1 a) $\sum \frac{\sqrt[3]{4n+5}}{\sqrt[4]{n^5+3}} \sim \frac{1}{n^{5/4-1/3}} = \frac{1}{n^{11/12}} \Rightarrow$ DIV. b) $\sum n^2 (\frac{e}{3})^n$, $\sqrt[n]{|a_n|}$, $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow$ CONV.

c) $\sum \left[\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right] \sim \frac{1}{n}$ pues $[1+\bullet]^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\bullet+\cdots$ si $\bullet$ pequeño: $\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = \frac{x+o(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ y $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{1/n} \to 1$.

O de otra forma: $a_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}[\sqrt{n+2}+\sqrt{n}]} \sim \frac{1}{n}$ puesto que $\frac{a_n}{1/n} = \frac{2}{\sqrt{1+2n^{-1}}+1} \to 1$. DIV.

d) $\sum \frac{7^n+\log n}{n!+n^3}$, $\frac{7+\frac{\log(n+1)}{7^n}}{1+\frac{\log n}{7^n}} \frac{1+\frac{n^3}{(n-1)!}}{n+1+\frac{(n+1)^3}{n!}} \to 0$ CONV. e) $\sum \frac{3n+1}{n(2n-1)}$. $\frac{\frac{3n+1}{n(2n-1)}}{1/n} \to \frac{3}{2}$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow$ DIV.

f) $\sum \frac{n}{(-3)^n}$. $\frac{n+1}{n}\frac{1}{3}$ ó $\frac{n^{1/n}}{3} \to \frac{1}{3} < 1$, ó $\frac{n}{3^n} \to 0$ y decreciente $\left(\frac{n}{3^n} > \frac{n+1}{3^{n+1}} \Leftrightarrow 2n > 1 \right) \Rightarrow$ CONV.

g) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{n!\,n!} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ Convergente.

h) $\sum (-1)^n \frac{2n+(-1)^n}{n^3+(-1)^n}$, $|a_n| = \frac{2n+(-1)^n}{n^3+(-1)^n} \sim \frac{1}{n^2}$ $\left[\frac{2n^3+(-1)^n n^2}{n^3+(-1)^n} = \frac{2+(-1)^n/n}{1+(-1)^n/n^3} \to 1\right] \Rightarrow$ CONV (abs.).

i) $\sum (-1)^n e^{-1/n^2}$, $e^{-1/n^2} \to 1$, $a_n \not\to 0 \Rightarrow$ DIV. j) $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^{3/2}}$, $|\frac{\operatorname{sen} n}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. CONV absolutamente.

k) $\sum 3^{n\cos 2} = \sum (3^{\cos 2})^n$ CONV, pues $r = 3^{\cos 2} < 1$, ya que $\cos 2 < 0$, por ser $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$.

l) $\sum \cos \frac{\sqrt{n+1}}{n!}$, DIV pues $a_n \to 1$ $\left[\frac{\sqrt{n+1}}{n!} \to 0\right]$. m) $\sum \arctan \frac{1}{n^2}$. $\arctan \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$, ya que $\frac{\arctan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ y $\frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow$ CONV.

n) $\sum (-1)^n \arctan \frac{1}{n^2}$, alternada, $\arctan \frac{1}{n^2} \to 0$ y decrece ($\arctan x$ crece). CONV. (O absolutamente convergente $\uparrow$).

ñ) $\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ pues $\frac{\log(1+2x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$ y $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{1/n} \to 2$. Como $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la dada también lo hace.

De otra forma: $\sum \left[\log(n+2) - \log n\right]$ casi telescópica. $S_n = \log(n+2) + \log(n+1) - \log 2 \to \infty$.

---

2 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$, ya que $e < 4$.

---

3 a) $\sum (\sqrt{n^c+1} - \sqrt{n^c}\,) = \sum \frac{1}{\sqrt{n^c+1}+\sqrt{n^c}}$ converge cuando lo hace $\sum \frac{1}{n^{c/2}} \Rightarrow \boxed{c > 2}$.

b) $\sum \frac{2^n c^n}{n!}$. $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2|c|}{n+1} \to 0\ \forall c \Rightarrow$ converge $\boxed{\forall c \in \mathbf{R}}$.

c) $\sum \frac{c^{n^2-5n}}{n^3}$. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^3}{(n+1)^3} |c|^{2n-4} \to |c|^{2n-4} \Rightarrow$ converge si $|c| < 1$ y diverge si $|c| > 1|$; si $|c| = 1$ converge. $\boxed{|c| \leq 1}$.

d) $\sum \frac{n^4 c^{2n}}{(n-1)!}$. $\frac{(n+1)^4}{n^4} \frac{(n-1)!}{n!} \frac{|c|^{2n+2}}{|c|^{2n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \frac{|x|^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ \forall c \Rightarrow$ converge $\boxed{\forall c \in \mathbf{R}}$.

e) $\sum \frac{(2c-1)^{n^2}}{n+1}$. $\frac{n+1}{n+2} |2c-1|^{2n+1} \to \begin{cases} 0 \text{ si } |2c-1| < 1 \\ \infty \text{ si } |2c-1| > 1 \\ 1 \text{ si } |2c-1| = 1 \end{cases}$. Si $c = 1$, $\sum \frac{1}{n}$ diverge; si $c = 0$, $\sum \frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. $\boxed{0 \leq c < 1}$.

f) $\sum \frac{(-4)^n (c+1)^{2n}}{(2n)!}$. $\frac{4^{n+1}|c+1|^{2n+2}(2n)!}{4^n |c+1|^{2n}(2n+2)|} = \frac{4|c+1|^2}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1\ \forall c \Rightarrow$ converge en todo $\mathbf{R}$ $\left[\text{a } f(c) = \cos(2c+2)\right]$.

g) $\sum \frac{c^n}{e^{\sqrt{n}}}$. Mejor raíz: $|a_n|^{1/n} = \frac{|c|}{e^{1/\sqrt{n}}} \to |c|$. $\sum \frac{(-1)^n}{e^{\sqrt{n}}}$ y $\sum \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ convergen $\left(\text{Leibniz y } \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} \to 0\right)$. $\boxed{|c| \leq 1}$.

h) $\sum \frac{n^2 c^{2n}}{\pi^n}$. $\frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{\pi^n}{\pi^{n+1}} \frac{|c|^{2n+2}}{|c|^{2n}} \to \frac{|c|^2}{\pi}$ (ó $\frac{n^{2/n}|c|^2}{\pi} \to \frac{|c|^2}{\pi}$) $\Rightarrow$ converge si $\boxed{|c| < \sqrt{\pi}}$, pues diverge si $c = \pm\sqrt{\pi}$ $\left(\sum n^2 \right)$.

i) $\sum \frac{c^n}{n^2-\sqrt{2n}}$. $\frac{n^2-\sqrt{2n}}{(n+1)^2-\sqrt{2n+2}} \frac{|c|^{n+1}}{|c|^n} = \frac{1-\sqrt{2}\,n^{-3/2}}{(1+\frac{1}{n})^2 - \sqrt{2n^{-3}+2n^{-4}}} |c| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |c| \Rightarrow \begin{array}{c} \text{converge si } |c| < 1 \\ \text{diverge si } |c| > 1 \end{array}$.

O bien $\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{|c|}{\left[n^2\left(1-\sqrt{2/n^3}\,\right)\right]^{1/n}} = \frac{|c|}{(n^{1/n})^2 \left(1-\sqrt{2/n^3}\,\right)^{1/n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|c|}{1^2 \cdot 1^0} = |c|$ $\uparrow$

Si $c = 1$, $\sum \frac{1}{n^2-\sqrt{2n}}$ converge, pues $\frac{a_n}{1/n^2} = \frac{1}{1-\sqrt{2/n^3}} \longrightarrow 1$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Si $c = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^2-\sqrt{2n}}$, converge por ser absolutamente convergente (lo hace la serie anterior). $\boxed{c \in [-1, 1]}$

[Para utilizar Leibniz es inmediato ver que $a_n \to 0$, pero no es fácil ver que a_n decrece; por ejemplo:

si $f(x) = \frac{1}{x^2-\sqrt{2x}}$ es $f'(x) = \frac{1-(2x)^{3/2}}{(x^2-\sqrt{2x})^2 \sqrt{2x}} \overset{x\geq 2}{<} 0 \Rightarrow f(x)$ decrece $\Rightarrow f(n)$ decrece].

j) $\sum \frac{c^n}{n+\log n}$. $\frac{(|x|^n)^{1/n}}{(n+\log n)^{1/n}} = \frac{|x|}{n^{1/n}\,(1+\frac{\log n}{n})^{1/n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$ $\left[\text{ó } \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \frac{n+\log n}{n+1+\log(n+1)} = |x| \frac{1+\frac{\log n}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{\log(n+1)}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x| \right]$

Si $x = 1$: $\sum \frac{1}{n+\log n}$ diverge: $\frac{1/(n+\log n)}{1/n} = \frac{1}{1+\log n/n} \to 1$. Si $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n+\log n}$ converge por Leibniz:

---

4 Por el criterio integral (serie de términos positivos): $|s - s_k| \leq \int_k^\infty \frac{dx}{x^{11}} = \frac{1}{10k^{10}} < \frac{1}{10^5} \Rightarrow k \geq 3$.

Basta sumar 3 términos: $S \sim 1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} \approx 1.00494$ (error $\leq \frac{1}{10\cdot 3^{10}} \approx 0.17\times 10^{-5}$). (Y el error es mayor que $\frac{1}{10\cdot 4^{10}} \approx 0.9\times 10^{-7}$).

5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x)^n=\frac{-x}{1+x}$, si $|x|<1$. Error $=S-\sum\limits_{n=1}^{k}(-x)^n=\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}(-x)^n=\frac{(-x)^{k+1}}{1+x}$.

Si $x=\frac{1}{4}$ $(S=-\frac{1}{5})$, $|\text{error}|=\frac{1}{4^k\cdot 5}<\frac{1}{1000}\Rightarrow k\geq 4$. Si $x=-\frac{1}{4}$ $(S=\frac{1}{3})$, error $=\frac{1}{4^k\cdot 3}<\frac{1}{1000}\Rightarrow k\geq 5$.

$\big[$Para $x=\frac{1}{4}$: $-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\frac{1}{256}-\frac{1}{1024}+\cdots$ Leibniz aseguraba que bastaba sumar 4 términos;
si $x=-\frac{1}{4}$, la serie no es alternada y el criterio integral nos daría: error $<\int_k^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x dx=\frac{1}{2\cdot\log 2\cdot 4^k}$ $\big]$.

---

6 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+5^n}\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ convergente $\Rightarrow$ la dada converge $\big($o cociente: $\frac{1+5^n}{1+5^{n+1}}=\frac{5^{-n}+1}{5^{-n}+5}\to\frac{1}{5}<1\big)$.

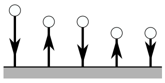
$S=\frac{1}{6}+\frac{1}{26}+\frac{1}{126}+\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{1+5^n}$. Como $0<\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{1+5^n}<\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{(1/5)^4}{1-1/5}=\frac{1}{600}\Rightarrow$

$$0.213<0.21306...=\frac{1}{6}+\frac{1}{26}+\frac{1}{126}<S<\frac{1}{6}+\frac{1}{26}+\frac{1}{126}+\frac{1}{600}=0.2147...<0.215\,.$$

---

7 a) $2.713713...=2+\frac{713}{10^3}+\frac{713}{10^6}+\cdots=2+713\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}}=\frac{2711}{999}$, b) $0.2345757...=\frac{234}{10^3}+\frac{57}{10^5}+\frac{57}{10^7}+\cdots=\frac{234}{10^3}+\frac{57\cdot 10^{-5}}{1-10^{-2}}=\frac{74041}{33000}$.

---

8 

Distancia $=\underset{\downarrow}{1}+\underset{\uparrow}{0{,}8}+\underset{\downarrow}{0{,}8}+\underset{\uparrow}{(0{,}8)^2}+\underset{\downarrow}{(0{,}8)^2}+\cdots=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=1+\frac{2\cdot(4/5)}{1-4/5}=\boxed{9}$ m.

---

9 ¡No ss necesitan series! La persona tarda 100 s en llegar, tiempo que el perro corre. En ese tiempo ha recorrido $\boxed{400}$ m.
Con series: el primer encuentro es a 60 m de la casa, los siguientes a 36 , a 21.6 ,... En general, si un encuentro es a distancia d , el siguiente es a distancia $\frac{3d}{5}$. Así: distancia$=100+100\cdot\frac{3}{5}+100\cdot\frac{3}{5}+100\cdot(\frac{3}{5})^2+100\cdot(\frac{3}{5})^2+\cdots=100\big[1+\frac{6/5}{2-3/5}\big]=400$.

---

10 a) $\boxed{x^{1/n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(x)=\begin{cases}1,\ x>0\\0,\ x=0\end{cases}$ puntualmente (si $x<0$ no definidas todas).

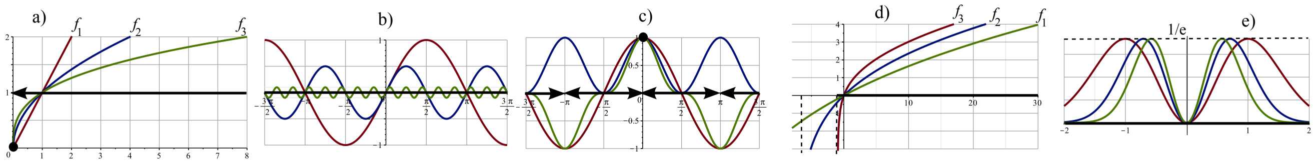
No converge uniformemente en $[0,b]$ (f discontinua). Tampoco en $[a,\infty)$. Sí lo hace en $[a,b]$, $a>0$.

b) $\boxed{\frac{\operatorname{sen}nx}{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0=f(x)$; $\left|\frac{\operatorname{sen}nx}{n}-0\right|\leq\frac{1}{n}<\varepsilon$ si n grande, $\forall x$. Converge uniformemente en todo **R** .

c) $\boxed{\cos^n x}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}1,\ x=2k\pi\\0,\ x\neq k\pi\\\text{diverge si } x=(2k-1)\pi\end{cases}\Rightarrow$ No converge uniformemente en intervalos que contiengan $k\pi$.
(En los que no los contienen, se puede ver que sí).

d) $\boxed{\frac{x}{\sqrt{n^3+x}}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0=f(x)$, para todos los $x>-1$, intervalo en que están definidas todas las f_n .
En cualquier $[a,b]$ $(a>1)$ es $|f_n(x)-0|\leq\frac{b}{\sqrt{n^3+a}}\to 0$ y hay convergencia uniforme. $\big[$En $[a,\infty)$ no$\big]$.

e) $\boxed{nx^2e^{-nx^2}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. El máximo de $f_n(x)$ se da en $x=\pm 1/\sqrt{n}$ y vale $\frac{1}{e}$, $\forall n$. No converge uniformemente en los intervalos que contengan al origen. Sí lo hace en $(-\infty,-a]$ ó $[a,\infty)$, $a\neq 0$.



