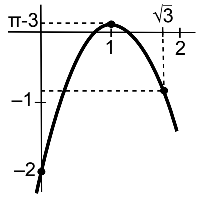
---

26 $\boxed{f(x)=4\arctan x-x^2-2}$. $f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-2x=-2\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{1+x^2}$

$\Rightarrow$ crece en $(-\infty,1]$ y decrece en $[1,\infty)$. Máximo $f(1)=\boxed{\pi-3}$.

El mínimo es $f(0)=\boxed{-2}$, pues $f(\sqrt{3})=\frac{4\pi}{3}-5>4-5=-1$.

f continua, $f(0)<0$, $f(1)>0 \overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow} f$ se anula. 1 vez por ser estrictamente creciente.



---

27 i) $x-4+\frac{4}{x}=\frac{(x-2)^2}{x}\geq 0$ si $x>0$. ii) $f(x)=x+\frac{4}{x}$, $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$, f decrece en $(0,2)$, $f(2)=4$ y crece en $(4,\infty)$.

---

28 $\boxed{f(x)=\arctan\frac{2}{x-3}}$ **a]** Si $x\neq 3$ seguro que f es continua y derivable (composición de funciones C^∞).

$\lim\limits_{x\to 3^+} f=\frac{\pi}{2}$ ["$\arctan(\infty)$"], $\lim\limits_{x\to 3^-} f=-\frac{\pi}{2}$ ["$\arctan(-\infty)$"] $\Rightarrow f$ discontinua en $x=3 \Rightarrow f$ no derivable en $x=3$.

b] $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\arctan 0=\boxed{0}$. **c]** $f(x)\neq 0\ \forall x$ pues $\frac{2}{x-3}\neq 0$ [$f(1)=-\frac{\pi}{4}$ y $f(5)=\frac{\pi}{4}$, pero no se puede usar Bolzano].

c] Si $x\neq 3$, $f'(x)=\frac{-2(x-3)^{-2}}{1+4(x-3)^{-2}}=\frac{-2}{(x-3)^2+4}<0 \overset{\text{en }[4,\infty)}{\Longrightarrow} f$ estrictamente decreciente $\Rightarrow f$ inyectiva $\Rightarrow$ existe f^{-1}.

$$(f^{-1})'(\tfrac{\pi}{4})=\frac{1}{f'(f^{-1}(\pi/4))}\overset{f(5)=\pi/4}{=}\frac{1}{f'(5)}=\boxed{-4}.$$

[Excepcionalmente se puede hallar f^{-1}: $y=\arctan\frac{2}{x-3}$, ;$x=3+\frac{2}{\tan y} \Rightarrow f^{-1}(x)=3+\frac{2\cos x}{\mathrm{sen}\,x} \Rightarrow (f^{-1})'(\frac{\pi}{4})=\frac{-2}{\mathrm{sen}^2 x}\Big|_{x=\pi/4}=-4$].

---

29 $\boxed{f(x)=x^2-\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x}$ par. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=\infty$. $f(0)=-1$. $f(2)>0$. $f'(x)=x(2-\cos x)<0$ si $x<0$ y si $x>0$ es $f'>0$.

Tiene sólo dos ceros no calculables exactamente en dos puntos $\pm c$ [uno en $(0,2)$ y el otro el simétrico].

---

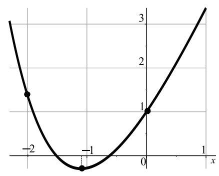
30 a) $\boxed{f(x)=e^{\mathrm{sen}\,x}-x-1}$. $f(\frac{\pi}{2})=e-\frac{\pi}{2}-1>0$, $f(\pi)=-\pi<0$ y f continua $\overset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}$ se anula al menos una vez.

Como además $f'(x)=\cos x\, e^{\mathrm{sen}\,x}-1<0$ en $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ($\cos x$ es negativo y la exponencial es positiva), f es estrictamente decreciente en $[\frac{\pi}{2},\pi]$ y, por tanto, se anula exactamente una vez.

b) $\boxed{g(x)=e^{-x}+3x}$ $g'(x)=-e^{-x}+3=0$ si $x=-\log 3$. Antes g decrece y luego crece.

$g(-2)=e^2-6>\frac{25}{4}-6>0$, $g(0)=1>0$ (el teorema de Bolzano, solo, no nos dice nada).

Como $g(-\log 3)=3(1-\log 3)<0$ ó $g(-1)=e-3<0$ (por ser $e<3$), la función se anula exactamente **2 veces** en el intervalo [un cero está en $(-2,-\log 3)$ y otro en $(-1,0)$].



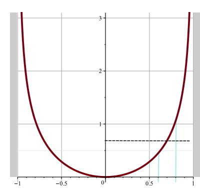
---

31 $\mathrm{dom}\,f=(-1,1)$. $f'(x)=2x(1-x^2)^{-1/2}+x^3(1-x^2)^{-3/2}=\frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}} \Rightarrow \begin{matrix}f \text{ decrece en } (-1,0]\\ f \text{ crece en } [0,1)\end{matrix}$

[No era necesario derivar. En $[0,1)$ claramente el numerador crece y el denominador decrece, y f es par].

f continua en $[\frac{3}{5},\frac{4}{5}] \Rightarrow$ toma todos los valores comprendidos entre $f(\frac{3}{5})=\frac{9}{20}$ y $f(\frac{4}{5})=\frac{16}{15}$. En particular $\exists c\in(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ en el que toma el valor $\frac{2}{3}$ (es $\frac{9}{20}<\frac{2}{3}<\frac{16}{15}$). Al ser f creciente en ese intervalo, c es único.

[Podemos hallar el c: $f(c)=\frac{2}{3} \Rightarrow 9c^4+4c^2-4=0$, $c^2=\frac{-1\pm\sqrt{4+36}}{9}$, $c=\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{10}-2}$].



32 $\boxed{\begin{array}{c}P(x)=x^5+3x^4-7x^3-21x^2+10x+30\\ Q(x)=x^3-3x^2-5x+15\end{array}}$

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
1 & 3 & -7 & -21 & 10 & 30 & 1 & -3 & -5 & 15\\
-1 & 3 & 5 & -15 & & & 1 & 6 & 16 & \\
\hline
 & 6 & -2 & -36 & 10 & & & & & \\
 & -6 & 18 & 30 & -90 & & & & & \\
\hline
 & & 16 & -6 & -80 & 30 & & & & \\
 & & -16 & 48 & 80 & -240 & & & & \\
\hline
 & & & 42 & 0 & -210 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & -3 & -5 & 15 & 1 & 0 & -5\\
-1 & 0 & 5 & & 1 & -3 & \\
\hline
 & -3 & 0 & 15 & & & \\
 & 3 & 0 & -15 & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & & &
\end{array}$$

$\boxed{\text{mcd}=x^2-5}\leftarrow$

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
1 & 3 & -7 & -21 & 10 & 30 & 1 & 0 & -5 & \\
-1 & 0 & 5 & & & & 1 & 3 & -2 & 6\\
\hline
 & 3 & -2 & -21 & & & & & & \\
 & -3 & 0 & 15 & & & & & & \\
\hline
 & & -2 & -6 & 10 & & & & & \\
 & & 2 & 0 & -10 & & & & & \\
\hline
 & & & -6 & 0 & 30 & & & &
\end{array}$$

$\frac{P}{x^2-5}=x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(x^2-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -2 & -6\\
-3 & & -3 & 0 & 6\\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 0
\end{array}$$

o a ojo

$\frac{Q}{x^2-5}=(x-3)(x^2-5)$ a ojo

$\boxed{\text{Raíces de } P: -3,\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{5},-\sqrt{5}}$

$\boxed{\text{Raíces de } Q: 3,\sqrt{5},-\sqrt{5}}$

$P\times Q$	1	3	−7	−21	10	30
1	1	3	−7	−21	10	30
−3	−3	−9	21	63	−30	−90
−5	−5	−15	35	105	−50	−150
15	15	45	−105	−315	150	450

$\boxed{P\times Q=x^8-21x^6+153x^4-455x^2+450}$

$=(x^2-3)(x^2-2)(x^2-5)^2$

(lo que simplificaría el cálculo)

$\boxed{\frac{P}{Q}=\frac{x^3+3x^3-2x-6}{x-3}=x^2+6x+16+\frac{42}{x-3}}$

Ya teníamos una expresión mucho más fea:

$\frac{P}{Q}=x^2+6x+16+\frac{42(x^2-5)}{Q}$.