---

11 a) $\boxed{\sum\frac{x}{n+1}}$ No converge puntualmente, excepto si $x=0$ (y no puede converger uniformemente en $[0,1]$).

b) $\boxed{\sum e^{-nx^2}\operatorname{sen}nx}$ Si $x\neq 0$ converge: $\sum|\bullet|\leq\sum\left(e^{-x^2}\right)^n$ geométrica convergente. Si $x=0$, $\sum 0$ también.
En $[1,\infty)$, $|e^{-nx^2}\operatorname{sen}nx|\leq e^{-n}$ y $\sum e^{-n}$ convergente $\Rightarrow$ convergencia uniforme (Weierstrass).

c) $\boxed{\sum\frac{x^n}{(n+1)2^n}}$ De potencias, converge en $[-2,2)$. Por teoría sabemos que converge uniformemente en $[-1,1]$.

d) $\boxed{\sum\frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}}$ Si $x\neq 0$ converge, pues $\frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}n^{3/2}\to\frac{x^2+\pi/2}{|x|}>0$ y $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Si $x=0$, la serie diverge.
En $[1,2]$ converge uniformemente (por Weierstrass) ya que $\left|\frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}\right|<\frac{4+\pi/2}{\sqrt{1+n^3}}$.

---

12 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)+x^{2n}}{(n+1)^2\,4^n}$. Como $\sum\frac{(-1)^n\cos(nx)}{(n+1)^2\,4^n}$ converge $\forall x$ $\big[$pues $|\cdot|\leq\frac{1}{(n+1)^2\,4^n}\leq\frac{1}{n^2}$ o $\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$, con $\sum\frac{1}{n^2}$, $\sum\left(\frac{1}{4}\right)^n$ convergentes
converge para los x que lo hace la de potencias $\sum\frac{x^{2n}}{(n+1)^2 4^n}$. Cociente: $\frac{(n+2)^2 4^n|x|^{2n+2}}{(n+1)^2 4^{n+1}|x|^{2n}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{|x|^2}{4}<1\Leftrightarrow|x|<2$.

En ambos extremos $x=\pm 2$ queda $\sum\frac{1}{(n+1)^2}$ convergente. La dada converge para los x del intervalo $\boxed{[-2,2]}$.

$S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2\,4^n}=1-\frac{1}{16}+\frac{1}{144}-\frac{1}{1024}+\cdots$ serie de Leibniz $\Rightarrow S\approx 1-\frac{1}{16}+\frac{1}{144}=\frac{136}{144}=\boxed{\frac{17}{18}}$, con error $<\frac{1}{1024}<10^{-3}$.

En $[0,1]$: $\left|\frac{(-1)^n\cos(nx)+x^{2n}}{(n+1)^2\,4^n}\right|\leq\frac{2}{(n+1)^2\,4^n}$ y $2\sum\frac{1}{(n+1)^2\,4^n}$ converge$^{\uparrow}$. Weierstrass asegura que lo hace uniformemente.

---

13 $\frac{x}{(nx+1)([n+1]x+1)}=\frac{1}{nx+1}-\frac{1}{[n+1]x+1}$. Serie telescópica. $S_n(x)=1-\frac{1}{nx+1}\underset{n\to\infty}{\to}S(x)=\begin{cases}1,\ x>0\\0,\ x=0\end{cases}$ (discontinua).

No converge uniformemente en $[0,\infty)$ [sí lo hace en (a,∞) con $a>0$].

14 **a]** Cociente: $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{n+2}{n+3}\frac{5^n}{5^{n+1}}\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}=\frac{1+2n^{-1}}{1+3n^{-1}}\frac{1}{5}|x|\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{|x|}{5}\Rightarrow \begin{array}{c}\text{converge si } |x|<5\\ \text{diverge si } |x|>5\end{array}$.

Raíz: $\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{|x|}{5[n+2]^{1/n}}=\frac{|x|}{5n^{1/n}[1+2n^{-1}]^{1/n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{|x|}{5\cdot 1\cdot 1}\ \nearrow$

i) Si $x=5$, la serie $\sum\frac{1}{n+2}$ **diverge**, pues lo hace $\sum\frac{1}{n}$ y $\frac{1/(n+2)}{1/n}\to 1$. $\big[$O bien, es la divergente $\sum\frac{1}{n}$, sumada desde $n=2\big]$.

ii) Si $x=\pi$, la serie **converge**, pues claramente $|\pi|<5$.

iii) Hay que decidir si es $3e^{2/3}$ es mayor o menor que 5. Con Taylor: $3e^{2/3}=3\big[1+\frac{2}{3}+\frac{4/9}{2}+\cdots\big]=5+\frac{2}{3}+\cdots>5$.

O directamente: $e^{2/3}>\left(\frac{5}{2}\right)^{2/3}>\frac{5}{3}$, pues $\frac{25}{4}>\frac{125}{27}\Leftrightarrow\frac{1}{4}>\frac{5}{27}\Leftrightarrow 27>20$. La serie **diverge**.

b] $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)5^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{15}+\frac{1}{100}-\frac{1}{625}+\cdots<\frac{1}{2}-\frac{1}{15}+\frac{1}{100}=\frac{150-20+3}{300}=\frac{133}{300}=\frac{266}{600}<\frac{270}{600}=\frac{9}{20}$ por ser serie de Leibniz.

$\big[$O aproximando con dos términos y usando la cota del error: $S\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{15}=\frac{13}{30}$ con $\left|S-\frac{13}{30}\right|<\frac{1}{100}\Rightarrow S<\frac{13}{30}+\frac{1}{100}$ como antes$\big]$.

---

15 Es geométrica $\sum\left(\frac{x^3}{e}\right)^n$. Converge si $\left|\frac{x^3}{e}\right|<1\Leftrightarrow\boxed{|x|<\sqrt[3]{e}}$. Su suma es $\frac{1}{1-x^3/e}$. $\boxed{f(-1)=\frac{1}{1+e^{-1}}=\frac{e}{e+1}}$.

$\big[$Sin ver que es geométrica. Cociente: $\sqrt[n]{|b_n|}=\left|\frac{x^3}{e}\right|<1$ y para $x=\pm\sqrt[3]{e}$ quedan las divergentes $\sum 1$ y $\sum(-1)^n\big]$.

---

16 Serie geométrica $4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-4x^2\right)^n$. Converge $\Leftrightarrow\left|-4x^2\right|=4|x|^2<1\Leftrightarrow\boxed{|x|<\frac{1}{2}}$. Para esos x: $f(x)=\frac{4}{1+4x^2}\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{16}{5}>3$.

Sin observar que es geométrica podemos usar raíz o cociente: $\sqrt[n]{|b_n|}=4^{1/n}4\,|x|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}4|x|^2=\frac{|b_n+1|}{|b_n|}$.

Por tanto, si $|x|<\frac{1}{2}$ converge y si $|x|>\frac{1}{2}$ diverge. Y si $|x|=\frac{1}{2}$, queda la divergente $\sum(-1)^n 4\ \left(a_n\not\to 0\right)$.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^{1-n}=4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\cdots>3$, porque el siguiente término de la serie de Leibniz es $\frac{1}{4}>0$.

---

17 $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{3^{n+1}}{3^n}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{|x|^{n+2}}{|x|^{n+1}}=\frac{3|x|}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow$ la serie converge para todo $x\in\mathbf{R}$.

No es difícil identificar la serie: $f(x)=x e^{3x}$, $f'(x)=(1+3x)e^3$, $f'(1)=4e^3>4\cdot 2^3=32>20$.

O bien: $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(n+1)x^n}{n!}$, $f'(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(n+1)}{n!}=\frac{1}{1}+\frac{6}{1}+\frac{27}{2}+\frac{27\cdot 4}{6}+\cdots>1+6+13=20$.

---

18 $\sum\frac{2^n x^n}{\arctan n}$. Cociente: $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{\arctan n}{\arctan(n+1)}\frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}=\frac{\arctan n}{\arctan(n+1)}2|x|\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\pi/2}{\pi/2}2|x|=2|x|\Rightarrow\begin{array}{l}\text{converge si } |x|<\frac{1}{2}\\ \text{diverge si } |x|>\frac{1}{2}\end{array}$.

Raíz (algo más corto): $\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{2|x|}{(\arctan n)^{1/n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2|x|}{(\pi/2)^0}=2|x|\ \nearrow$

Si $x=\frac{1}{2}$, $\sum\frac{1}{\arctan n}$ diverge porque $a_n\not\to 0\ \left(\to\frac{2}{\pi}\right)$. Si $x=-\frac{1}{2}$, $\sum\frac{(-1)^n}{\arctan n}$ diverge por la misma razón. $\boxed{x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.

Para ver si $\log\frac{3}{2}$ es mayor o menor que $\frac{1}{2}$ podemos utilizar Taylor. Obtenemos una serie de Leibniz:

$\log\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\cdots<\frac{1}{2}$, pues el último (el único) término sumado es positivo y la suma es menor.

O bien: $\log\frac{3}{2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}<e^{1/2}\Leftrightarrow\frac{9}{4}=2.25<e$ $\big[$o $e^{1/2}=1+\frac{1}{2}+\cdots>\frac{3}{2}\big]$. **Converge para** $x=\log\frac{3}{2}$.

---

19 $\sum(-2x)^{3n}=\sum\left(-8x^3\right)^n$ es una serie geométrica, convergente si $|-8x^3|<1$, es decir, si $|x|<\frac{1}{2}$.

Como $\arctan\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{9}{125}+\cdots>\frac{66}{125}>\frac{1}{2}$ $\left(\text{ó } \arctan\frac{3}{5}>\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}>\frac{1}{2}\text{, pues } \frac{9}{25}>\frac{1}{3}\right)$ para ese valor diverge.

---

20 Como el polinomio de Taylor de grado n de un polinomio de grado n es él mismo:

$P(2)=3$, $P'(2)=3$, $P''(2)=8$, $P'''(2)=6\to P(x)=3+3(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$.

$\big[$Más corto que desarrollar: $P(x)=[(x-2)+2]^3-2[(x-2)+2]^2-[(x-2)+2]+5\big]$.

---

21 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\Rightarrow\left[\frac{1}{1-x}\right]^2=1+2x+(1+2)x^2+(2+2)x^3+\cdots=\boxed{1+2x+3x^2+4x^3+\cdots}$

$\frac{1}{1-[2x-x^2]}=1+\left(2x-x^2\right)+\left(2x-x^2\right)^2+\left(2x-x^2\right)^3+\cdots=1+2x+(-1+4)x^2+(-4-8)x^3+\cdots\uparrow$

$1=\left[1-2x+x^2\right]\left[c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\right]\Rightarrow x^0: c_0=1;\quad x^1: c_1-2c_0=0,\ c_1=2c_0=2;$

$x^2: c_2-2c_1+c_0=0,\ c_2=4-1=3;\quad x^3: c_3-2c_2+c_1=0,\ c_3=6-2=4;\ \cdots$

$(1-x)^{-2}=1-2(-x)+\frac{(-2)(-3)}{2}(-x)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{6}(-x)^3+\cdots=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$

f derivada de $\frac{1}{1-x}\Rightarrow$ su desarrollo es el obtenido derivando término a término: $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$

$f'(x)=2(1-x)^{-3}$, $f''(x)=6(1-x)^{-4}$, $f'''(x)=24(1-x)^{-5}\Rightarrow f(x)=1+2x+\frac{6}{2}x^2+\frac{24}{6}x^3+\cdots$

---

22 $f'(x)=1+\tan^2x$, $f''(x)=2\tan x+2\tan^3x$, $f'''(x)=2+8\tan^2x+6\tan^4x$, $f^{IV}(x)=16\tan x+40\tan^3x+24\tan^5x$.

$\boxed{P_3(x)=x+\frac{1}{3}x^3}$. $\tan 1=P_3(1)+\frac{1^4}{4!}f^{IV}(c)$ con $c\in(0,1)\to\tan c>0\to f^{IV}(c)>0\Rightarrow\boxed{\tan 1>P_3(1)}$.

23 i) $e^{-1/3} = 1 - \frac13 + \frac1{18} - \frac1{162} + \cdots \approx \boxed{\frac{13}{18}}$ con error $< \frac{1}{162} < \frac{1}{100}$ por ser serie de Leibniz.

ii) $e^{1/3} = 1+\frac13+\frac1{18}+\frac1{162}+\frac1{1944}+\cdots$, pero aquí el error $R_2 > \frac1{162}$ y no tenemos cotas superiores.

Con el resto: $\left|R_n(\frac13)\right| = \frac{e^c}{(n+1)!3^{n+1}} \underset{e^{1/3}<2}{\overset{c\in(0,1/3)}{<}} \frac{2}{(n+1)!3^{n+1}} < \frac1{100}$ ya para $n=3 \Rightarrow 1+\cdots+\frac1{162} = \boxed{\frac{113}{81}} \approx e^{1/3}$.

[Con una cota mejor: $e^{1/3}<\frac32$ (cierta, pues $e<3<\frac{27}{8}$), se ve que basta P_2 : $\frac{1}{2\cdot(n+1)!3^n} < \frac1{100}$ ya si $n=2$ ($\frac1{108}$) $\to \boxed{\frac{25}{18}}$].

---

24 $\tan(x+y) = \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y} \Rightarrow \tan(\arctan\frac12+\arctan\frac13) = \frac{1/2+1/3}{1-(1/2)(1/3)} = 1$, y $\arctan\frac12+\arctan\frac13 \in (-\frac\pi2,\frac\pi2)$.

$\pi \approx 4(\frac12 - \frac13\frac1{2^3}+\cdots-\frac1{15}\frac1{2^{15}}+\frac13-\frac13\frac1{3^3}+\cdots-\frac19\frac1{3^9})$, con error menor que $4(\frac1{17}\frac1{2^{17}}+\frac1{11}\frac1{3^{11}}) < 10^{-5}$.

(Calcular directamente $\frac\pi3 = 1-\frac13+\frac15+\cdots$ exige un montón de términos).

---

25 $[1+x]^{1/10} = 1+\frac{x}{10}-\frac{9}{200}x^2+\cdots$; $[1+\frac2{10}]^{1/10} = 1+\frac2{100}-\frac{18}{10000}+\cdots \Rightarrow \sqrt[10]{1.2}\approx\boxed{1.02}$ con error<0.01 (<0.0018).
[serie alternada]

$[1+x]^{1/2} = 1+\frac x2 - \frac{x^2}8+\frac{x^3}{16}-\frac5{128}(1+c)^{-7/2}x^4$; $\sqrt{\frac12}\approx 1-\frac14-\frac1{32}-\frac1{128}\approx\boxed{0.7109}$; $|R_3(-\frac12)|\le\frac5{128}2^{7/2}\frac1{16}\approx\boxed{0.0276}$

---

26 $\frac12\log\frac{1+x}{1-x} = \frac12[x-\frac{x^2}2+\frac{x^3}3+\cdots]-\frac12[-x-\frac{x^2}2-\frac{x^3}3+\cdots] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac1{2n+1}x^{2n+1}$. $R=1$. Diverge si $x=\pm1$.

$\frac{1+x}{1-x}=2$ si $x=\frac13\Rightarrow\log2\approx2(\frac13+\frac1{3^4})\sim0.6913$. Como la serie no es alternada, necesitamos el resto:

$f^{IV}(c) = \frac{3!}{2}\left[-\frac1{(1+c)^4}+\frac1{(1-c)^4}\right]$, $|R_3(\frac13)|\le\frac18\left[\frac1{(1+c)^4}+\frac1{(1-c)^4}\right]\frac1{3^4}\overset{0<c<1/3}{\le}\frac18\left[1+\frac{3^4}{2^4}\right]\frac1{3^4}\approx0.094$.

---

27 $f(x)=x\log x$, $f'(x)=1+\log x$, $f''(x)=\frac1x$, $f'''(x)=-\frac1{x^2}$, $f^{IV}(x)=\frac2{x^3}\Rightarrow$

$P_3(x) = e+2(x-e)+\frac1{2e}(x-e)^2-\frac1{6e^2}(x-e)^3+\frac1{12c^3}(x-e)^4$.

$f(3)\approx P_3(3)\sim3.2958$. El error es menor que $\frac{(3-e)^4}{12e^3}<\frac{(3-\frac52)^4}{12(\frac52)^3}=\frac1{3000}<10^{-3}$.

[Ejercicio poco práctico, pues casi es más facil hallar $\log 27$ que evaluar $P_3(3)$].

---

28 $\boxed{f(x)=[36+x^3]^{-1/2}} = \frac16\left[1+\frac{x^3}{36}\right]^{-1/2}=\frac16\left[1-\frac12\frac{x^3}{36}+\frac38\frac{x^6}{36^2}+\cdots\right]=\frac16-\frac{x^3}{432}+\frac{x^6}{20736}+\cdots$, si $|x|<\sqrt[3]{36}$ (>3).

i) $f(2)=\frac16-\frac1{54}+\frac1{324}+\cdots\Rightarrow f(2)\approx\boxed{\frac4{27}}$, con $|\text{error}|<\frac1{324}<10^{-2}$.

ii) $f(2)=\frac16-\frac1{432}+\frac1{20736}+\cdots$ no alternada. Necesitamos resto de Taylor. Probamos con un término. $f'(x) = -\frac{3x^2}{2(36+x^3)^{3/2}}\Rightarrow$

$|R_0(-1)| = \frac{3c^2}{2(36+c^3)^{3/2}} \underset{c\in(-1,0)}{<} \frac{3}{2\cdot35^{3/2}}<\frac1{100}$, pues: $150<35^{3/2}\Leftrightarrow6^25^4<7^35^3\Leftrightarrow180-343$. $f(-1)\approx\boxed{\frac16}$, con $|E|<10^{-2}$.

---

29 a) $\boxed{\operatorname{sen}3}$ Alternada. $|R_{2n+1}(3)|\le\frac{3^{2n+3}}{(2n+3)!}$. $n=6$: $\operatorname{sen}3\approx3-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^5}{5!}-\frac{3^7}{7!}+\frac{3^9}{9!}-\frac{3^{11}}{11!}+\frac{3^{13}}{13!}\approx0.141$.

b) $\boxed{e^{-2}}$ Alternada. $|R_n(-2)|\le\frac{2^n}{(n+1)!}$. $n=9$: $e^{-2}\approx1-2+\frac{2^2}{2!}-\cdots-\frac{2^9}{9!}\approx0.135$.

c) $\boxed{\log\frac12}=\log(1-\frac12)$, $|R_n(-\frac12)|=\frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\overset{-1/2<c<0}{\le}\frac1{n+1}\to\log\frac12\approx-\frac12-\frac18-\cdots-\frac1{2^{999}999}\approx-0.694$.

[Utilizando $\log(\frac12)=-\log2$ habría que sumar también tantos términos (más sencillos); en prob22 tardamos menos].

d) $\boxed{\operatorname{sh}(-1)}$ $\operatorname{sh}x = x+\frac16x^3+\cdots+\frac1{(2n+1)!}x^{2n+1}+0\cdot x^{2n+2}+\frac{\operatorname{ch}c}{(2n+3)!}x^{2n+3}\Rightarrow$

$|R_{2n+1}(-1)|\le\frac1{(2n+3)!}\frac{1+3}2<\frac1{1000}$ si $n=2$ ($7!=5040$) $\to\operatorname{sh}(-1)\approx-1-\frac16-\frac1{120}\approx-1.175$.

e) $\boxed{\operatorname{ch}\frac12}$ $R_{2n}(x)=\frac{\operatorname{ch}c}{(2n+2)!}x^{2n+2}\Rightarrow|R_{2n}(\frac12)|\le\frac{1+2}{(2n+2)!2^{2n+3}}\to n=2\to\operatorname{ch}\frac12\approx1+\frac18+\frac1{384}\approx1.128$.

---

30 a) $(1-x+\frac12x^2-\frac16x^3+\frac1{24}x^4+\cdots)(1-\frac12x^2+\frac1{24}x^4+\cdots)=1-x+\frac13x^3-\frac16x^4+\cdots$.

b) $(x-\frac13x^3+\frac15x^5-\frac17x^7+\cdots)^2=x^2-\frac23x^4+\frac{23}{45}x^6-\frac{44}{105}x^8+\cdots$.

c) $(1+\frac{x^2}2+\frac{x^4}{24}+\cdots)(1-3x+\frac{(-3)(-4)}2x^2+\frac{(-3)(-4)(-5)}6x^3+\cdots)=1-3x+\frac{13}2x^2-\frac{23}2x^3+\cdots$

(o bien, $1+\frac{x^2}2+\frac{x^4}{24}+\cdots=\left[1+3x+3x^2+x^3\right]\left[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right]\Rightarrow$

$a_0=1$; $a_1+3a_0=0, a_1=-3$; $a_2+3a_1+3a_0=\frac12, a_2=\frac{13}2$; $a_3+3a_2+3a_1+a_0=0, a_3=-\frac{23}2$).

d) $\cos2x=1-2x^2+\frac23x^4+\cdots$ $(\forall x)$, $\frac1{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots$ (para $|x|<1$) $\Rightarrow$ Para $|x|<1$,

$\frac{\cos2x}{1+x^2}=\left[1-2x^2+\cdots\right]\left[1-x^2+\cdots\right]=1+(-2-1)x^2+(1+2+\frac23)x^4+\cdots=1-3x^2+\frac{11}3x^4-\cdots$

[Alternativamente podría desarrollarse: $(1+x^2)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+\cdots$. O efecuar un cociente de series:

$\frac{1-2x^2+\frac23x^4+\cdots}{1+x^2}\overset{f\text{ par}}{=}c_0+c_2x^2+c_4x^4+\cdots\Leftrightarrow1-2x^2+\frac23x^4+\cdots=c_0+(c_0+c_2)x^2+(c_3+c_4)x^4+\cdots$

x^0 : $1=c_0$; x^2 : $-2=c_0+c_2\Rightarrow c_2=-3$; x^4 : $\frac23=c_2+c_4\Rightarrow c_4=\frac23+3=\frac{11}3$; ...

e) $\log\left(1+[x+\frac{x^2}2-\frac{x^4}8+\frac{x^6}{16}-\cdots]\right)=[\cdot]-\frac{[\cdot]^2}2+\frac{[\cdot]^3}3+\cdots=x-\frac16x^3+\frac3{40}x^5-\frac5{112}x^7+\cdots$.

31 a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{n+1}}{n!}x^{n+1}$. Converge a $2x\mathrm{e}^{-2x}$ en todo $\mathbf{R}$. b) $3^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2\log 3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\log 3)^n}{n!}x^{2n}$ para todo x. $R=\infty$.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$. La serie converge a $-\log(1-2x)$ si $-1<2x\le 1\Leftrightarrow x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

d) $\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{2}{1+x}-\frac{3}{2-x}=\frac{1}{2}-\frac{11}{4}x+\frac{13}{8}x^2-\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big[2(-1)^n-\frac{3}{2^{n+1}}\big]x^n,$ si $|x|<1=R$.

e) $(1+x)^{-2}=-\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x}=-\frac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$, si $|x|<1$ ($R=1$ y en $x=\pm1$ diverge).

$\Big[$Con la serie binomial: $\binom{-2}{n}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}=(-1)^n(n+1)$ como antes$\Big]$.

---

32 a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\mathrm{e}^{1-4n}=\mathrm{e}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-4}\right)^n=\frac{\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-8}}{1-\mathrm{e}^{-4}}=\frac{1}{\mathrm{e}^3(\mathrm{e}^4-1)}$. b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\operatorname{ch}1$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n}-\ln\frac{n+2}{n+1}\right)=[\text{telescópica}]=\ln\frac{2}{1}-\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\ln 2$.

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n^2-1}=2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=3$, pues $S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\to\frac{3}{2}$ (casi telescópica).

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1/2)^{2n+1}}{2n+1}=2\arctan\frac{1}{2}$. f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}=-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/3)^{n+1}(-1)^n}{n+1}=3\log\frac{3}{2}$.

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\to\frac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\to\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{1}{3}\frac{1}{(1-1/3)^2}=\frac{3}{4}$.

---

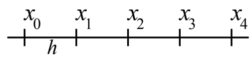
33 a) Apuntes: $A_0=f(x_0)$, $A_1=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]$, $A_2=\frac{1}{2!h^2}[f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)]$, $A_3=\frac{1}{3!h^3}[f(x_3)-3f(x_2)+3f(x_1)-f(x_0)]$.

$Q_4(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_1)+A_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+A_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

$x=x_4\to A_0+4hA_1+12h^2A_2+24h^3A_3+24h^4A_4=f(x_4)\to$

$A_4=\frac{1}{4!h^4}\big(f(x_4)-4[f(x_3)-3f(x_2)+3f(x_1)-f(x_0)]-6[f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)]-4[f(x_1)-f(x_0)]-f(x_0)\big)$,

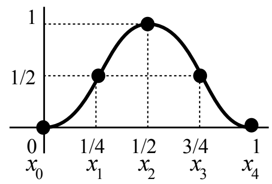
$\boxed{A_4=\frac{1}{4!h^4}\left[f(x_4)-4f(x_3)+6f(x_2)-4f(x_1)+f(x_0)\right]}$.



b) $\boxed{\operatorname{sen}^2(\pi x)}$ $A_0=0$, $A_1=4[\frac{1}{2}-0]=2$, $A_2=8[1-1+0]=0$, $A_3=\frac{32}{3}[\frac{1}{2}-3+\frac{3}{2}-0]=-\frac{32}{3}$,

$A_4=\frac{32}{3}[0-2+6-2+0]=\frac{64}{3}$, $\boxed{Q_4(x)=\frac{4x}{3}\left[16x^3-32x^2+17x-1\right]}$, $Q_4\left(\frac{7}{12}\right)\approx\boxed{0.9362}$

$\Big[$El valor exacto $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\to\operatorname{sen}^2\frac{7\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\approx 0.9330\Big]$.



Error: $\left|\operatorname{sen}^2\frac{7\pi}{12}-Q_4\left(\frac{7}{12}\right)\right|=\frac{1}{120}|\frac{7}{12}-0|\cdot|\frac{7}{12}-\frac{1}{4}|\cdot|\frac{7}{12}-\frac{1}{2}|\cdot|\frac{7}{12}-\frac{3}{4}|\cdot|\frac{7}{12}-1|\cdot|f^{v}(c)|$, $c\in(0,1)$.

$f=\frac{1-\cos 2\pi x}{2}$, $f'=\pi\operatorname{sen}2\pi x$, $f''=2\pi^2\cos 2\pi x$, $f'''=-4\pi^3\operatorname{sen}2\pi x$, $f^{iv}=-8\pi^4\cos 2\pi x$, $f^{v}=16\pi^5\operatorname{sen}2\pi x$.

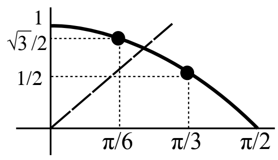
$f^{v}(c)\le 16\pi^5\Rightarrow|\text{error}|\le\frac{1}{120}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{12}\cdot 16\pi^5=\frac{7\pi^5}{36^3}\approx 0.0459$ (mala cota).

---

34 $\boxed{\cos x}$ $Q_1=A_0+A_1(x-0)$. $x=0\to A_0=1$; $x=\frac{\pi}{3}\to 1+A_1\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $A_1=-\frac{3}{2\pi}$. $\boxed{Q_1=1-\frac{3}{2\pi}x}$

$Q_2=A_0+A_1(x-0)+A_2(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. A_0 y A_1 los de antes. Además:

$x=\frac{\pi}{2}\to 1-\frac{3}{4}+A_2\frac{\pi^2}{12}=0$, $A_2=-\frac{3}{\pi^2}$. $\boxed{Q_2=1-\frac{1}{2\pi}x-\frac{3}{\pi^2}x^2}$



$Q_3=A_0+A_1(x-0)+A_2(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+A_3(x-0)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. $x=\frac{\pi}{6}\to A_3=\frac{18(3\sqrt{3}-5)}{\pi^3}$, $Q_3=\cdots$

$\Big[$Con Lagrange, por ejemplo Q_2 : $1\frac{(x-\pi/3)(x-\pi/2)}{(0-\pi/3)(0-\pi/2)}+\frac{1}{2}\frac{(x-0)(x-\pi/2)}{(\pi/3-0)(\pi/3-\pi/2)}+0=\frac{6}{\pi^2}\left(x^2-\frac{5\pi}{6}x+\frac{\pi^2}{6}\right)-\frac{9}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi}{2}x\right)\Big]$.