---

33 $\boxed{P=2x^5+3x^4+4x^3+6x^2+2x+3}$, $P'=2\big[5x^4+6x^3+6x^2+6x+1\big]$, $R_1=11x^3+36x^2+11x+36$, $R_2=x^2+1$, $R_3=0$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrrrr}
 & 2 & 3 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 6 & 6 & 6 & 1\\
\text{x }5 & 10 & 15 & 20 & 30 & 10 & 15 & 2 & 3 & & & \\
 & -10 & -12 & -12 & -12 & -2 & & & & & & \\
\hline
 & & 3 & 8 & 18 & 8 & 15 & & & & & \\
\text{x }5 & & 15 & 40 & 90 & 40 & 75 & & & & & \\
 & & -15 & -18 & -18 & -18 & -3 & & & & & \\
\hline
 & & & 22 & 72 & 22 & 72 & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
 & 5 & 6 & 6 & 6 & 1 & 11 & 36 & 11 & 36\\
\text{x }11 & 55 & 66 & 66 & 66 & 11 & 5 & -114 & & \\
 & -55 & -180 & -55 & -180 & & & & & \\
\hline
 & & -114 & 11 & -114 & 11 & & & & \\
\text{x }11 & & -1254 & 121 & -1254 & 121 & & & & \\
 & & 1254 & 114\text{x}36 & 1254 & 114\text{x}36 & & & & \\
\hline
 & & & * & 0 & * & & & &
\end{array}
\qquad * = 114\text{x}36+121$$

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
11 & 36 & 11 & 36 & 1 & 0 & 1\\
-11 & 0 & -11 & & 11 & 36 & \\
\hline
 & 36 & 0 & 36 & & & \\
 & -36 & 0 & -36 & & & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & & &
\end{array}$$

mcd $(P,P')=x^2+1 \Rightarrow \pm\mathrm{i}$ raíz múltiple $\Rightarrow P(x)=\big(x^2+1\big)^2Q(x)$. A simple vista o dividiendo: $Q=2x+3$.

Las 5 raíces son: $\boxed{+\mathrm{i},-\mathrm{i},+\mathrm{i},-\mathrm{i},-\frac{3}{2}}$.   [Como $x=-1$ es raíz fácil de P' y no de P se podrían hacer atajos].

---

34 $|c|\le\frac{1}{|a_n|}\big[|a_0||c|^{1-n}+|a_1||c|^{2-n}+\cdots+|a_{n-1}|\big]$. Si $|c|\ge 1$, $|c|\le\frac{1}{|a_n|}\big[|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|\big]$, y si $|c|\le 1$ está claro.

---

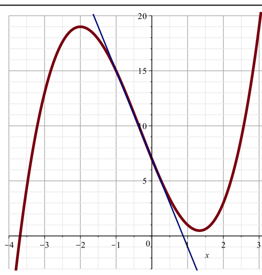
35 $P'=3x^2+2x-8 \to P(x)=x^3+x^2-8x+C$.

Recta tangente en $x=0$: $y=C-8x$ pasa por $(1,-1)\to C=7$.

$\boxed{P(x)=x^3+x^2-8x+7}$ tiene 0 ó 2 raíces positivas $[++-+]$ y 1 negativa $[-+++]$.

$P'(x)=(3x-4)(x+2) \Rightarrow$ el mínimo de P está en $x=\frac{4}{3}$. $P(\frac{4}{3})=\frac{13}{27}>0$.

P tiene sólo 1 raíz $\big($negativa; está entre -4 y -3, pues $P(-4)=-9$, $P(-3)=13\big)$.



---

36 a) $\boxed{P(x)=3x^3-x^2+x-1}$ Descartes: $----$ $\to$ no hay raíces reales en $(-\infty,0)$.

máx$\big\{1,\frac{1}{3}[1+1+1]\big\}\to$ raíces con $|x|<1\to$ no hay raíces reales en $(1,\infty)$.

O como $P'=9x^2-2x+1>0$ (crece) y $P(1)=2^{\nearrow}$ [Hay 1 raíz en $(0,1)$].

b) $\boxed{P(x)=x^4+x^3+x^2+x}$ $+-+-0$ $\to$ 1 ó 3 ?? raíces reales en $(-\infty,0)$.

$++++0$ $\to$ no hay raíces reales en $(0,\infty)\to$ no las hay en $(0,1)$.

Pero es muy fácil de resolver: raíces 0, -1, $\pm\mathrm{i}$.

c) $\boxed{P(x)=x^4+8x-1}$ $+00--$ $\to$ 1 negativa. $P(-3)>0$, $P(-2)<0$. Está en $(-3,-2)$.

$+00+-$ $\to$ 1 positiva. $P(0)<0$, $P(1)>0$. Está en $(0,1)$.

d) $\boxed{P(x)=2x^5+8x^3+5x-6}$ $----$ $\to$ sin raíces en $(-\infty,0)$.

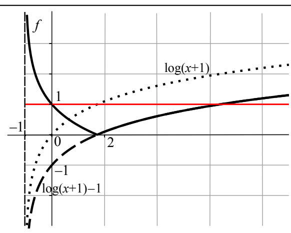
$++++$ $\to$ hay 1 en $(0,\infty)$.   [Sin Descartes: $P(0)<0$, $P\underset{x\to\infty}{\to}\infty$ y $P'>0\;\forall x$].

---

37 El dominio de f es $(-1,\infty)$. La gráfica de $\log(x+1)$ es la del logaritmo trasladada uno hacia la izquierda. $\log(x+1)-1$ es la anterior, llevada 1 hacia abajo. El $|\cdot|$ refleja hacia arriba la parte de la última gráfica que queda por debajo del eje x.

$\big|\log(x+1)-1\big|<1 \Leftrightarrow -1<\log(x+1)-1<1 \Leftrightarrow 0<\log(x+1)<2$

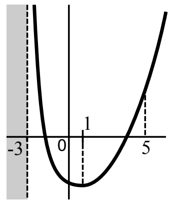
$\underset{\mathrm{e}^x\text{ creciente}}{\Leftrightarrow}\; 1<x+1<\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow \boxed{0<x<\mathrm{e}^2-1}$.



38 **a]** $g(-2)=4$. $g'(x)=2x-\frac{8}{x+3}$, $g'(-2)=-22$. Recta tangente: $y=4-12(x+2)$, ó $\boxed{y=-20-12x}$.

b] $g'(x)=\frac{2(x+4)(x-1)}{x+3}\ \begin{array}{l}<0 \text{ en } (-3,1)\\ >0 \text{ en } (1,\infty)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} g \textbf{ decrece} \text{ estrictamente en } (-3,1] \\ g \textbf{ crece} \text{ estrictamente en } [1,\infty)\end{array}$. $g''(x)=2+\frac{8}{(x+3)^2}>0\ \forall x$.

c] $\lim\limits_{x\to-3^+} g(x) \underset{9+\infty}{=} \boxed{\infty}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8\log(x+3)}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x(x+3)}=0 \Rightarrow x^2\big[1-\frac{8\log(x+3)}{x^2}\big] \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{\infty}\ \ [\infty\times 1]$.



d] $g(0)=-8\log 3<0$, $g(5)=25-24\log 2>0$ $\big($es $\log 2<1<\frac{25}{24}\big)$ y g continua en $[0,5]$
$\Rightarrow$ existe algún $c\in(0,5)$ tal que $g(c)=0$ (teorema de Bolzano).

A la vista de **b]**, **c]** y **d]**, g **se anula exactamente 2 veces** en su dominio $(-3,\infty)$.