$Q_2(x)=x\to\frac{3}{\pi^2}x^2+\left(1+\frac{1}{2\pi}\right)x-1=0$, $x=\frac{\pi^2}{6}\left[-1-\frac{1}{2\pi}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{2\pi}\right)^2+\frac{3}{\pi^2}}\,\right]\approx 0.7249$. [Al final de 3.6 vimos que era ≈ 0.7391].

---

35 $\left.\begin{array}{l} f(a+h)=f(a)+f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2}+f'''(a)\frac{h^3}{6}+f^{iv}(a)\frac{h^4}{24}+o(h^4) \\ f(a-h)=f(a)-f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2}-f'''(a)\frac{h^4}{6}+f^{iv}(a)\frac{h^4}{24}+o(h^4)\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)+f'''(a)\frac{h^2}{2}+o(h^3)=f'(a)+o(h) \\ \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)+\frac{f^{iv}(a)h^2}{12}+o(h^2)=f''(a)+o(h)\end{array}$

Si h es pequeño las derivadas se parecen a los cocientes de la izquierda (es una 'derivación aproximada').

$h=\frac{1}{2}$ es gordo, pero a ver que sale con $f(x)=4^x$ (se puede probar con h más pequeños y calculadora):

$f'(0)\approx\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\frac{4^{1/2}-4^{-1/2}}{1}=\boxed{1.5}$ (exacto: $\ln 4\approx 1.326$). $f''(0)\approx\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}=\frac{2+1/2-2}{1/4}=\boxed{2}$ (exacto: $(\ln 4)^2\approx 1.922$).

---

36 Es el polinomio de Taylor de orden 3 en $x=1$ de $f(x)=x\cos x$: $f'(x)=\cos x-x\operatorname{sen}x$, $f''(x)=-2\operatorname{sen}x-x\cos x$,

$f'''(x)=x\operatorname{sen}x-3\cos x\to P_3(x)=\cos 1+[\cos 1-\operatorname{sen}1](x-1)-[2\operatorname{sen}1+\cos 1](x-1)^2+[\operatorname{sen}1-3\cos 1](x-1)^3$.

---

37 $\sqrt{1-x^4}=1-\frac{1}{2}x^4+o(x^7)$. $P(x)=1-\frac{1}{2}x^4$ es el único polinomio de grado menor que 8 que lo verifica

(cualquier $P(x)=1-\frac{1}{2}x^4+a_8x^8+a_9x^9+\cdots+a_nx^n$ también lo hace).

38 a) $\boxed{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{\operatorname{sen}^2x-x^2}{x^2\operatorname{sen}^2x}=\frac{1-\cos 2x-2x^2}{x^2(1-\cos 2x)}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{s-2x}{x(1-c)+x^2s}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{2c-2}{1-c+4xs+2x^2c}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{-2s}{3s+6xc-2x^2s}=\frac{-2s/2x}{3s/2x+3c-xs}\to\boxed{-\frac{1}{3}}\leftarrow\frac{-16x^4/4!+\cdots}{2x^4+\cdots}$

b) $\boxed{\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\operatorname{sen}^2 x-x^2}}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\operatorname{sen}2x-2x}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x-2}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{e^x-e^{-x}}{-4\operatorname{sen}2x}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x}\to\boxed{-\frac{1}{4}}\leftarrow\frac{2x^4/4!+\cdots}{-8x^4/4!+\cdots}$

c) $\boxed{\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{\operatorname{sh}x+\operatorname{sen}x}{2x}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{\operatorname{ch}x+\cos x}{2}\to\boxed{1}\leftarrow\frac{x^2+\cdots}{x^2}$. d) $\boxed{\frac{\operatorname{sen}x\cos x-\arctan x}{\log(1+x^3)}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{3}$. e) $\boxed{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$.

f) $\boxed{\frac{\log[\cos 2x]}{\log[\cos 3x]}}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{2}{3}\frac{\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}{\frac{\operatorname{sen}3x}{\cos 3x}}\to\boxed{\frac{4}{9}}$, pues $\frac{\cos 3x}{\cos 2x}\to 1$ y $\frac{2x+\cdots}{3x+\cdots}\to\frac{2}{3}$.

h) $\boxed{\frac{e^x-e^{\operatorname{sen}x}}{x^3}}=\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-1-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}{x^3}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{6}$ $\left(e^{\operatorname{sen}x}=1+x-\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{1}{2}[x^2+\cdots]+\frac{1}{6}[x^3+\cdots]+\cdots\right)$.

i) $\log(1+2x)=(2x)-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}\cdots=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4\cdots$ $\left(\text{si } |x|<\frac{1}{2}\right)$.

$(1+3x)^{1/3}=1+\frac{(3x)}{3}+\frac{(1/3)(-2/3)(3x)^2}{2}+\frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)(3x)^3}{6}+\cdots=1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3\cdots$ $\left(\text{si } |x|<\frac{1}{3}\right)$.

$\boxed{\frac{(1+3x)^{1/3}\log(1+2x)-2x}{\operatorname{sen}x-x}}=\frac{2x+(2-2)x^2+(\frac{8}{3}-2-2)x^3+\cdots-2x}{x-\frac{1}{6}x^3-\cdots-x}=\frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{8}$. [Por L'H mucho más largo].

---

39 a) $\boxed{\frac{\cos x-e^{ax}}{\operatorname{sen}x+\log(1-x)}}=\frac{1-\frac{1}{2}x^2-1-ax-\frac{a^2}{2}x^2+o(x^2)}{x-\frac{1}{6}x^3-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=\frac{-ax+\cdots}{-\frac{1}{2}x^2+\cdots}$. Si $a\neq 0$ no hay límite; si $\boxed{a=0}$, $\frac{-\frac{1}{2}x^2+\cdots}{-\frac{1}{2}x^2+\cdots}\to\boxed{1}$.

b) $\boxed{\frac{\operatorname{sen}x}{x^3}-\frac{a}{x^2}}=\frac{1-a}{x^2}-\frac{1}{6}+o(x)\to\boxed{-\frac{1}{6}}$ si $\boxed{a=1}$ y si $a\neq 1$ no hay límite.

---

40 a) $\frac{\operatorname{sen}x^2-x^2}{x^{2n}}=\frac{\frac{1}{6}x^6+\cdots}{x^{2n}}$. Si $n=0,1,2$ el límite es 0 . Si $n=3$, es $-\frac{1}{6}$. Si $n>3$ no existe límite (es $-\infty$).

b) $\frac{\tan x}{x^n}=\frac{x+\cdots}{x^n}$; $n=0,\to 0$. $n=1,\to 1$. $n>1$, no existe ($\to\infty$ por la derecha y a $+$ ó $-\infty$ por la izquierda).

---

41 $\boxed{1^-}$: $\boxed{\log x\log(1-x)}=\frac{\log(1-x)}{1/\log x}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{\log^2 x}{\frac{1}{x}-1}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{2\log x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2x\log x\to\boxed{0}$

$\boxed{\infty}$: $\boxed{\frac{1-x\arctan(1/x)}{1-\cos(1/x)}}$ $\operatorname*{lím}_{t\to 0^+}\frac{1-\frac{\arctan t}{t}}{1-\cos t}=\operatorname*{lím}_{t\to 0^+}\frac{1-\left[1-\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right]}{1-\left[1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right]}=\boxed{\frac{2}{3}}$. $\boxed{x^4\left[\cos\frac{1}{x}-e^{-1/x^2}\right]}$ $\operatorname*{lím}_{t\to 0^+}\frac{\cos t-e^{-t^2}}{t^4}=\operatorname*{lím}_{t\to 0^+}\frac{1-\frac{t^2}{2}-1+t^2+\cdots}{t^4}=\boxed{\infty}$

$\boxed{\left[\cos\frac{1}{x}\right]^{\log x}}$ $e^{\log(\cos\frac{1}{x})\log x}\to\boxed{1}$, pues $\frac{\log(\cos\frac{1}{x})}{1/\log x}\overset{\text{L'H}}{\to}-\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}}\frac{(\log x)^2}{x}\to\frac{0}{1}\cdot 0$ (visto en teoría).

---

42 a) i) $\operatorname{sen}^2x=\left[x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right]^2=x^2-\frac{x^4}{3}+\cdots$, $\log(1+x^4)=x^4+\cdots\Rightarrow\operatorname*{lím}_{x\to 0}f(x)=\operatorname*{lím}_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+\cdots}{x^4+\cdots}=\frac{1}{3}$.

ii) y iii): Por ser sen^2x acotado: $\operatorname*{lím}_{x\to\pm\infty}f(x)=\operatorname*{lím}_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{\log(1+x^4)}\overset{\text{L'H}}{=}\operatorname*{lím}_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{4x^3/(1+x^4)}=\operatorname*{lím}_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^4}{2x^2}=\infty$.

b) i) $\frac{x\left[1-x+\frac{1}{2}x^2-\cdots\right]\left[1+\frac{1}{2}x+\frac{-1/4}{2}x^2+\cdots\right]-\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right]}{x^3+\cdots}=\frac{\left[x-\frac{1}{2}x^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8})x^3+\cdots\right]-\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right]}{x^3+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{11}{24}$.

ii) $\operatorname*{lím}_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, pues el denominador tiende a $\frac{\pi}{2}$ y el numerador $\frac{x^{3/2}}{e^x}\sqrt{x^{-1}+1}-\log(1+x)\to-\infty$. iii) no definida g .

---

43 a) $\boxed{\frac{\log(1+2x^2)-\log(1+x^2)}{\arctan x^2}}=\frac{2x^2-x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{1}$ $\left[\frac{\frac{4x}{1+2x^2}-\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{2x}{1+x^4}}=\frac{\frac{2}{1+2x^2}-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^4}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1\right]$ $=\frac{\log\frac{1+2x^2}{1+x^2}}{\arctan x^2}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{\frac{2}{\pi}\log 2}$ $\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}\boxed{\frac{4}{\pi}\log\frac{3}{2}}$

b) $\boxed{x[\cos\frac{1}{x}-1]}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{0}$ ($0\times$ acotado). $\operatorname*{lím}_{x\to\infty}=\operatorname*{lím}_{t\to 0^+}\frac{\cos t-1}{t}=\operatorname*{lím}_{t\to 0^+}\frac{-t^2/2+\cdots}{t}=\boxed{0}$ $\left[\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\to\frac{-\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\operatorname{sen}\frac{1}{x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0\right]$

$\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}\boxed{1-\cos 1}$

c) $\boxed{\frac{x-\operatorname{sen}x}{x\arctan x^2}}=\frac{x^3/6+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{\frac{1}{6}}$ $\left[\to\frac{1-\cos x}{\arctan x^2+\frac{2x^2}{1+x^4}}\to\frac{\operatorname{sen}x/x}{\frac{2}{1+x^4}+\frac{4-4x^4}{(1+x^4)^2}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{6}\right]$ $=\frac{1-\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\arctan x^2}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1-0}{\pi/2}=\boxed{\frac{2}{\pi}}$ $\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}\boxed{\frac{4}{\pi}[1-\operatorname{sen}1]}$

d) $\boxed{\frac{\arctan x-\operatorname{sh}x}{x(\operatorname{ch}x-\cos x)}}=\frac{x-\frac{1}{3}x^3-x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x[1+\frac{1}{2}x^2-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{-\frac{1}{2}}$ $=\frac{\frac{\arctan x}{\operatorname{ch}x}-\operatorname{th}x}{x[1-\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}]}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{0-1}{\infty[1-0]}=\boxed{0}$ $\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}\boxed{\frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{sh}1}{\operatorname{ch}1-\cos 1}}$

e) $\boxed{\frac{\log(1+x)\sqrt{1+x}-x}{\arctan x^3}}$ $\log(1+x)\sqrt{1+x}=\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right]\left[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots\right]=x-\frac{1}{24}x^3+\cdots\Rightarrow\frac{x-\frac{1}{24}x^3+\cdots-x}{x^3+\cdots}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{-\frac{1}{24}}$

[L'Hôpital no muy largo simplificando: $\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{\frac{1}{1+x}\sqrt{1+x}+\frac{\log(1+x)}{2\sqrt{1+x}}-1}{3x^2/(1+x^6)}=\frac{1+x^6}{6\sqrt{1+x}}\frac{2+\log(1+x)-2\sqrt{1+x}}{x^2}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{1}{12}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{x}\cdots$].

$\operatorname*{lím}_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, pues el denominador $\to\frac{\pi}{2}$ y $x\left(\frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}-1\right)\to-\infty$ $\left[\infty(0\cdot 1-1)\right]$. $\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow}\boxed{-\frac{4}{\pi}}$

---

44 i) $\frac{\sqrt{1+9x^4}-1}{x^b}=\frac{\frac{9}{4}x^4+\cdots}{x^b}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\begin{cases}0, \text{ si } b<4\\ 9/2, \text{ si } b=4\\ \infty, \text{ si } b>4\end{cases}$. ii) $\frac{x^2\sqrt{9+x^{-4}}-x^{-2}}{x^b}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}0, \text{ si } b>2\\ 3, \text{ si } b=2\\ \infty, \text{ si } b<2\end{cases}$.

45 **a]** $\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right]\left[1-\frac{4}{2}x^2+\frac{16}{24}x^4-\cdots\right]=x-(2+\frac{1}{3})x^3+(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5})x^5+\cdots=\boxed{x-\frac{7}{3}x^3+\frac{23}{15}x^5+\cdots}$.

b] i) $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\frac{f(x)-x}{x^4-x^5}=\frac{-\frac{7}{3}x^3+\frac{23}{15}x^5-\cdots}{x^4-x^5}=\frac{1}{x}\,\frac{-\frac{7}{3}+\frac{23}{15}x^2-\cdots}{1-x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}\boxed{-\infty}$ $\left[\infty\times(-\frac{7}{3})\right]$.

$\Big[$Más largo: $\frac{(1+x^2)^{-1}\cos 2x-2\arctan x\,\mathrm{sen}\,2x-1}{4x^3-5x^4}\overset{\frac{0}{0}\text{ L'H}}{\longrightarrow}\frac{(1+x^2)^{-2}\cos 2x}{10x^2-6x}-\frac{\mathrm{sen}\,2x}{2x}\frac{2(1+x^2)^{-1}}{3x-4x^2}-\frac{\arctan x}{x}\frac{(1+x^2)^{-1}}{3x-4x^2}\to-\infty\Big]$.

ii) $\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]$ $\frac{\arctan x\cos 2x}{x^4(1-x)}-\frac{1}{x^3(1-x)}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{0}$ $\left[\frac{\text{acotado}}{-\infty}-\frac{1}{-\infty}\right]$. Aplicar L'Hôpital no conviene y Taylor no se puede usar.

iii) Si $x\to1^-$, el numerador tiende a $\frac{\pi}{4}\cos 2-1<0$ $\left[\cos 2<0 \text{ pues } 2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right]$ y el denominador $x^4(1-x)\to+0$.