---

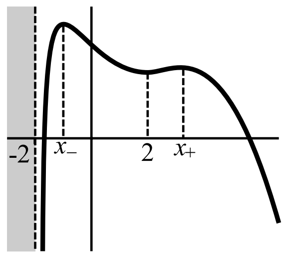
39 $\boxed{g(x)=4\log(x^3+8)-3x}$ **a]** Definida si $x^3+8>0 \Leftrightarrow x^3>-8 \underset{x^3 \text{ creciente}}{\Longleftrightarrow} x>-2 \Rightarrow \boxed{\operatorname{dom} g=(-2,\infty)}$.

b] Como es continua en todo el dominio, lo es en particular en $[0,2]$ y existirán ambos valores extremos.

$$g'(x)=\frac{12x^2}{x^3+8}-3=-3\frac{x^3-4x^2+8}{x^3+8}=-\frac{3(x-2)(x^2-2x-4)}{x^3+8}=-\frac{3(x-x_-)(x-2)(x-x_+)}{x^3+8},$$

con $x_\pm=1\pm\sqrt{5}\ \begin{array}{l}>3\\ \in(-2,-1)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} g \text{ crece en } (-2,x_-] \text{ y en } [2,x_+] \\ g \text{ decrece en } [x_-,2] \text{ y en } [x_+,\infty)\end{array}$

Como g decrece en $[0,2]$: **Valor máximo** $=g(0)=12\log 2$.
Valor mínimo $=g(2)=16\log 2-6$.



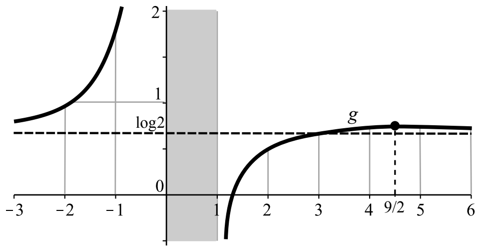
$\big[$Sin usar el decrecimiento, era fácil ver cuál era mayor: $g(0)>g(2) \Leftrightarrow 4\log 2<6$, claro, pues $2<\mathrm{e}\big]$.

c] $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\log(x^3+8)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{x+8x^{-2}}=0 \Rightarrow x\big[\frac{4\log(x^3+8)}{x}-3\big] \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \boxed{-\infty}\ \ [\infty\times(-3)]$.

Se anula 1 vez en $[0,\infty)$, ya que decrece hasta el valor mínimo $g(2)>0$ $\big[$pues $\log 2>\log \mathrm{e}^{1/2}>\frac{3}{8}\big]$, luego crece hasta $g(x_+)>0$ y decrece estrictamente hacia $-\infty$, y así habrá un único corte en $[x_+,\infty)$.

---

40 $\boxed{g(x)=\log\big(2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\big)}$ a) $\frac{2x^3+x-3}{x^3}=\frac{(x-1)(\overset{>0}{2x^2+2x+3})}{x^3}>0 \Rightarrow$
$\operatorname{dom} g=\boxed{(-\infty,0)\cup(1,\infty)}$.



$g(x)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\log 2$. $g(x)\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}-\infty\ [\log(+0)]$. $g(x)\underset{x\to0^-}{\longrightarrow}\infty\ [\log\infty]$.

b) $g'(x)=\frac{-2/x^3+9/x^4}{2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{9-2x}{x(x-1)(2x^2+2x+3)} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{crece en } (-\infty,0) \text{ y } \big(1,\frac{9}{2}\big] \\ \text{y decrece en } \big[\frac{9}{2},\infty\big).\end{array}$

Valor **máximo** $g\big(\frac{9}{2}\big)=\log\frac{490}{243}$. Valor **mínimo** $g(3)=\log 2<g(6)$.

c) Viendo la gráfica: g estrictamente creciente en $(1,3]$, $g\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}-\infty$ y $g(3)>0 \Rightarrow 1$ **único cero** en $(1,3)$.

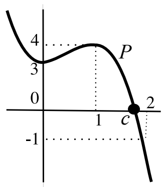
$g(x)=0 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}=1 \Leftrightarrow P(x)=x^3+x-3=0$ también implica único corte pues $P'(x)=3x^2+1 \Rightarrow$
P creciente, $P(1)=-1$, $P(2)=7 \Rightarrow$ único cero de P en $(1,2)$ (dentro del dominio).

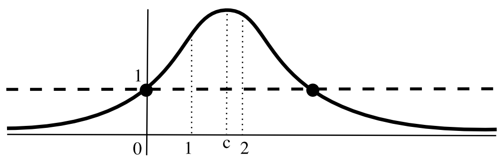
---

41 $\boxed{f(x)=(x^2+1)\,\mathrm{e}^{3x-x^2}}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{\mathrm{e}^{x^2-3x}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{2x-3}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{x^2-3x}}=0$.

$f'(x)=(3+3x^2-2x^3)\,\mathrm{e}^{3x-x^2}$ continua, $f'(1)=4\mathrm{e}^2$, $f'(2)=-\mathrm{e}^2 \overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} f'=0$ en algún $c\in(1,2)$.

$f'=0 \Leftrightarrow P(x)=3+3x^2-2x^3=0$. $P'=6x(x-1)$
$\Rightarrow P$ crece en $[0,1]$ y decrece en el resto;
$P(0)=3$, $P(1)=4$, $P(2)=-1$
$\Rightarrow P$ se anula sólo en el $c\in(1,2)$.





Con $f(0)=1$ y los cálculos anteriores, la gráfica de f es más o menos $\nearrow$. $f(x)=1$ exactamente en 2 puntos.

---

42 **a]** $a_n=\frac{2}{(\sqrt{3}/2)^n+1}\to 2 \overset{h \text{ cont. en } 2}{\Longrightarrow} h(a_n)\to h(2)=\boxed{15\mathrm{e}^{-2}}$.

b] i) Existen seguro los valores extremos porque h es continua en el intervalo cerrado.

$h'(x)=-(x-2)(\underset{>0}{x^2-x+1})\,\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow \begin{array}{l} h \text{ crece en } (-\infty,2] \\ h \text{ decrece en } [2,\infty)\end{array} \Rightarrow$ **Valor máximo** $=g(2)=\boxed{15\,\mathrm{e}^{-2}}$.

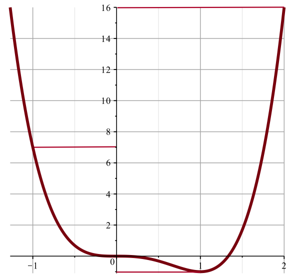
El mínimo será $h(0)=1$ o $h(3)=\frac{37}{\mathrm{e}^3}$. Como $\mathrm{e}<3$, es mayor $h(3)$. **Valor mínimo** $=h(0)=\boxed{1}$.

ii) En $[0,\infty)$ pueden no existir los valores extremos. Por el crecimiento, $h(2)$ sigue siendo el valor máximo.

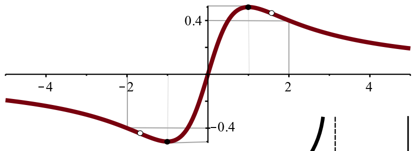
$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)\overset{\text{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+3}{\mathrm{e}^x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{\mathrm{e}^x}\overset{\text{L'H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{\mathrm{e}^x}=0 \Rightarrow$ el **mínimo no existe** [0 es el ínfimo, pero no se alcanza].

c] h continua en todo $\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)\underset{(-\infty)\infty}{=}-\infty$ y $h(2)$ máximo absoluto $\Rightarrow \operatorname{im} h=\boxed{\big(-\infty,15\,\mathrm{e}^{-2}\big]}$.

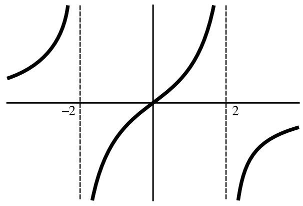
43 a) $\boxed{y=3x^4-4x^3}$ $y'=12x^2(x-1)$, $y(1)=-1$, $y''=12x(3-2x)$, $y(\frac{2}{3})=-\frac{16}{27}$.
$y(-1)=7$, $y(\frac{4}{3})=0$, $y(2)=16$.



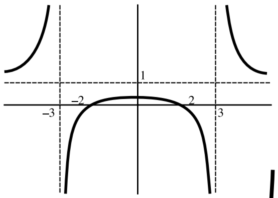
b) $\boxed{y=\frac{x}{x^2+1}}$ $y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $y''=\frac{2x^2-6x}{(1+x^2)^3}$
impar. $y(1)=\frac{1}{2}$, $y(2)=\frac{2}{5}$.



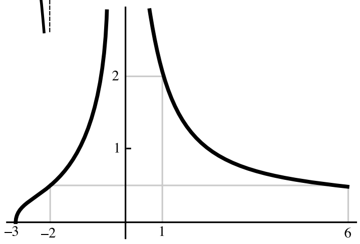
c) $\boxed{y=\frac{x}{4-x^2}}$ Impar. $y'=\frac{x^2+4}{(4-x^2)^2}$. $y''=-\frac{2x(x^2+12)}{(4-x^2)^3}$.
$y\xrightarrow[x\to\infty]{}0$. $y\xrightarrow[x\to2^\pm]{}\mp\infty$.