El límite será $\boxed{-\infty}$. [L'Hôpital no se pueden aplicar, pues no es indeterminado, y Taylor, en un punto lejano a dónde calculamos el límite, no es adecuado, aunque de la expresión de **a]** se puede deducir (hablando algo de errores) que el numerador es negativo].

---

46 $f(x)=\frac{\arctan(2x)}{\sqrt{1+x}}$ $(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(-1/2)(-3/2)}{2}x^2+\frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{6}x^3+\cdots\to$

$f(x)=\left[2x-\frac{8}{3}x^3+\cdots\right]\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots\right]=\cdots+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{8}\right)x^4+\cdots=\cdots+\frac{17}{24}x^4+\cdots\to f^{(4)}(0)=17$.

---

47 **a]** $f(x)=x^2-\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sh}\,x=x^2-\left[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots\right]\left[x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots\right]=x^2-x^2-\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right]x^4-\left[\frac{1}{120}-\frac{1}{36}+\frac{1}{120}\right]x^6+\cdots$

$=\boxed{\frac{1}{90}x^6+\cdots\Rightarrow f^{iv}(0)=0}$ (pues es 0 el coeficiente que acompaña a x^4 en el desarrollo).

b] Del desarrollo se deduce que si $n=1,\dots,5$ el límite es $\boxed{0}$. Si $n=6$, es $\boxed{\frac{1}{90}}$. Si $n=8,10,\dots$, es $\boxed{\infty}$.

Y si $n=7,9,11,\dots$, es $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x^n}=-\infty$.

c] Lo mayor para $x\to\infty$ es $\mathrm{sh}\,x$, la f va a tomar valores muy grandes y muy negativos y no existirá $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

Para formalizarlo podemos dar dos sucesiones $\{a_n\},\{b_n\}\to\infty$, teniendo $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ distinto límite:

Por ejemplo, si $a_n=n\pi$ se cumple que $f(n\pi)=n^2\pi^2\to\infty$. Pero si $b_n=\frac{3\pi}{2}+n\pi$ tiende $f(b_n)\to-\infty$:

$f(b_n)=b_n^2-\mathrm{sh}(b_n)=\mathrm{sh}(b_n)\left[\frac{b_n^2}{\mathrm{sh}(b_n)}-1\right]\to-\infty$ $\left(\text{“}\infty(0-1)\text{”, pues } \frac{x^2}{\mathrm{sh}\,x}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{2x}{\mathrm{ch}\,x}\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{2}{\mathrm{sh}\,x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0 \text{ y } b_n\to\infty\right)$.

---

48 **a]** $f(x)=\cos x^2\log(1+2x^2)=\left[1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{24}x^8+\cdots\right]\left[2x^2-2x^4+\frac{8}{3}x^6-4x^8+\cdots\right]=2x^2-2x^4+\left[\frac{8}{3}-1\right]x^6+\left[1-4\right]x^8+\cdots$

$=2x^2-2x^4+\frac{5}{3}x^6-3x^8+\cdots\Rightarrow f^{vi}(0)=6!\frac{5}{3}=\boxed{1200}$.

b] i) $\frac{2x^2+\cdots}{x^n}$. Si $n=1$, $\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Si $n=2$, $\underset{x\to0}{\longrightarrow}2$. Si $n=4,6,\dots$, $\underset{x\to0}{\longrightarrow}\infty$. Si $n=3,5,\dots$, $\underset{x\to0^\pm}{\longrightarrow}\pm\infty$.

ii) $f(x)=\frac{\cos x^2}{x^{n-1/2}}\frac{\log(1+2x^2)}{x^{1/2}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\boxed{0}$ para todo n, pues lo hacen ambos $\left[\frac{ac.}{\infty}\text{ y }\overset{\text{L'H}}{\to}\frac{4x/(1+2x^2)}{1/2x^{1/2}}=\frac{8x^{3/2}}{1+2x^2}\to0\right]$.

---

49 a) $\boxed{x\arctan\frac{1}{x}}$, $f(0)=0$. $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to0^+}\arctan\frac{1}{h}=\frac{\pi}{2}\neq-\frac{\pi}{2}=f'(0^-)\Rightarrow$ No existe $f'(0)$ (y tampoco $f''(0)$).

b) $\boxed{\frac{\tan x}{x}}=1+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}x^4+\cdots\Rightarrow f(0)=1,\, f'(0)=0,\, f''(0)=\frac{2}{3},\cdots$.

c) $\boxed{\frac{\log(1+|x|)}{|x|}}=1-\frac{|x|}{2}+\cdots$. $f(0)=1$. No existe $f'(0)$ (y, por tanto, tampoco $f''(0)$).

d) $\boxed{\arctan(\log x^2)}$, $f(0)=-\frac{\pi}{2}$. $f'(x)=\frac{2}{x+4x(\log|x|)^2}$, si $x\neq0$. $x(\log|x|)^2=\frac{(\log|x|)^2}{1/x}\underset{(\frac{\infty}{\infty})\text{L'H}}{\to}\frac{2\log|x|}{-1/x}\underset{(\frac{\infty}{\infty})\text{L'H}}{\to}\frac{2/x}{1/x^2}=8x\underset{x\to0}{\to}0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^\pm}\frac{f(x)+\frac{\pi}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^\pm}f'(x)=\pm\infty$, pues además $f'(x)\gtrless0$ si $x\gtrless0$. Por tanto, f no es derivable en $x=0$ (y $\nexists f''(0)$).

---

50 Continua en $\mathbf{R}-\{-1,0,1\}$. En $x=-1$ discontinua $\left(f(x)\to-\infty\right)$.

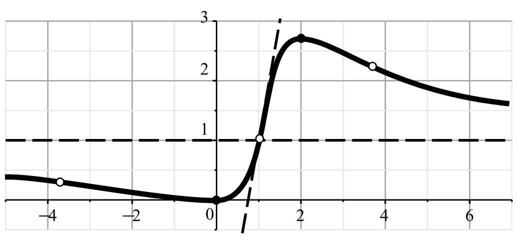
En $x=0,1$ continua: $\lim\limits_{x\to0}(x-1)\frac{-x^2+o(x^2)}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\log|1-x^2|}{x/(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x}{1-x^2}(x-1)^2=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x(1-x)}{1+x}=0$.

Es derivable en $x=0$: $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}(h-1)\frac{\log(1-h^2)}{h^2}=-\lim\limits_{h\to0}\frac{-h^2+o(h^2)}{h^2}=1$.

f continua en $[0,1]$, derivable en $(0,1)$ y $f(0)=f(1)\Rightarrow$ existe c, $0<c<1$, con $f'(c)=0$ (Rolle).

---

51 $\boxed{f(x)=\mathrm{e}^{4/x-4/x^2}}=\mathrm{e}^{4(x-1)/x^2}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. Continua en todo $\mathbf{R}$. $f\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}1$.



$f'(x)=\frac{4(2-x)}{x^3}\mathrm{e}^{4/x-4/x^2}$ si $x\neq0$. f crece en $(0,2)$ y decrece en el resto.

$f'(0^\pm)=\lim\limits_{h\to0^\pm}\frac{f(h)}{h}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{4t^2-4t}}=0$. También existe $f'(0)=0$.

$f''(x)=8(x^3-x^2-8x+8)x^{-6}\mathrm{e}^{4/x-4/x^2}\Rightarrow$ inflexión en $x=1,\pm2\sqrt{2}$.

$f(1)=1$, $f(2)=\mathrm{e}$, $f'(1)=4$. $P_{11}(x)=1+4(x-1)=4x-3$.

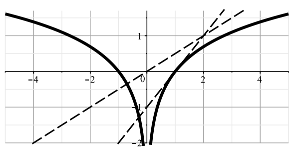
$f(1.1)=\boxed{1.4}+\frac{f''(c)}{2}(1.1-1)^2$, $c\in(1,1.1)$. Como $f''<0$ en $\left(1,2\sqrt{2}\right)$, es $f(1.1)<1.4$ (gráfica debajo de recta tangente).

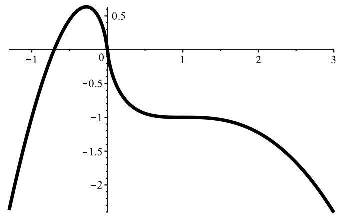
52 a) $\boxed{y=x\log x^2-x^2}\ \xrightarrow[x\to\pm\infty]{\xrightarrow{x\to0}0}-\infty\quad y'=2(\log|x|+1-x)\xrightarrow{x\to0}-\infty$.

$y'=0$ si $x=1$ o en el otro corte de $\log|x|$ y $x-1$.

$y''=2-\frac{2}{x}=0$ si $x=1$. $y(1)=-1$.

$y=0$ si $x=0$ o donde se cortan $\log|x|$ y $\frac{x}{2}$.



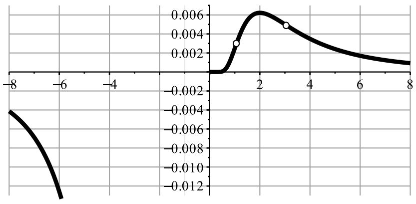


b) $\boxed{y=x^{-3}e^{-6/x}}\quad \lim_{x\to0^-}y=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{6t}}=0$.

$y\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$. $y\xrightarrow[x\to0^-]{}(-\infty)(\infty)=-\infty$.

$y>0$ si $x>0$, $y<0$ si $x<0$.

$y'=\frac{3(2-x)}{x^5}e^{-6/x}$. $y''=\frac{(x-1)(x-3)}{x^7}e^{-6/x}$.



c) $\boxed{y=x^{-1}e^{-x}}\quad y'=-\frac{x+1}{x^2}e^{-x}$.

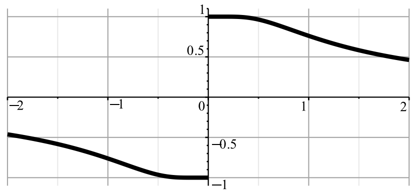
$y(-1)=-e$. $y(1)=-e^{-1}$.

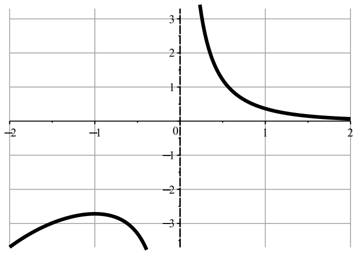
$y\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, $y\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$, $y\xrightarrow[x\to0^\pm]{}\pm\infty$.

d) $\boxed{y=\operatorname{th}\frac{1}{x}}$ Impar. $y\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$. $y\xrightarrow[x\to0^+]{}1$.

$y'=-\frac{1}{x^2}\left[1-\operatorname{th}^2\frac{1}{x}\right]=-\frac{1}{x^2\operatorname{ch}^2(1/x)}\xrightarrow[x\to0^+]{}0$.

$y''=2\frac{x-\operatorname{th}(1/x)}{x^4\operatorname{ch}^2(1/x)}=0\Leftrightarrow \operatorname{th}z=\frac{1}{z}$ aproximado por Newton





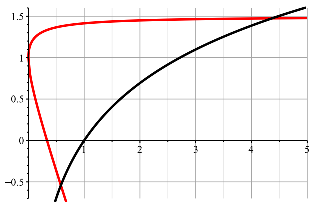
e) $\boxed{y=x^{1/x}}=e^{\log x/x}$. $y'=\frac{1-\log x}{x^2}x^{1/x}$.

Dominio $x\geq0$. $y\xrightarrow[x\to0^+]{}0$. $y\xrightarrow[x\to\infty]{}1$.

$y''=x^{1/x-4}\left[(\log x)^2+2(x-1)\log x-3x+1\right]=0$

cuando $\log x=1-x\pm\sqrt{x^2+x}$ [su dibujo $\to$

$f(1)=1$. $f(2)=\sqrt{2}$. Máximo $f(e)\approx1.44$.



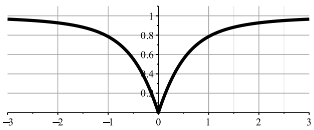
f) $\boxed{f(x)=x\arctan\frac{1}{x}}\quad y'(0^\pm)=\pm\frac{\pi}{2}$. Par.

$f'(x)=\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$.

$f''(x)=-\frac{2}{(1+x^2)^2}<0\ \forall x$.

$f(\pm1)=\frac{\pi}{4}$. $f\geq0$.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$.

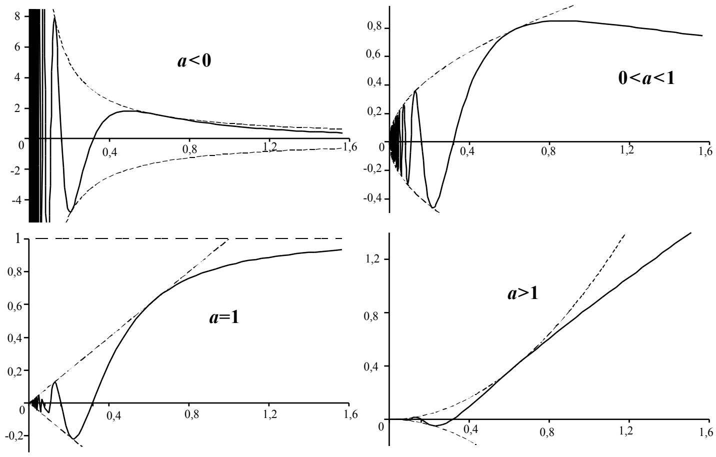


g) $\boxed{y=x^a\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$, $a\in\mathbf{R}$

x^a modula $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

No definida si $x<0$, salvo si a es entero o racional con denominador impar.

$$\lim_{x\to\infty}=\lim_{t\to0^+}\frac{\operatorname{sen}t}{t^a}=\begin{cases}0, & a<1\\ 1, & a=1\\ \infty, & a>1\end{cases}$$



---

53 $\boxed{f(x)=\operatorname{sen}x-x\cos x}$. Impar. $f'(x)=x\operatorname{sen}x=0$ si $x=k\pi$. $f(k\pi)=(-1)^{k+1}k\pi$.