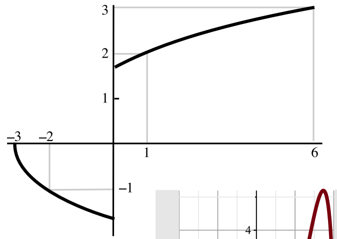
d) $\boxed{y=\frac{x^2-4}{x^2-9}}=1-\frac{5}{x^2-9}$. $y\xrightarrow[x\to3^\pm]{}\pm\infty$.
Par. $y'=\frac{-10x}{(x^2-9)^2}$. $y=0$ si $x=\pm2$.



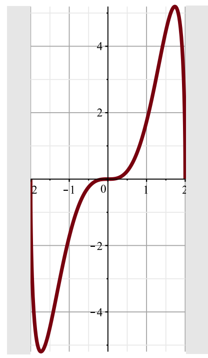
e) $\boxed{y=\sqrt{\frac{x+3}{x^2}}}=\frac{\sqrt{x+3}}{|x|}$. $y'=-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{x+3}\right]^{1/2}\frac{x+6}{x^3}$
$y'=\frac{|x|}{[x+3]^{3/2}}\frac{3}{4x^4}(x^2+12x+24)$, $-6+2\sqrt{3}$ inflexión.



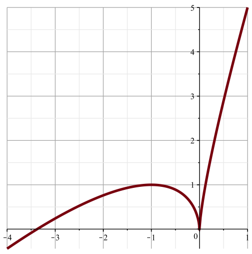
f) $\boxed{y=x\sqrt{\frac{x+3}{x^2}}}=\begin{cases}\sqrt{x+3}, x>0\\ -\sqrt{x+3}, x<0\end{cases}$



g) $\boxed{y=x^3\sqrt{4-x^2}}$ impar. $D=[-2,2]$. $y(0)=y(2)=0$.
$y'=\frac{4x^2(3-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}\xrightarrow[x\to2^-]{}-\infty$. $y(1)=\sqrt{3}$; $y(\sqrt{3})=3\sqrt{3}$.



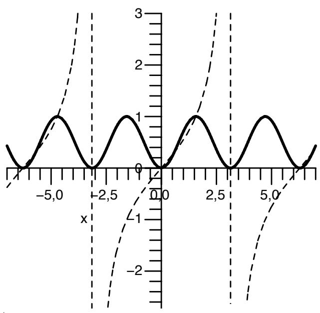
h) $\boxed{y=3x^{2/3}+2x}=x^{2/3}(3+2x^{1/3})\xrightarrow{x\to\pm\infty}\pm\infty$. $y\geq0\Leftrightarrow x\geq-\frac{27}{8}$.
$y'=2[x^{-1/3}+1]\xrightarrow{x\to0^\pm}\pm\infty$. y decrece en $(-1,0)$ y crece en el resto.
$y'(-1)=0$, $y(-1)=1$. $y''=-\frac{2}{3}x^{-4/3}$ siempre $\cap$.

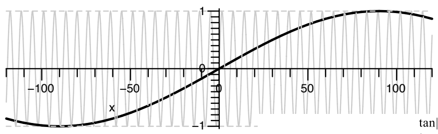


i) $\boxed{y=\text{sen}^2x}$ periodo π, sin picos

j) $\boxed{y=\tan\frac{x}{2}}$ asíntotas en $k\pi$.

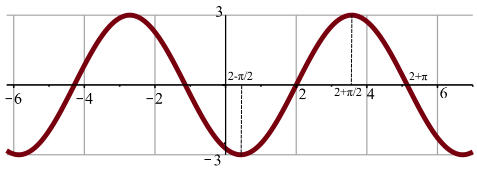
l) $\boxed{y=\text{sen}\,\frac{\pi x}{180}}$ seno en grados
$f(90)=1$, $f'(0)\neq1$.



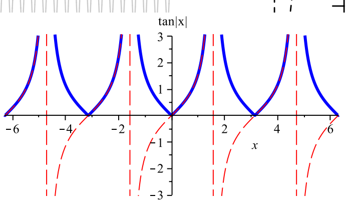


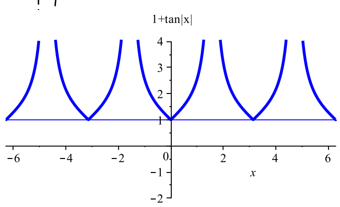
k) $\boxed{y=3\,\text{sen}(x-2)}$

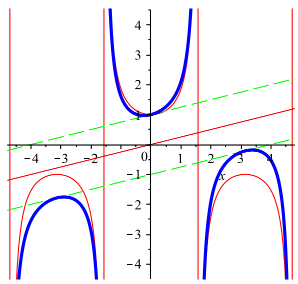
El seno, 2 a la derecha y 3 veces más alta.



m) $\boxed{y=1+|\tan x|}$

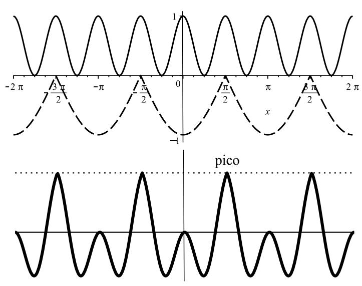




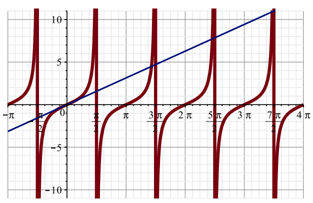


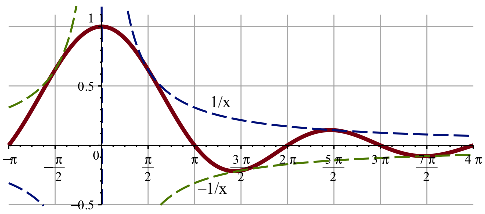
n) $\boxed{y=\frac{x}{4}-\frac{1}{\cos x}}$ Sumando las gráficas de $\frac{x}{4}$ y de $\frac{1}{\cos x}=\sec x$ (par y con asíntotas en $\frac{\pi}{2}+k\pi$):

ñ) $\boxed{y=\cos^2 2x-|\cos x|}$



o) $\boxed{y=\frac{\text{sen}\,x}{x}}\xrightarrow[x\to0]{}1$. Par.
Corta en $k\pi$. En $\frac{\pi}{2}+k\pi$ toca $\pm\frac{1}{x}$.
$y'=\frac{\cos x}{x}-\frac{\text{sen}\,x}{x^2}=0$ si $\tan x=x$.



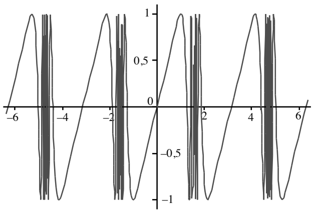


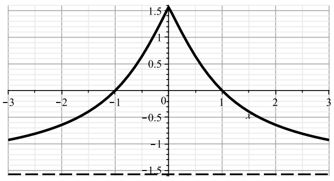
más 43 p) $\boxed{y=\operatorname{sen}(\tan x)}$

impar y π-periódica

$\operatorname{dom}=\{x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\}$

[oscila infinitas veces en las cercanías de cada uno de esos puntos].





q) $\boxed{\operatorname{arc\,sen}\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ par

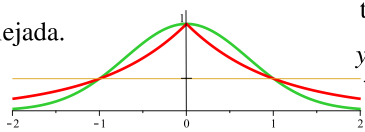
$y(0)=\frac{\pi}{2}$, $y(1)=0$, $\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}-\frac{\pi}{2}$

$y'=\frac{-2x}{|x|(1+x^2)}$, $y'(0^+)=-2$.

r) $\boxed{y=\mathrm{e}^{-|x|}}$ par. Gráfica de e^{-x} reflejada.

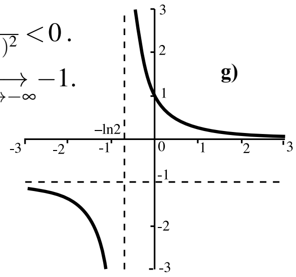
s) $\boxed{y=\mathrm{e}^{-x^2}}$ par. $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

$y''=(4x^2-2x)\mathrm{e}^{-x^2}$.



t) $\boxed{y=\frac{1}{2\mathrm{e}^x-1}}$. $y'=\frac{-2\mathrm{e}^x}{(2\mathrm{e}^x-1)^2}<0$.