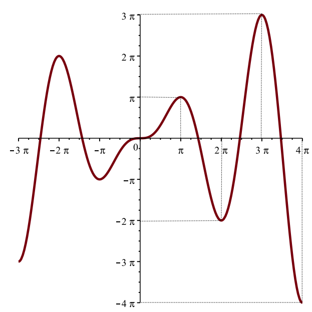
$f''(x)=x\cos x+\operatorname{sen}x=0$. $\quad f''(k\pi)=(-1)^k k\pi$.

$x=k\pi$ es máximo si k impar y mínimo si $k\neq0$ par.

$x=0$ es punto de inflexión con tangente horizontal.

El desarrollo de Taylor de f es $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots$ (su derivada es $x^2-\frac{1}{6}x^4+\cdots$).

$$\frac{f(x)}{x^m}=\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^m}\xrightarrow[x\to0]{}\begin{cases}0 \text{ si } m<3\\ 1/3 \text{ si } m=3\\ \text{no existe si } m>3\end{cases}\qquad \frac{\operatorname{sen}x}{x^m}-\frac{\cos x}{x^{m-1}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\begin{cases}0 \text{ si } m>1\\ \text{no existe si } m\leq1\end{cases}$$



---

54 $\boxed{f(x)=\frac{x^2\operatorname{sen}\pi x}{1-\cos\pi x}}$ si $x\notin\mathbf{Z}$, $f(x)=0$ si $x\in\mathbf{Z}$. El denominador se anula si $\cos\pi x=1\Leftrightarrow x=2n, n\in\mathbf{Z}$.

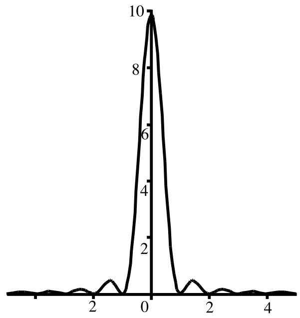
Si $x\notin\mathbf{Z}$, f es continua (cociente de continuas). También si $x=2n+1, n\in\mathbf{Z}$, pues $\lim_{x\to2n+1}f(x)=f(2n+1)=0$.

En $x=2n$ hay indeterminación $0/0$: $\lim_{x\to2n}\frac{x^2\operatorname{sen}\pi x}{1-\cos\pi x}=\lim_{x\to2n}\frac{2x\operatorname{sen}\pi x+\pi x^2\cos\pi x}{\pi\operatorname{sen}\pi x}$.

Si $n\neq0$, el último numerador tiende a $4n^2\pi$ y el denominador a 0: la f no es continua en $x=2n$, $n\neq0$.

Si $n=0$: $\lim_{x\to0}\frac{2x\operatorname{sen}\pi x+\pi x^2\cos\pi x}{\pi\operatorname{sen}\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{sen}\pi x+4x\pi\cos\pi x-\pi^2x^2\operatorname{sen}\pi x}{\pi^2\cos\pi x}=0=\lim_{x\to0}\frac{\pi x^3+\cdots}{\pi^2x^2/2+\cdots}$. Continua en $x=0$.

$\boxed{55}$ $\boxed{f(x)=\frac{\operatorname{sen}^2\pi x}{x^2}}=\frac{1}{x^2}\big[\pi x-\frac{\pi^3x^3}{6}+\cdots\big]^2=\pi^2-\frac{1}{3}\pi^4x^2+\cdots\Rightarrow f'(0)=0,\ f''(0)=-\frac{2}{3}\pi^4$.



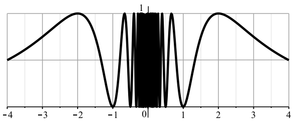
$f'(x)=\frac{2}{x^3}(\pi x\cos\pi x-\operatorname{sen}\pi x)$. $0\le f(x)\le\frac{1}{x^2}$ (modula al sen^2).

$f(n)=f'(n)=0$, $n\in\mathbf{N}$, mínimos. Máximos donde se cortan $\tan\pi x$ y πx.

$f'(\frac{1}{2})=-16\neq 0\Rightarrow$ en un entorno f decrece y existe f^{-1} y además

$$(f^{-1})'\big(f(\tfrac{1}{2})\big)=\frac{1}{f'(1/2)}=-\frac{1}{16}.$$

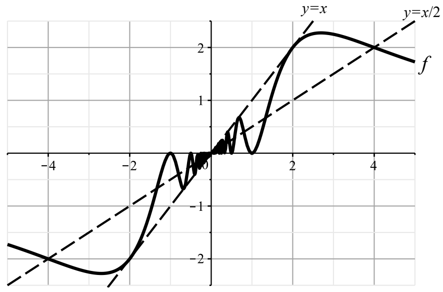
$\boxed{56}$ i) $\boxed{g(x)=\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})}$ $g(\frac{4}{n})=\begin{cases}0 \text{ si } n=4k\\ 1/2 \text{ si } n=2k+1\\ 0 \text{ si } n=4k+2\end{cases}$



$\{g(4/n)\}$ diverge (hay subsucesiones convergentes a diferentes límites). Que $\{g(4/n)\}$ está acotada basta para probar que había subsucesiones convergentes.

g par. $g\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$.

ii) $\boxed{f(x)=x\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{x})}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ ($0\times$ acot.). Continua. $f'(0)=\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{h})$ no existe.



Impar. $f\ge 0$ si $x\ge 0$. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2\pi t}{t}=0$.

Gráfica comprendida entre $y=0$ e $y=x$. Los mínimos positivos estarán donde $f(x)=0$: $x=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$ Los máximos (no calculables) los da:

$$f'(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\Big[\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}\Big].\qquad f''(x)=\frac{2\pi^2}{x^3}\cos\frac{2\pi}{x}.$$

$f(x)=x$ cuando $x=\frac{2}{2k+1}$. $f(x)=\frac{x}{2}$ cuando $x=\frac{4}{4k+1}$ (puntos inflexión).

Parece estar el máximo absoluto un poco a la derecha de $x=2$. $f'(2)=1$, $f'(3)<0$ y f' es continua.

Por tanto f' se anula en un $c\in(2,3)$, donde alcanza un máximo local (pasa de crecer a decrecer).

El máximo es absoluto pues $f(x)\ge 2$ si $x\ge 2$ y es $f'(x)<0$ si $x\ge 3$ (no es difícil verlo).

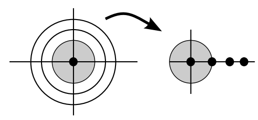
$\boxed{57}$ a) $\left.\begin{array}{l}f(x)=\frac{\log_2 x}{x}+\frac{x^2}{2^x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0\\ \{n\}\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow a_n=f(n)\to\boxed{0}$. b) $\left.\begin{array}{l}f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{3x}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{3}\\ \{a_n\}=\{\frac{n}{n^2-1}\}\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow b_n=f(a_n)\to\boxed{\frac{1}{3}}$.

c) $c_n\to\boxed{\frac{1}{2}}$, pues $c_n=\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(1/n)^2}\cdot\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{1/n}=f\big(\frac{1}{n}\big)\cdot g\big(\frac{1}{n}\big)$ con $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}$ y $g(x)=\frac{\log(1+x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$.

$\boxed{58}$ $f(x)=x^{1/3}$ continua y derivable en $[n,n+1]\overset{\text{TVM}}{\Rightarrow}\exists c\in(n,n+1)$ tal que $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{1}{3c^{2/3}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (pues también $c\to\infty$).

$\Big[$De otra forma: $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{a^{2/3}+(ab)^{1/3}+b^{2/3}}\to a_n=\frac{1}{n^{2/3}+(n^2+n)^{1/3}+(n+1)^{2/3}}\to 0\Big]$.

$\boxed{59}$ $\big||z|-|0|\big|=|z|<\varepsilon$ si $|z-0|=|z|<\delta=\varepsilon\Rightarrow|z|$ continua en $z=0$.

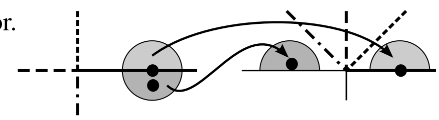


$\big||z|^0-|0|^2\big|=|z|^2<\varepsilon$ si $|z-0|<\delta=\sqrt{\varepsilon}\Rightarrow|z|^2$ continua en $z=0$.

$\lim_{z\to 0}\frac{|z|-|0|}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+\mathrm{i}y}$ no existe: para $y=0$, la fracción vale 1 si $x>0$ y -1 si $x<0$.

$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2-|0|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{x^2+y^2}{x+\mathrm{i}y}\lim_{z\to 0}x-\mathrm{i}y=0$. [Ninguna de las dos es derivable en el resto del plano complejo pues no se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann ($f=u+0\cdot\mathrm{i}$)].

$\boxed{60}$ $f\big(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)=\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$. Lleva rectas $\theta=K$ a rectas $\theta=\frac{K}{2}$ del semiplano superior.

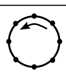


Un $(x,0)$ va a $\big(\sqrt{x},0\big)$, pero puntos muy cercanos de abajo se van lejos.

[En el resto de $\mathbf{C}$ las cosas van bien].

$\boxed{61}$ $\left.\begin{array}{l}\text{Igual que en } \mathbf{R}:\ |z|-|w|\le|z-w|, \text{ pues } |z|=|z-w+w|\le|z-w|+|w|\\ \qquad\text{Análogamente: } |w|-|z|\le|z-w|\Leftrightarrow|z|-|w|\le-|z-w|\end{array}\right\}\Rightarrow\big||z|-|w|\big|\le|z-w|$.

Si $|a_n-a|<\varepsilon$ para n gordo $\Rightarrow\big||a_n|-|a|\big|\le|a_n-a|<\varepsilon$ para n gordo $\big(|a_n|\to|a|\big)$. [Por tanto, $|a_n|$ diverge $\Rightarrow a_n$ diverge].

$\boxed{62}$ $2^{-n/2}(1+\mathrm{i})^n=\big(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}$  DIVERGE (su módulo $|a_n|=1\to 1$, pero eso no basta).

$\big(\frac{1+5\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}\big)^n=\big[\frac{(1+5\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{9+4}\big]^n=(1+\mathrm{i})^n$ diverge, pues $|1+\mathrm{i}|^n=(\sqrt{2})^n$ diverge $\big[$o antes: $\big|\frac{1+5\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}\big|=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}}=\sqrt{2}\big]$.

$2^{-n}(1+\mathrm{i})^n(1-\mathrm{i})^{-n}=1^n\to 1$ evidentemente. $(n-\mathrm{i})^3n^{-3}=(1-\frac{\mathrm{i}}{n})^3=(1-\frac{3}{n^2})+\mathrm{i}\,(\frac{1}{n^3}-\frac{3}{n})\to 1$.

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/(n+1)}=\cos\frac{n}{n+1}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{n}{n+1}\to\cos 1+\mathrm{i}\operatorname{sen}1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$. $\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})/n}=\mathrm{e}^{2/n}(\cos\frac{1}{n}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{1}{n})\to 1$.

$\mathrm{e}^{-n\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}=\mathrm{e}^{-n\cos 1-\mathrm{i}n\operatorname{sen}1}\to 0$, pues $|a_n|=\mathrm{e}^{-n\cos 1}\to 0$.

$\boxed{63}$ $\sum\frac{(-\mathrm{i})^n}{\sqrt{n}}$ no converge absolutamente $\big(\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge$\big)$. Veamos directamente si parte real e imaginaria convergen:

$$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\mathrm{i}\big(-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots\big) \text{ converge (Leibniz).}$$

64 a) $\sum \frac{(4-3\mathrm{i})^n}{n!}$; $\sum |\;| = \sum \frac{5^n}{n!}$ converge (cociente, o ya sabido) $\Rightarrow$ la dada converge.

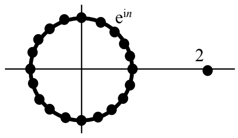
b) $\sum \frac{2-n\mathrm{i}}{n^2} = \sum \frac{2}{n^2} - \mathrm{i} \sum \frac{1}{n}$ diverge, porque lo hace su parte imaginaria (aunque la real converja).

c) $\sum \mathrm{e}^{\mathrm{i}/n}$, $a_n = \cos\frac{1}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{1}{n} \to 1$. La $\sum$ diverge porque el término general $a_n \not\to 0$.

d) $\sum \frac{\mathrm{i}^n}{n^2}$; $\sum |\;| = \sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow$ la dada converge (absolutamente).

e) $\sum \frac{1}{[2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}]n^2}$; $\sum |\;| = \sum \frac{1}{|2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}|n^2} \overset{(\bullet)}{\leq} \sum \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ la dada converge (absolutamente).

($\bullet$) pues $|2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}| = |(2-\cos n) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n| = \sqrt{5-4\cos n} \geq 1$; geométricamente claro:



---

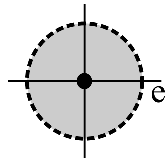
65 $\boxed{\sum n^7 z^n}$ $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{(n+1)^7} = \boxed{1}$. i) Si $z = \frac{4-3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}$, como $|z| = \frac{|4-3\mathrm{i}|}{|5+\mathrm{i}|} = \frac{5}{\sqrt{26}} < 1$, la serie converge.

ii) Si $z = e^{-3\pi\mathrm{i}} = -1$, $\sum (-1)^n n^7$ diverge ($a_n \not\to 0$).

---

66 $\sum \frac{z^n}{\mathrm{e}^n + n}$. Su radio de convergencia es: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{n+1}+n+1}{\mathrm{e}^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}+(n+1)\mathrm{e}^{-n}}{1+ne^{-n}} = \mathrm{e}$.

La serie converge en $|z| < \mathrm{e}$ y diverge en $|z| > \mathrm{e}$. Si $|z| = \mathrm{e}$, o sea, si $z = \mathrm{e}^{1+\mathrm{i}\theta}$, la serie es de la forma $\sum \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1+ne^{-n}}$ y diverge, pues su término general $\not\to 0$ (su módulo $\frac{1}{1+ne^{-n}} \to 1$).



Así pues, la serie converge exactamente en el círculo sin borde $|z| < \mathrm{e}$.