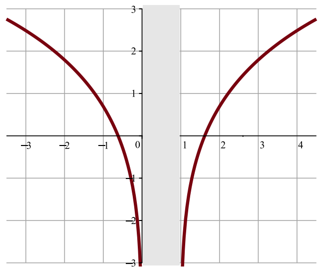
$y\underset{x\to-\ln 2^{\pm}}{\longrightarrow}\pm\infty$, $y\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$, $y\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-1$.



u) $\boxed{y=\log(x^2-x)}$ dom $=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.

$y'=\frac{2x-1}{x^2-x}$. $y\underset{x\to 1^+}{\longrightarrow}-\infty$. $y\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}-\infty$. $y\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\infty$.

$y=0$ si $x^2-x=1$, $x=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{5}\right]$.



v) $\boxed{y=x\log|x-2|}$. dom $=\mathbf{R}-\{2\}$.

$y\underset{x\to 2}{\to}-\infty$ $[2\times(-\infty)]$, $y\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\pm\infty$ $[(\pm\infty)\times\infty]$.

$y(0)=y(1)=y(3)=0$, $-y(-2)=y(4)=4\log 2\approx 2.8$

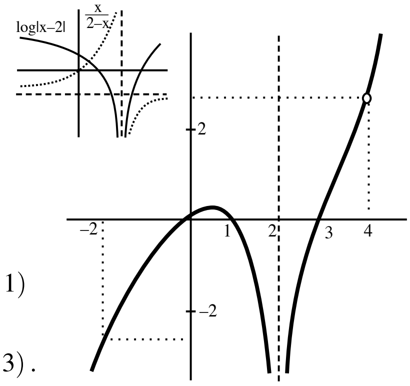
[Según Rolle hay al menos un cero de k' en $(0,1)$].

$y'=\log|x-2|+\frac{x}{x-2}$; $y''=\frac{x-4}{[x-2]^2}$. $x=4$ inflexión, $x<4$ cóncava, $x>4$ convexa.

$y'=0$ en cortes de $\log|x-2|$ y $\frac{x}{2-x}$. $y'(0)=\log 2$, $y'(1)=-1$ $\Rightarrow$ máximo en $c\in(0,1)$

[Newton para y' con $x_0=0.5$: $x_1=0.546370$, $x_2=0.545267=x_3=x_4=\cdots$].

Cerca de $x=2$ no se anula k' pues $k'\to\infty$ si $x\to 2^+$, $k'(3)=3$ y k' decrece en $(2,3)$.



---

44 a) $\boxed{y=1+ax^2+x^4}$ par. $\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\infty$.

$y'=2ax+4x^3=0$ si $x=0,\pm\sqrt{-a/2}$.

$y''=2a+12x^2=0$ si $x^2=\pm\sqrt{-a/6}$.

$y=0$ si $x=\frac{1}{2}\left[-a\pm\sqrt{a^2-4}\,\right]$.

$y\left(\sqrt{-a/2}\right)=1-\frac{1}{4}a^2$, $y\left(\sqrt{-a/6}\right)=1-\frac{5}{36}a^2$.

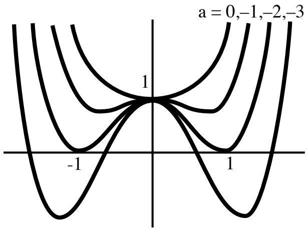
b) $\boxed{y=\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}}$ $\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\infty$. $\frac{a+x}{x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}$ ∞ , $a>0$; $-\infty$, $a<0$

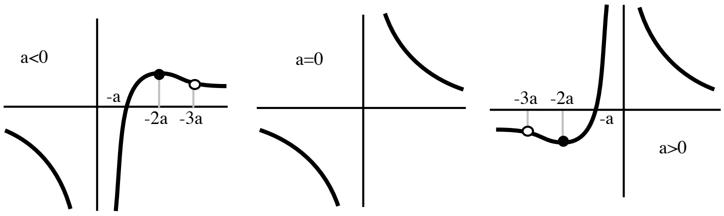
$y'=-\frac{2a+x}{x^3}$, $y''=2\frac{3a+x}{x^4}$.

$y(-2a)=-\frac{1}{4a}$. $y(-3a)=-\frac{2}{9a}$.

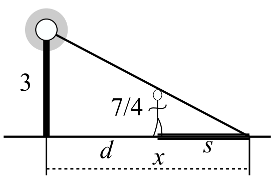
Corta el eje x en $x=-a$.

Para $a=0$ es vieja conocida.





45

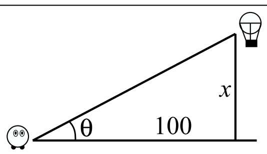


Por semejanza de triángulos $\frac{x}{3}=\frac{s}{7/4}=\frac{x-d}{7/4}$ y sabemos que $d'=1$.

Por tanto: $\frac{x'}{3}=\frac{4(x'-1)}{7}$ $x'=\boxed{\frac{12}{5}}$ m/s velocidad del extremo de la sombra.

$s'=x'-d'=\boxed{\frac{7}{5}}$ m/s velocidad a la que crece la sombra.

46



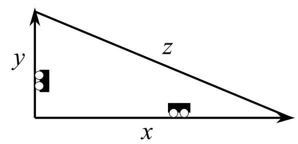
$\theta=\arctan\frac{x}{100}$; $\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{1/100}{1+(x^2/100^2)}\cdot 2=\frac{200}{10000+x^2}$ rad/s.

$x=10\to\boxed{\frac{2}{101}}$ rad/s. $x=100\to\boxed{\frac{1}{100}}$ rad/s (menor que antes, de hecho, θ' máxima si $x=0$).

---

47 $t=0$ al salir el segundo tren. $x(t)=\left(\frac{1}{5}+t\right)100\overset{t=1}{\longrightarrow}120$ km $\left(12\text{ min}=\frac{1}{5}\text{ h}\right)$.

$y(t)=50t\overset{t=1}{\longrightarrow}50$ km. $z(t)=\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}\to z'\Big|_{t=1}=\frac{1}{2}\frac{2xx'+2yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{x=120,y=50}=\boxed{\frac{1450}{13}}$ km/h.



---

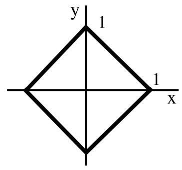
48 $S'(r)=8\pi rr'\to S'(10)=\boxed{160\pi\text{ cm}^2/\text{s}}\approx 502.65\text{ cm}^2/\text{s}$. $V'(r)=4\pi r^2r'=\boxed{800\pi\text{ cm}^3/\text{s}}\approx 2513.27\text{ cm}^3/\text{s}$.

49 $x_1^2+x_2^2=-a(\underbrace{x_1+x_2}_{=-a})-2a+4=a^2-2a+4$ ($\geq 0\ \forall a$), que es mínimo para $\boxed{a=1}$.

50 $A(x)=\arctan x+\arctan(1-x)$, $x\in[0,1]$. $A'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(x-1)^2}=\frac{1-2x}{[1+x^2][1+(x-1)^2]}$.

A crece hasta $x=\frac{1}{2}$ y decrece después $\to$ Amáx $=A(\frac{1}{2})=2\arctan\frac{1}{2}$. Amín $=A(0)=A(1)=\frac{\pi}{4}$.

51 $|x|+|y|=1\Rightarrow|x|\leq 1$. $x^2+y^2=x^2+(1-|x|)^2=2x^2-2|x|+1=f(x)$

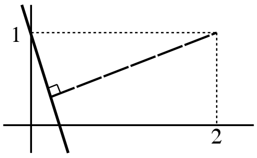


Hallando los extremos de $f(x)$ en $|x|\leq 1$: $f'(x)=\begin{cases}4x-2\,,\ x>0\\4x+2\,,\ x<0\end{cases}$

$f(\pm\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $f(\pm 1)=1$ (extremos), $f(0)=1$ (no derivable).

Mínimos en $(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$, máximos en $(\pm 1,0)$, $(0,\pm 1)$. [Puntos de la gráfica más $\begin{matrix}\text{cercanos}\\\text{lejanos}\end{matrix}$ al origen].

52 $D(x)=d\big[(x,1-3x),(2,1)\big]^2=10x^2-4x+4$. $D'(x)=0\to x=\frac{1}{5}$. Punto más cercano: $(\frac{1}{5},\frac{2}{5})$.

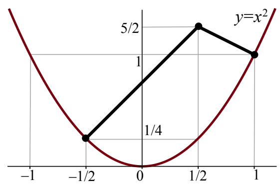


O bien: la perpendicular a la recta que pasa por $(2,1)$ es: $y=1+\frac{1}{3}(x-2)=\frac{x+1}{3}$.

Y ambas rectas se cortan si: $x+1=3-9x$, $x=\frac{1}{5}$, como antes.

No hay evidentemente punto más lejano.

53 La distancia de $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$ a un punto de la parábola (x,x^2) es $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(x^2-\frac{5}{4})^2}$.

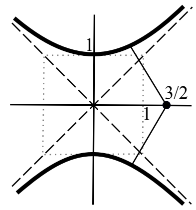


Minimizamos su cuadrado: $D=x^2-x+\frac{1}{4}+x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{16}=x^4-\frac{3}{2}x^2-x+\frac{29}{16}$.

Como $D'=4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2$, D decrece hasta $x=1$ y luego crece.

El punto buscado es, pues, el $(1,1)$. [A distancia $\sqrt{5}/4$].

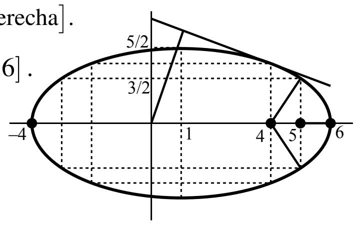
54 La distancia al cuadrado desde el punto $\left(\frac{3}{2},0\right)$ a un punto (x,y) de cualquiera de las dos ramas de la hipérbola es $D(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(1+x^2)$. $D'(x)=4x-3$.



Por tanto, el mínimo de D se toma si $x=\frac{3}{4}$ (antes D decrece y después crece).

Los puntos más cercanos son, pues, $\boxed{\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)}$ y $\boxed{\left(\frac{3}{4},-\frac{5}{4}\right)}$.

55 $(x-1)^2+4y^2=25$, $\frac{y^2}{(5/2)^2}=\frac{(x-1)^2}{5^2}=1$ [elipse centrada $\frac{y^2}{(5/2)^2}+\frac{x^2}{5^2}=1$, una unidad hacia la derecha].



[Con técnicas de funciones: $f(x)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{24+2x-x^2}$. dom $=\{x:x^2-2x-24\leq 0\}=[-4,6]$.

$f'(x)=\frac{1-x}{2}[\cdot]^{-1/2}=0\to f(1)=\pm\frac{5}{2}$ extremos. $f'(-4^+)=f'(6^-)=\infty$.

$f(-4)=f(6)=0$, $f(-3)=f(5)=\pm\frac{3}{2}$, $f(-2)=f(4)=\pm 2$].

Tangente: $2x+8yy'-2=0$, $y'(4)=\frac{1-x}{4y}\Big|_{(4,2)}=-\frac{3}{8}$. $y=2-\frac{3}{8}(x-4)$, $\boxed{y=\frac{7}{2}-\frac{3x}{8}}$.

El punto más cercano pertenece también a la perpendicular por $(0,0)$: $y=\frac{8x}{3}=\frac{7}{2}-\frac{3x}{8}$, $\boxed{x=\frac{84}{73}}$, $\boxed{y=\frac{224}{73}}$.

O minimizando la distancia al cuadrado a $\left(x,\frac{7}{2}-\frac{3x}{8}\right)$: $\left[\frac{73}{64}x^2-\frac{21}{8}x+\frac{49}{4}\right]'=\frac{73}{32}x-\frac{21}{8}=0\nearrow$

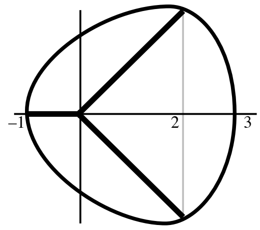
Para la elipse sea $a\in(-4,6)$ general. $D(x)=d\big[(x,y),(a,0)\big]=\left[x^2-2ax+a^2-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+6\right]^{1/2}$, con $x\in[-4,6]$.

Minimizamos $P(x)=\frac{3}{4}x^2-\left(2a-\frac{1}{2}\right)x+a^2+6$: $P'(x)=\frac{3}{2}x-\left(2a-\frac{1}{2}\right)=0\to x^*=\frac{4a-1}{3}$. $D(-4)=a+4$, $D(6)=6-a$.

i) Si $a=4$, $x^*=5$. Como $D(5)=\frac{\sqrt{13}}{2}<2=D(6)\to\left(5,\pm\frac{3}{2}\right)$ puntos más cercanos y $\boxed{(-4,0)}$ punto más lejano (es $D=8$).

ii) Para $a=5$, $x^*=\frac{19}{3}>6$ punto que no está en $[0,6]$. Las distancias extremas se dan en los extremos.

56 $3y^2=21+20x-x^4\to y=\pm\sqrt{\frac{21+20x-x^4}{3}}$. Definida si $x\in[-1,3]$.



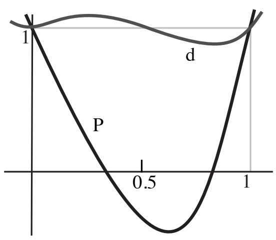
$y'=0\to x=\sqrt[3]{5}\approx 1.71$. $y(\sqrt[3]{5})\approx\pm 3.94$. $y(2)=\pm\sqrt{15}$.

Máximos y mínimos de: $D(x)\equiv\big(d[(x,y),(0,0)]\big)^2=-\frac{1}{3}x^4+x^2+\frac{20}{3}x+7$.

$D'(x)=0\to x=2$, $D(2)=19$. $D(-1)=1$, $D(3)=9$.

Mínimo de D si $x=-1$ [punto $(-1,0)$] y máximo si $x=2$ [puntos $(2,\pm\sqrt{15})$].

57 a) $\boxed{P(x)=3x^4-3x+1}$ Sin raíces negativas; 0 ó 2 positivas.



$P(0)=P(1)=1$, $P(\frac{1}{2})=-\frac{5}{16}\Rightarrow$ raíces $x_1\in(0,\frac{1}{2})$, $x_2\in(\frac{1}{2},1)$.

b) Cuadrado de la distancia de (x,x^3) a $(0,1)$: $d(x)=x^6-2x^3+x^2+1$.

$d'(x)=2x(3x^4-3x+1)\Rightarrow$ $\begin{matrix}d\text{ crece en }(0,x_1)\\\text{y en }(x_2,\infty)\end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix}x_1\text{ máximo local}\\0\text{ y }x_2\text{ mínimos}\end{matrix}$

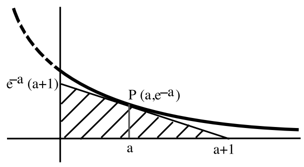
Además: $d(0)=d(1)=1\Rightarrow d(x_2)<1\Rightarrow$ mínimo en x_2 (a la derecha de $x=\frac{1}{2}$).

58 Recta tangente en $x=a$: $y=\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-a}(x-a)=\mathrm{e}^{-a}(a+1-x)$.

Área del triángulo limitado por la tangente: $A(a)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}(1+a)^2$.

$A'(a)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}(1+a)(1-a)=0 \Rightarrow$ es máxima $A(a)$ si $a=1$.

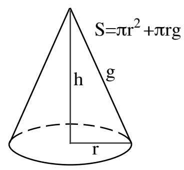
El punto P es el $(1,\mathrm{e}^{-1})$ y el área máxima es $A(1)=2\,\mathrm{e}^{-1}$.



59 Superficie del cono: $S=\pi r^2+\pi rg=\pi r^2+\pi r\sqrt{h^2+r^2} \Rightarrow h^2=S\frac{S-2\pi r^2}{\pi^2 r^2}$.

Volumen del cono: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\sqrt{S}}{3}r\sqrt{S-2\pi r^2}$, $r\in\left(0,\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$.

Máximo de $v(r)\equiv Sr^2-2\pi r^4$ $\left[\,v'(r)=2r(S-4\pi r^2)\,\right]$ si $r^2=\frac{S}{4\pi} \Rightarrow h=2\sqrt{2}\,r$ $(g=3r)$.