67

		i	$-\mathrm{i}$	$(1-\mathrm{i})^2$	$1+\mathrm{e}\mathrm{i}$	$\frac{1}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lvert\cdot\rvert}$	$\leftarrow z$
	$\frac{\lvert a_n\rvert}{\lvert a_{n+1}\rvert} \to R$	1	1	2	$\sqrt{1+\mathrm{e}^2}$	1/5	$\leftarrow \lvert z\rvert$
$\sum \frac{(-1)^n z^n}{n^3}$	$\frac{n^3}{(n+1)^3} \to 1$	C	C	D	D	C	converge si $\lvert z\rvert=1$ pues $\sum \lvert\;\rvert = \sum \frac{1}{n^3}$ C
$\sum \frac{2^n z^n}{n!}$	$\frac{n+1}{2} \to \infty$	C	C	C	C	C	
$\sum \frac{n! z^n}{n^n}$	$\frac{(n+1)^n}{n^n} \to \mathrm{e}$	C	C	C	D	C	
$\sum \frac{\mathrm{i}^n n^n z^n}{2^n}$	$\frac{2n^n}{(n+1)^{n+1}} \to 0$	D	D	D	D	D	
$\sum \frac{nz^n}{n+1}$	$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \to 1$	D	D	D	D	C	diverge si $\lvert z\rvert=1$ pues $\lvert a_n\rvert = \sum \frac{n}{n+1} \not\to 0 \Rightarrow a_n \not\to 0$
$\sum \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n+1}$	$\frac{n+2}{n+1} \to 1$	C	D	D	D	C	$z=\mathrm{i}$, $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ C ; $z=-\mathrm{i}$, $\sum \frac{1}{n+1}$ D

---

68 $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^w = \left[1+z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\right]\left[1+w+\frac{1}{2}w^2+\cdots+\frac{1}{n!}w^n+\cdots\right]$

$= 1+(z+w)+\frac{1}{2}(z^2+2zw+w^2)+\cdots+\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}w+\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}\frac{w^2}{2|}+\cdots+\frac{w^n}{n!}\right)+\cdots$

$= 1+\frac{1}{1!}(z+w)+\frac{1}{2!}(z+w)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(z^n+nz^{n-1}w+\frac{n!}{(n-2)!2!}z^{n-2}w^2+\cdots+w^n\right)+\cdots = \cdots+\frac{1}{n!}(z+w)^n+\cdots = \mathrm{e}^{z+w}$.

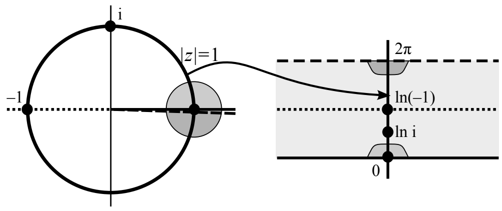
$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $r>0$. Un $w = \ln r + \mathrm{i}\theta$ se transforma en $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Si $r>0$, el z es de la imagen.

No es inyectiva pues todos los $\ln r + \mathrm{i}(\theta+2k\pi)$ tienen la misma imagen. Por ejemplo, $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = 1$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = re^z$. Es de periodo $2\pi\mathrm{i}$.

---

69 $\boxed{\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)}$ (Al no ser inyectiva e^z no podemos definir el $\ln z$ simplemente como la inversa de e^z). $\mathrm{e}^{\ln z} = \mathrm{e}^{\ln|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)} = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)} = z$.



$\ln 1 = \ln\left(1\,\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}\right) = 0$, $\ln(-1) = \ln\left(1\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}\right) = \mathrm{i}\pi$,

$\ln(2\mathrm{i}) = \ln\left(2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}\right) = \ln 2 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$,

$\ln(1+\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$, $\ln(1-\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\frac{7\pi}{4}$.

Claramente discontinua en el eje real positivo y continua en el resto de $\mathbf{C}$ (no es fácil formalizarlo).

---

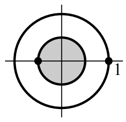
70 $\mathrm{sen}(2z) = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{e}^{2z\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-2z\mathrm{i}}\right] = 2\,\mathrm{sen}\,z\cos z = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{e}^{z\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-z\mathrm{i}}\right]\left[\mathrm{e}^{z\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-z\mathrm{i}}\right] = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{e}^{2z\mathrm{i}} + 1 - 1 - \mathrm{e}^{-2z\mathrm{i}}\right]$.

---

71 $\cos z = \cos x\,\mathrm{ch}\,y - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sh}\,y = 4 \Rightarrow \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sh}\,y = 0 \to$ $y = 0 \to \cos x = 4$ imposible; $\mathrm{sen}\,x = 0 \to x = k\pi \to k\,\mathrm{par}, \mathrm{ch}\,y = 4$ $\boxed{z = 2k\pi + ia \text{ con } \mathrm{ch}\,a = 4}$

---

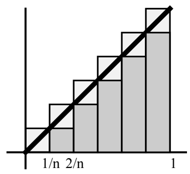
72 $\frac{3z}{1+z-2z^2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+2z} = \sum_{n=0}^{\infty}[1-(-2)^n]z^n$, si $|z| < \frac{1}{2}$: (o directamente $\frac{|1-(-2)^n|}{|1-(-2)^{n+1}|} \to R = \frac{1}{2}$).



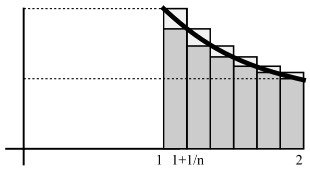
$\mathrm{sen}\,z\cos z = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2z = z - \frac{(2z)^3}{2\cdot 3!} + \frac{(2z)^5}{2\cdot 5!} - \cdots$ $\forall z$ $(R=\infty)$.

$\frac{\mathrm{sen}^2 z}{z} = \frac{[z-\frac{1}{6}z^3+\cdots]^2}{z} = z - \frac{1}{3}z^3 + \cdots$ $\forall z$. $\frac{\mathrm{e}^z}{1+z} = \left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\cdots\right)\left(1-z+z^2-\cdots\right) = 1+\frac{1}{2}z^2+\cdots$ si $|z| < 1$.

$\boxed{1}$ a) $\left.\begin{array}{l} L_n=\frac{1}{n}\left[0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right]=\frac{1}{n}\frac{n-1}{2n}n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\to\frac{1}{2} \\ U_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n}\right]=\frac{1}{n}\frac{n+1}{2n}n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\to\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \int_0^1 x=\boxed{\tfrac{1}{2}}$.



b) $\begin{array}{l} L_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1+1/n)^2}+\frac{1}{(1+2/n)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+n/n)^2}\right] \\ U_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(1+1/n)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+[n-1]/n)^2}\right]\end{array}\Rightarrow$

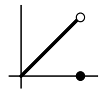


$L_n<\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1\cdot(1+1/n)}+\frac{1}{(1+1/n)(1+2/n)}+\cdots+\frac{1}{(1+n/n)(1+[n-1]/n)}\right]$

$=\frac{n}{n}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1/n}\right)+\left(\frac{1}{1+1/n}-\frac{1}{1+2/n}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1+[n-1]/n}-\frac{1}{1+n/n}\right)\right]=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<U_n\,,\ \forall n$. Además: $U_n-L_n=\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{4}\right]\to 0$

$\boxed{2}$ a) f derivable en $[a,b]\Rightarrow f$ continua en $[a,b]\Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$.

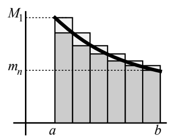
b) f integrable $\not\Rightarrow$ f alcanza máximo. Las integrables pueden ser discontinuas: $f(x)=\begin{cases}x,\ x\in[0,1)\\ 0,\ x=1\end{cases}$



c) f decreciente $\Rightarrow f$ integrable es cierto como sugieren los ejemplos de $\boxed{1}$.

El mínimo de cada intervalo coincide con el máximo del siguiente: $m_k=M_{k+1}\Rightarrow$

$U_n-L_n=\frac{1}{n}[M_1+M_2+\cdots+M_n]-\frac{1}{n}[m_1+m_2+\cdots+m_n]=\frac{M_1-m_n}{n}=\frac{f(b)-f(a)}{n}\to 0$ (integrable).

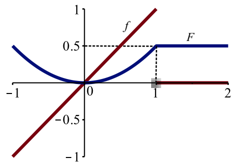


d) En general, $\int_a^b f^2\neq\left(\int_a^b f\right)^2$. Por ejemplo: $\int_0^1 x^2=\frac{1}{3}\neq\left(\int_0^1 x\right)^2=\frac{1}{4}$.

$\boxed{3}$ $\boxed{f(x)=\begin{cases}x,\ x<1\\ 0,\ x\geq 1\end{cases}}$ f es continua a trozos y, por tanto, integrable. El TFCI asegura que entonces F es continua $\forall x$.
Como en $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$ es f continua, F será derivable en esos intervalos y será $F'=f$ en ellos.

Como $F'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1\neq 0=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=F'(1^+)$ no será derivable en $x=1$.

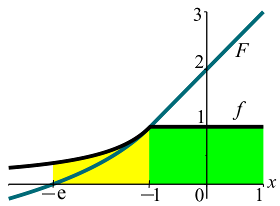
Calculando F podemos comprobarlo: $F(x)=\begin{cases}\int_0^x s\,ds=\frac{1}{2}x^2,\ x\leq 1\\ \int_0^1 s\,ds+0=\frac{1}{2},\ x\geq 1\end{cases}$ continua, pero con un pico en $x=1$.



[Es falso que f discontinua $\Rightarrow F$ no derivable ($p\Rightarrow q$ no implica que no $p\Rightarrow$ no q).
Por ejemplo si fuese $f(x)=\begin{cases}0,x\neq 1\\ 1,x=1\end{cases}$, $F(x)\equiv 0$ sería derivable].

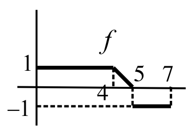
$\boxed{4}$ $\boxed{f(x)=\begin{cases}-1/x,\ x\leq -1\\ 1,\ x>-1\end{cases}}$ $F(-1)=-\int_{-e}^{-1}\frac{dx}{x}=\left[-\log|x|\right]_{-e}^{-1}=\log e-\log 1=\boxed{1}$.

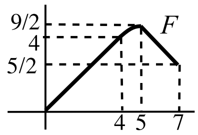
Aparecen dos casos: $F(x)=\begin{cases}-\int_{-e}^x\frac{dt}{t}=1-\log|x|\,,\ \text{si } x\leq -1\\ -\int_{-e}^{-1}\frac{dt}{t}+\int_{-1}^x dt=1+x+1=x+2,\ \text{si } x\geq -1\end{cases}$.



F debe ser continua (y derivable) por el TFC. Y lo es: $F(-1^-)=1=F(-1^+)$.

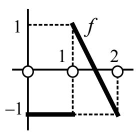
$\boxed{5}$ $\boxed{f(x)=\begin{cases}1 \text{ para } 0\leq x\leq 4\\ 5-x \text{ para } 4<x\leq 5\\ -1 \text{ para } 5<x\leq 7\end{cases}}$ $F(4)=\int_0^4 1=4\,,\ F(5)=4+\int_4^5(5-x)\,dx=\frac{9}{2}\,,$
$F(7)=\frac{9}{2}+\int_5^7(-1)=\frac{5}{2}$.

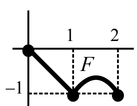


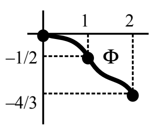


F es continua en todo $[0,7]$. No derivable en 5 .

$\boxed{6}$ $\boxed{f(x)=\begin{cases}-1 \text{ si } x\in(0,1)\\ 3-2x \text{ si } x\in(1,2)\end{cases};\ f(0)=f(1)=f(2)=0}$ f continua a trozos en $[0,2]\Rightarrow F(x)$ existe y es continua $\forall x\in[0,3]$.
$\Rightarrow\Phi(x)$ es derivable $\forall x\in[0,2]$ y $\Phi'=F$.



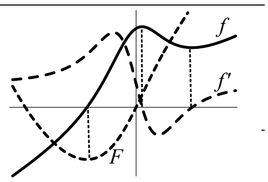




$F(x)=\begin{cases}\int_0^x(-1)\,dx=-x,\ \text{si } x\in[0,1]\\ \int_0^1(-1)\,dx+\int_1^x(3-2s)\,ds=-x^2+3x+3,\ \text{si } x\in[1,2]\end{cases}$ $F'(1)$ $\left[\Phi''(1)\right]$ no existe.

$\Phi(x)=\begin{cases}\int_0^x(-s)\,ds=-\frac{1}{2}x^2,\ \text{si } x\in[0,1]\\ \int_0^1(-s)\,ds+\int_1^x(-s^2+3s+3)\,ds=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{4}{3},\ \text{si } x\in[1,2]\end{cases}$

$\boxed{7}$ Los extremos de F y f están en los ceros de sus derivadas f y f' .



$\boxed{8}$ $F(x)=x\int_0^x e^{t^2}dt\,,\ F'(x)=\int_0^x e^{t^2}dt+xe^{x^2}\,,\ F''(x)=2e^{x^2}+2x^2e^{x^2}\,,\ F''(5)=\boxed{52e^{25}}$.

$\boxed{8}$ a) $F(x)=\int_1^{x^3}\operatorname{sen}^3 t\,dt\to F'(x)=3x^2\operatorname{sen}^3 x^3$. b) $G(x)=\int_1^x x\operatorname{sen} t^3\,dt\to G'(x)=\int_1^x\operatorname{sen} t^3 dt+x\operatorname{sen} x^3$.

$\boxed{10}$ $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+3t^4}\,dt\,,\ g(x)=e^{2x}\,.\ f'(x)=\sqrt{1+3x^4}\,,\ g'(x)=2e^{2x}$.

$(f\circ g)'(0)=f'(g(0))\cdot g'(0)=\sqrt{1+3\cdot 1^4}\cdot 2e^{2\cdot 0}=\boxed{4}$ (o bien: $\int_0^{e^{2x}}\xrightarrow{\ \prime\ }\sqrt{1+3e^{8x}}\cdot 2e^{2x}\Big|_{x=0}$)

$(g\circ f)'(0)=g'(f(0))\cdot f'(0)=\left[\int_0^0=0\right]=2e^{2\cdot 0}\cdot\sqrt{1+0}=\boxed{2}$ (o bien: $e^{2\int_0^x}\xrightarrow{\ \prime\ }2\sqrt{1+3x^4}\cdot e^{2\int_0^x}\Big|_{x=0}$)

11 $F(1)=\int_{-1}^{1}te^{-t^4}dt=0$ (integrando impar). TFC $\Rightarrow F'(x)=x\,e^{-x^4}+2(1-2x)\,e^{-(1-2x)^4}\Rightarrow F'(1)=-e^{-1}$.

Por la regla de la cadena: $(F\circ F)'(1)=F'(F(1))F'(1)=F'(0)F'(1)=(2e^{-1})(-e^{-1})=-2e^{-2}$.

$F(0)=\int_{1}^{0}te^{-t^4}dt=-\int_0^1 te^{-t^4}dt<0$ [integrando positivo en $(0,1)$] $\Rightarrow F(0)<F(1)$.