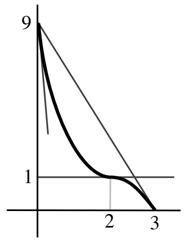
60 $g'(x)=-3(x-2)^2$, $g''(x)=-6(x-2)$, $g(0)=9$, $g(2)=1$, $g(3)=0$.

Recta tangente en $(a,g(a))$: $y=1-(a-2)^3-3(a-2)^2(x-a)$.

Corta $x=0$ en $y(a)=1-(a-2)^3+3a(a-2)^2=2a^3-6a^2+9$.

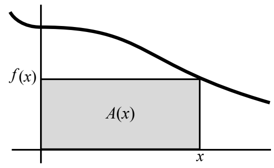
$y'(a)=6a(a-2)\to y(0)=9$, $y(2)=1$. El otro extremo: $y(3)=9$.

Punto de corte más bajo en $y=1$. Punto de corte más alto en $y=9$.



61 Área del rectángulo: $A(x)=xf(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+4}}$.

$A'(x)=\frac{8-x^3}{2(x^3+4)^{3/2}} \Rightarrow x=2$ máximo local. $A_{max}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.



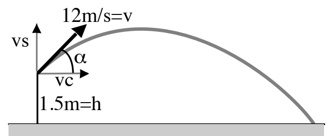
62 Llamemos $s\equiv\operatorname{sen}\alpha$, $c\equiv\cos\alpha$. $y=h+vst-\frac{1}{2}gt^2=0$ cuando

$t=\frac{1}{g}\left[vs+\sqrt{v^2s^2+2gh}\,\right]$. En ese tiempo recorre la distancia horizontal:

$vct=\frac{v^2}{g}\left[sc+c\sqrt{s^2+k}\right]\equiv\frac{v^2}{g}D(\alpha)$, siendo $k=\frac{2gh}{v^2}$.

$D'(\alpha)=c^2-s^2-s\sqrt{\ }+\frac{sc^2}{\sqrt{\ }}=1-2s^2+\frac{s-2s^3-ks}{\sqrt{\ }}=0\to s=\frac{1}{\sqrt{2+k}}=\frac{v}{\sqrt{2v^2+2gh}}$ $\left(\alpha\le\frac{\pi}{4},\ \alpha=\frac{\pi}{4}\text{ si } h=0\right)$.

En nuestro caso $k=\frac{5}{24}$, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{53}}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{53}}$ y distancia máxima ≈ 15.83 (mala marca).

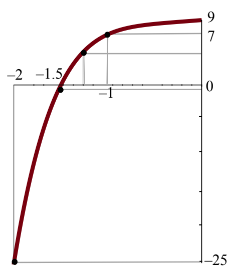


63 $\boxed{P(x)=x^5+x+9}$ 0 raíces positivas $[+\,+\,+]$ y 1 negativa $[-\,-\,+]$. O bien, $P'=5x^4+1>0\ \forall x \Rightarrow$ P crece y $P(0)=9>0$.

$P(-2)=-15<0$, $P(-1)=7>0 \Rightarrow$ raíz en $(-2,-1)$.

$P\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{32}<0 \Rightarrow$ raíz en $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$.

$P\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{4811}{1024}<0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{raíz en }(-1.5\,,-1.25)}$.



Newton, $x_0=1$
-2.166666667
-1.798687494
-1.580715049
-1.504679605
-1.496507442
-1.496420671
-1.496420661
-1.496420661

64 a) $\boxed{P(x)=x^3+x-17}$ $P'(x)=3x^2+1$. $R=-3$, $S=-459$, $\Delta=-7807$.

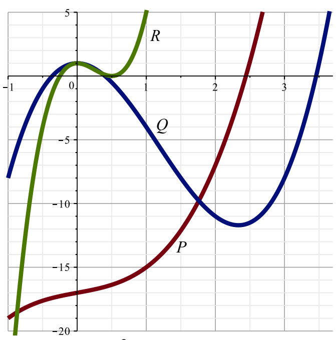
$x_r=\frac{1}{3}\left[\frac{459}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{23421}\right]^{1/3}+\frac{1}{3}\left[\frac{459}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{23421}\right]^{1/3}\approx 2.441759906$.

b) $\boxed{Q(x)=2x^3-7x^2+1}$ $R=49$, $S=-578$, $\Delta=1264$. $\phi=\arccos\left(\frac{289}{343}\right)\approx 0.5687671924$.

$x_{123}=\frac{7}{6}+\frac{7}{3}\cos\frac{\phi+2k\pi}{3}\approx 3.458190776, -0.359911979, 0.401721203$. $Q'=2x(3x-7)$.

c) $\boxed{R(x)=16x^3-12x^2+1}$ $R=2^4\cdot 3^2$, $S=2^7\cdot 3^3$, $\Delta=0$. $\sqrt[3]{\frac{S}{2}}=12$, $x_d=\frac{1}{2}$, $x_s=-\frac{1}{4}$.

$R'(x)=24x(2x-1)$. $R(x)=(4x+1)(2x-1)^2$.



Newton:

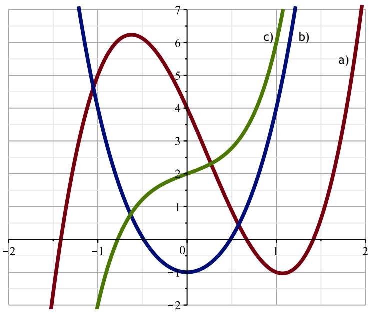
a) $x_{n+1}=\frac{2x_n^3+17}{3x_n^2+1}$. b) $x_{n+1}=\frac{4x_n^3-7x_n^2-1}{6x_n^2-14x_n}$. c) $x_{n+1}=\frac{16x_n^3-2x_n+1}{24x_n}$.

a) $x_0=2$	b) $x_0=-1$	b) $x_0=1$	b) $x_0=3$	c) $x_0=1$
2.538461538	−0.600000000	0.500000000	3.666666667	0.6250000000
2.445218053	−0.415151515	0.409090909	3.479797979	0.4000000000
2.441764541	−0.364092896	0.401773642	3.458460630	0.2875000000
2.441759911	−0.359939199	0.401721206	3.458190819	0.2532608696
2.441759911	−0.359911980	0.401721203	3.458190776	0.2500279903
	−0.359911979	0.401721203	3.458190776	0.2500000020
	−0.359911979	0.401721203	3.458190776	0.2500000000

Newton para la raíz doble de $R(x)$ es lento:

$-0.79167, -0.66374, -0.58860, -0.54652, -0.52392, -0.51214, -0.50612, -0.50307, -0.50154, -0.50077, -0.50039, \ldots$

65 a) $\boxed{3x^3-2x^2-6x+4=0}$ 0 ó 2 positivas $[+\,-\,-\,+]$ y 1 negativa $[-\,-\,+\,+]$ $P(0)=4,\ P(1)=-1,\ P(2)=8 \Rightarrow$ 1 cero en $(0,1)$ y otro en $(1,2)$.



$$x_{n+1}=x_n-\frac{3x_n^3-2x_n^2-6x_n+4}{9x_n^2-4x_n-6}=\frac{2(3x_n^3-x_n^2-2)}{9x_n^2-4x_n-6}$$ [El polinomio salió de hacer $(3x-2)(x^2-2)$].

b) $\boxed{x^4+4x^2-1=0}$ $x^2=-2\pm\sqrt{5} \Rightarrow$ raíces reales: $x=\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}\approx\pm 0.4858682712$.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^4+4x_n^2-1}{4x_n^3+8x_n}=\frac{3x_n^4+4x_n^2+1}{4x_n(x_n^2+2)}\,.$$

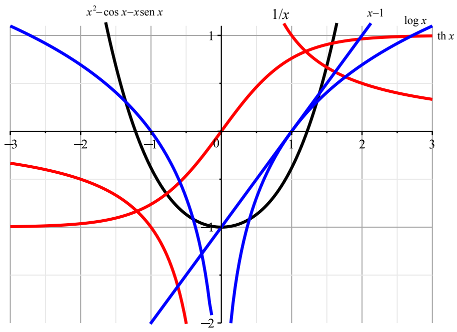
c) $\boxed{x^5+2x^3+x+2=0}$ [ejemplo de 3.3 con 1 solo cero] $$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^5+2x_n^3+x_n+2}{5x_n^4+6x_n^2+1}=\frac{2(2x_n^5+2x_n^3-1)}{5x_n^4+6x_n^2+1}\,.$$

a) $x_0=-1$	a) $x_0=0$	a) $x_0=2$	b) $x_0=1$	c) $x_0=-1$
-1.714285714	0.666666667	1.636363636	0.6666666668	-0.8333333334
-1.468716635	0.666666667	1.465730264	0.5170454542	-0.7815225876
-1.416532082	0.666666667	1.418133598	0.4870167392	-0.7772741546
-1.414218033	0.666666667	1.414239266	0.4858699125	-0.7772477715
-1.414213563	0.666666667	1.414213561	0.4858682718	-0.7772477705
-1.414213563	0.666666667	1.414213563	0.4858682718	-0.7772477705

d) $\boxed{x^2-\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x=0}$ tenía 2 ceros simétricos (problema 17).

e) $\boxed{x\,\mathrm{th}\,x=1}$ 2 ceros (simétricos) donde $\mathrm{th}\,x=\frac{1}{x}$ ($\Leftrightarrow x\,\mathrm{sh}\,x-\mathrm{ch}\,x=0$ en Newton).

f) $\boxed{\log|x|=x-1}$ $x=1$ es cero obvio y habrá otro en $(-1,0)$. $x_{n+1}=\frac{x_n\log|x_n|}{x_n-1}$.



d) $x_0=1$	e) $x_0=1$	f) $x_0=-0.5$
1.261542710	1.238405844	-0.2310490602
1.221598632	1.200895253	-0.2749815695
1.220469350	1.199679873	-0.2784473868
1.220468466	1.199678640	-0.2784645423
1.220468466	1.199678640	-0.2784645427
		-0.2784645427

---

66 $\boxed{Q(x)=9x^4+8x^3+28x^2+24x+3}$ [ejemplo de teoría] $Q'=4\big[9x^3+6x^2+14x+6\big]$. $Q''=4\big[27x^2+12x+14\big]>0 \Rightarrow Q'$ crece [y Q convexa].

$Q'(-1)<0,\ Q'(0)>0 \Rightarrow$ única raíz de Q' en $(-1,0)$. [Único mínimo de Q].

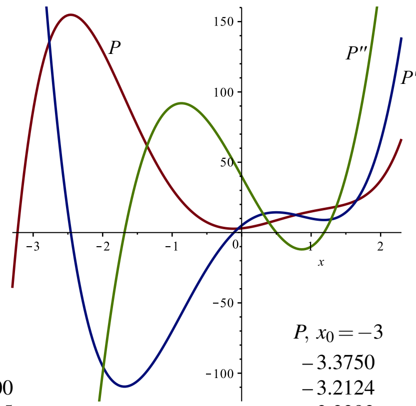
$Q(-1)=8,\ Q(-\frac{1}{2})=-\frac{39}{16},\ Q(0)=3 \Rightarrow$ 2 ceros de Q. $\big[$En $(-1,-\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2},0)\big]$.

$Q(-0.4567243066)\approx -2.491220951$.

Q', $x_0=0$	Q, $x_0=0$	Q, $x_0=-1$
-0.4285714286	-0.1250000000	-0.8181818182
-0.4570584511	-0.1495062077	-0.7491230896
-0.4567243566	-0.1504705870	-0.7386512584
-0.4567243066	-0.1504720765	-0.7384169288
-0.4567243066	-0.1504720766	-0.7384168121
	-0.1504720766	-0.7384168121

$\boxed{P(x)=2x^5-15x^3+20x^2+5x+3}$ $[\,0$ o $2+,\ 1$ o $3-\,]$

$P'=5(2x^4-9x^2+8x+1)$ $[\,0$ o $2+,\ 0$ o $2-\,]$.
$P''=10(4x^3-9x+4)$ $[\,0$ o $2+,\ 1-\,]$.
$P'''=30(4x^2-3)=0$, si $x=\pm\sqrt{3}/2$.



$P''(-2)<0,\ P''(-1)>0,\ P''(0)>0,\ P''(1)<0,\ P''(2)>0$
$\Rightarrow$ 3 ceros de P'': en $(-2,-1)$, $(0,1)$ y $(1,2)$.

$x_0=-2$	$x_0=0$	$x_0=1$
-1.743589744	0.4444444444	1.333333333
-1.688625847	0.4974136147	1.213213213
-1.686145622	0.4999933679	1.187363262
-1.686140662	0.5000000000	1.186143351
-1.686140662	0.5000000000	1.186140662
		1.186140662

$[\to P''=10(2x-1)(2x^2+x-4)]$.

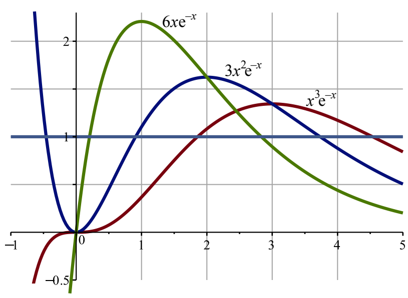
$P'(-3)>0,\ P'(-2)<0,\ P'(-1)<0,\ P'(0)>0$,
$P'(1.186140662)\approx 8.93>0 \Rightarrow$
2 ceros de P': en $(-3,-2)$ y $(-1,0)$.

$P(-0.111141627)\approx 2.71>0$. Único cero de P.

P', $x_0=-3$	P', $x_0=0$	P, $x_0=-3$
		-3.3750
-2.62337662	-0.12500000	-3.2124
-2.47989273	-0.11130725	-3.2292
-2.45893558	-0.11114165	-3.2247
-2.45851150	-0.11114163	-3.2258
-2.45851133	-0.11114163	-3.2256
-2.45851133		-3.2256

$\boxed{f(x)=e^x-x^3}$ $(=0 \Leftrightarrow x^3e^{-x}=1)$. $f'(x)=e^x-3x^2$, $f''(x)=e^x-6x$.

$\big[x^3e^{-x}\big]'=x^2(3-x)e^{-x}$, $\big[3x^2e^{-x}\big]'=3x(2-x)e^{-x}$, $\big[6xe^{-x}\big]'=6(1-x)e^{-x}$.



2 ceros de f'', 3 de f' y 2 de la f inicial en los intervalos del dibujo.

Para f: 1.857183860, 4.536403655.

Para f': -0.4589622675, 0.9100075725, 3.733079029.

Para f'': 0.2044814493, 2.833147892.

67 $\boxed{f(x)=x^2}$ $x_{n+1}=x_n-\frac{x_1^2}{2x_n}=\frac{1}{2}x_n$

$\{x_n\}=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\dots$

Converge lentamente.

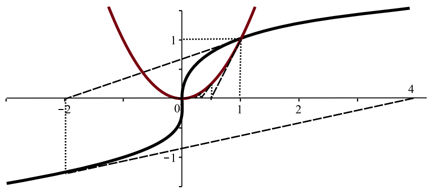
Las raíces dobles van mal.

$\boxed{g(x)=\sqrt[3]{x}}$ $x_{n+1}=x_n-\frac{x_1^{1/3}}{x_n^{-2/3}/3}=-2x_n$

$\{x_n\}=1,-2,4,-8,\dots$

Se aleja del cero.

La derivada no está acotada.



---

68 $\boxed{f(x)=\mathrm{e}^{x/3}}$ $f'(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x/3}$ creciente. $f(0)=1>0$, $f(2)=\mathrm{e}^{2/3}\approx 1.95<2$.

$|f'|=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x/3}\underset{x\in[0,2]}{\leq}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2/3}<1 \Rightarrow$ contractiva en $[0,2]$.

$$f(f(\cdots(f(1))\cdots))\longrightarrow x^*=f(x^*)\,.$$

[x^* es el cero más pequeño de la f del último problema].

Aplicando f sucesivamente nos acercamos al x^* tal que $x^*=\mathrm{e}^{x^*/3}$, de forma mucho más lenta que con Newton. Escribimos sólo algunas iteraciones (la primera y los múltiplos de 5 hasta que se estabiliza).

	$x_0=-1$
1	1.39561242
5	1.79950444
10	1.85205740
15	1.85671870
20	1.85714157
25	1.85718002
30	1.85718351
35	1.85718383
40	1.85718386
45	1.85718386