---

12 $\boxed{f(x)=\frac{\text{sen}(x^3)+1}{\int_{-1}^{x}\text{sen}(t^3)dt+x+4}}$ Como, por el teorema fundamental del cálculo (el integrando que aparece en la definición de f es continuo $\forall x$), el numerador es la derivada del denominador, es:

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\Big[\log\Big|\int_{-1}^{x}\text{sen}(t^3)dt+x+4\Big|\Big]_{-1}^{1}=\log\Big|\int_{-1}^{1}\text{sen}(t^3)dt+5\Big|-\log 3=\log\tfrac{5}{3},$$

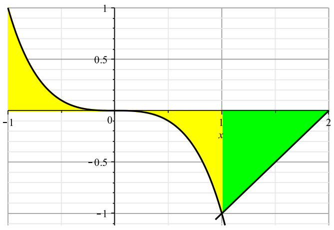
porque $\int_{-1}^{1}\text{sen}(t^3)dt=0$, al ser impar el integrando. La integral existe por ser f continua, pues su denominador es positivo en $[-1,1]$: en $x=-1$ vale 4 y es función creciente $\big($su derivada $\text{sen}(x^3)+1\geq 0\big)$.

---

12 $20[1-x^{-1/20}]=\int_1^x t^{-21/20}dt<\ln x<\int_1^x t^{-19/20}dt=20[x^{1/20}-1]\Rightarrow 1-e^{-1/20}<\frac{1}{20}<e^{1/20}-1\Rightarrow \underbrace{\big(\tfrac{21}{20}\big)^{20}}_{\approx 2{,}65}<e<\underbrace{\big(\tfrac{20}{19}\big)^{20}}_{\approx 2{,}79}$

---

13 **a]** f continua en $x=1$ $\big(-\frac{3}{3}=1-2\big)\overset{\text{TFC}}{\Rightarrow}F$ derivable en 1 y $F'(1)=f(1)=\boxed{-1}$.



b] $F(2)=\int_{-1}^{2}f=\int_{-1}^{1}\frac{3x^3}{x^2-4}dx+\int_1^2(x-2)\,dx=\underset{\text{impar}}{0}+\frac{1}{2}\big[x^2\big]_1^2-2=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

c] En $[-1,0]$ es $f'(x)=\frac{3x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}<0\Rightarrow f$ decrece $\Rightarrow f(-1)=1\geq f(x)\geq 0=f(0)$

$\Rightarrow\int_{-1}^{0}1=1\geq\int_{-1}^{0}f\geq 0=\int_{-1}^{0}0$.

$\big[$Sin derivar. En $[-1,0]$ es $f\geq 0$, por ser el numerador y el denominador negativos.

Y es $f\leq 1\Leftrightarrow 3x^3-x^2+4\geq 0\Leftrightarrow(x+1)(3x^2-4x+4)\geq 0$, cierto en el intervalo$\big]$.

$\big[$Una tercera posibilidad es calcular la integral y probar que el resultado cumple esas desigualdades:

$\int_{-1}^{0}\big[3x+\frac{12x}{x^2-4}\big]dx=\big[\frac{3}{2}x^2+6\log|x^2-4|\big]_{-1}^{0}=6\log\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\underset{\leq 1}{\overset{\geq 0}{}}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq\log\frac{4}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\cdots\leq\frac{5}{12}\ \ldots\big]$.

---

14 $\boxed{H(x)=\int_{e^{x^2}}^{4}\frac{\log t\,dt}{t+t^2}}$ $H'(x)=-2xe^{x^2}\frac{\ln(e^{x^2})}{e^{x^2}+e^{2x^2}}=\frac{-2x^3}{1+e^{x^2}}\Rightarrow$ crece en $[-1,0]$ y decrece en $[0,1]$.

---

15 Integrando continuo $\forall t$ y $\sqrt{2x}$ función derivable para $x>0\Rightarrow F$ es derivable en $(0,\infty)$ y se tiene:

$F'(x)=\frac{2^{3/2}x^{3/2}}{8+2x}2^{1/2}\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{x}{4+x}\Rightarrow F'(2)=\boxed{\frac{1}{3}}$. $F(2)=\int_{-2}^{2}=\boxed{0}$, por ser el integrando impar.

$F(8)=\int_{-2}^{4}=\int_{-2}^{2}+\int_2^4=\int_2^4>0$ pues el integrando es positivo en $[2,4]$ [o por ser estrictamente creciente y ser $F(2)=0$].

$F'(x)>0$ en $(0,8]\Rightarrow F$ crece estrictamente $\Rightarrow F$ **inyectiva** en en $[0,8]$. $\big[$Hallar la primitiva $\frac{1}{2}t^2-4\log(8+t^2)$ ayuda poco$\big]$.

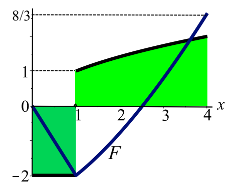
---

16 $\boxed{\int_\pi^x[1+\text{sen}(\text{sen}\,t)]dt}\Rightarrow f'(x)=1+\text{sen}(\text{sen}\,x)>0\ \forall x$, pues $\text{sen}\,\alpha>-1$ si $\alpha\in[-1,1]\Rightarrow f$ estrictamente creciente $\Rightarrow$

existe f^{-1}. $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(\pi)}=\frac{1}{1+\text{sen}(\text{sen}\,\pi)}=1$, pues $f^{-1}(0)$ es el único a tal que $\int_\pi^a=0$, es decir, $a=\pi$.

---

17 $\boxed{f(x)=\begin{cases}-2,\ 0\leq x<1\\ \sqrt{x},\ x\geq 1\end{cases},\ F(x)=\int_0^x f.}$ **a]** i) $F(4)=\int_0^1(-2)\,dx+\int_1^4\sqrt{x}\,dx=-2+\big[\frac{2}{3}x^{3/2}\big]_1^4=\boxed{\frac{8}{3}}$.



ii) Aparecen dos casos: $F(x)=\begin{cases}\int_0^x(-2)\,dt=-2x,\ \text{si }0\leq x\leq 1\\ -\int_0^1 2\,dt+\int_1^x\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{8}{3},\ \text{si }x\geq 1\end{cases}$.

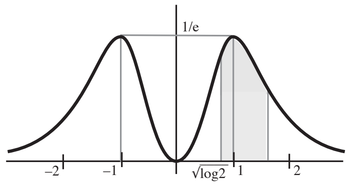
Sabíamos que F es continua por el TFC, como toda $\int_0^x f$ con f integrable. La F hallada lo es.

b] Máximo y mínimo existen por ser F continua. Candidatos son los extremos del intervalo y el punto en que no hay F' $\big(F'=f<0$ en $(0,1)$ y >0 en $(1,4]\big)$. $F(1)=-2$ **valor mínimo**. $F(4)=\frac{8}{3}$ **valor máximo**.

[El resultado era claro pues hasta $x=1$ añadimos áreas negativas, desde $x=1$ positivas y viendo el valor de $F(4)$].

---

18 $H'(x)=8x^2e^{-4x^2}-x^2e^{-x^2}=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{\log 2}$. H crece en $\big[-\sqrt{\log 2},\sqrt{\log 2}\big]$ y decrece en el resto de $\mathbf{R}$. En $x=\sqrt{\log 2}$ hay un máximo local (y absoluto).



El valor máximo de f (en $x=\pm 1$) es $1/e$. El de H:

$H\big(\sqrt{\log 2}\big)=\int_{\sqrt{\log 2}}^{2\sqrt{\log 2}}t^2e^{-t^2}dt\leq\int_{\sqrt{\log 2}}^{2\sqrt{\log 2}}\frac{1}{e}\,dt=\frac{1}{e}\sqrt{\log 2}<\frac{1}{2}$.

---

19 $F'=\frac{x}{4x^4+1}-\frac{1}{x^4+4}=\frac{3x(1-x^4)}{(4x^4+1)(x^4+4)}\ \begin{matrix}>0,\ 0<x<1\\ <0,\ x>1\end{matrix}\ \Rightarrow$ máximo $F(1)=\int_1^2<\int_1^2\frac{t}{4}=\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ o $<\int_1^2\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$.

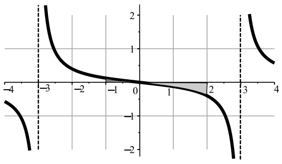
[dos fracciones con el denominador menor]

La integral es calculable: $\frac{1}{4}\int_1^4\frac{t\,dt}{1+(t^2/2)^2}=\frac{1}{4}\arctan\frac{t^2}{2}\Big]_1^4=\frac{1}{4}(\arctan 2-\arctan\frac{1}{2})<\frac{1}{4}\arctan 2<\frac{\pi}{8}<\frac{1}{2}$.

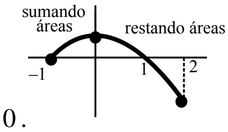
$\big[$Más largo es hallar el valor máximo de f, que resulta ser $f\big(\sqrt[4]{4/3}\big)=\frac{3^{3/4}\sqrt{2}}{16}<\frac{3\cdot 2}{16}<\frac{1}{2}\big]$.

20 a) $\boxed{F(x)=\int_{-1}^x \frac{t\,dt}{t^2-9}}$ $F'(x)=\frac{x}{x^2-9}$. Candidatos: $F(-1)=0$, $F(0)=\int_{-1}^0>0$ ($f>0$), $F(2)=\int_{-1}^1+\int_1^2<0$ (impar y $f<0$).

Máximo en $x=0$, mínimo en $x=2$.



← Dibujando la gráfica es claro sin ningún cálculo.



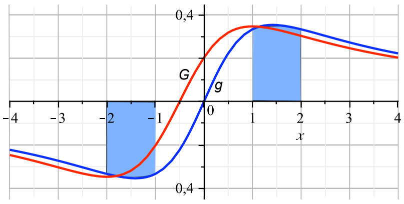
[No es necesaria la primitiva pero se podría hallar: $\int_1^x \frac{t\,dt}{t^2-9}=\frac12\log\left|\frac{x^2-9}{8}\right|$, $F(-1)=0$ $F(0)=\frac12\log\frac98>0$, $F(2)=\frac12\log\frac58<0$.

b) $\boxed{G(x)=\int_x^{x+1}\frac{t\,dt}{t^2+2}}$ $G'(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+3}-\frac{x}{x^2+2}=\frac{-x^2-x+2}{(x^2+2x+3)(x^2+2)}=0\to x=1,-2$.

$G(1)=\int_1^2 g>0$, por ser g positiva (calculable: $G(1)=\frac12\log(t^2+2)\Big]_1^2=\frac12\log 2$)

$G(-2)=\int_{-2}^{-1} g<0$, ahí g es negativa ($G(-2)=\frac12\log(t^2+2)\Big]_{-2}^{-1}=-\frac12\log 2$)

$G\to 0$ si $x\to\pm\infty$ (los 'extremos'). Máximo en $\boxed{x=1}$; mínimo en $\boxed{x=-2}$.



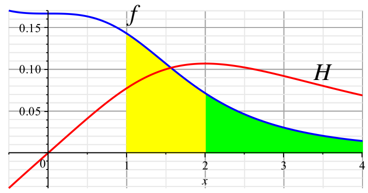
c) $\boxed{H(x)=\int_{x/2}^x\frac{dt}{6+t^3}}$ Integrando continuo si $t\ge0$ y límites derivables ⇒ H es derivable $\forall x\in[0,4]$ y es:

$H'(x)=\frac{1}{6+x^3}-\frac{1/2}{6+(x/2)^3}=\frac{3(8-x^3)}{(6+x^3)(48+x^3)}=0$ si $x=2$.

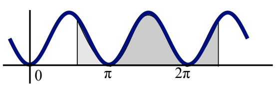
Crece en $[0,2]$ y decrece en $[2,4]$ ⇒ máximo (local y absoluto) $\boxed{H(2)=\int_1^2 f}$

[Su cálculo sería largo; el denominador es $(t+6^{1/3})(t^2-6^{1/3}t+6^{2/3})$].

El mínimo, en uno de los extremos, será $\boxed{H(0)=0}$, pues $H(4)=\int_2^4>0$ (integrando positivo).

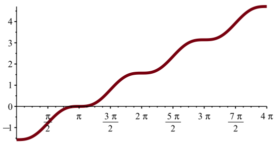


d) $\boxed{K(x)=\int_\pi^x \text{sen}^2t\,dt}$ $K'(x)=\text{sen}^2x\ge0$. K es estrictamente creciente siempre.

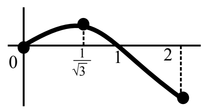


Máximo (>0) en $x=4\pi$; mínimo (<0) en $x=0$.

[$k\pi$ son puntos de inflexión con tangente horizontal].



e) $\boxed{L(x)=\int_0^{x-x^3}\frac{dt}{\sqrt{2-\text{sen}^2t}}}$ $l(x)=\frac{1}{\sqrt{2-\text{sen}^2x}}$ continua $\forall x\in\mathbf{R}$; $b(x)=x-x^3$ derivable $\forall x\in\mathbf{R}$ ⇒ $L'(x)=\frac{1-3x^2}{\sqrt{2-\text{sen}^2(x-x^3)}}$.



Máximo y mínimo (existen por ser L continua) se dan en los extremos o en el punto $x=\frac{1}{\sqrt3}$ en el que $L'=0$:

$$L(0)=\int_0^0 l=0,\quad L(\tfrac{1}{\sqrt3})=\int_0^{2\sqrt3/9} l>0 \text{ (integrando positivo) y } L(2)=\int_0^{-6} l=-\int_{-6}^0 l<0.$$

El valor máximo se toma en $x=1/\sqrt3$ (se podía deducir simplemente del signo de L') y el mínimo en $x=2$.

f) $\boxed{M(x)=\int_{-2}^{3x-x^2} te^{t^4}dt}$ Integrando continuo $\forall t$ y límite de integración derivable $\forall x$ ⇒

$M'(x)=(3-2x)x(3-x)\,e^{(3x-x^2)^4}=0$ si $x=0$, $x=\frac32$ y $x=3$.

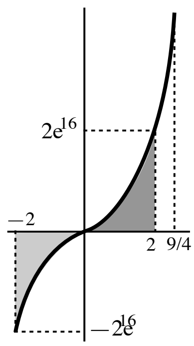
$$\left.\begin{array}{l} M'>0 \text{ en } [0,\frac32) \Rightarrow M \text{ crece en } [0,\frac32] \\ M'<0 \text{ en } (\frac32,2] \Rightarrow M \text{ decrece en } [\frac32,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Valor máximo } \left(\int_{-2}^{9/4}\right) \text{ en } \boxed{x=\tfrac32}.$$

El mínimo (que ha de existir por ser M continua en $[0,2]$) se dará en uno de los extremos:

$$M(0)=\int_{-2}^0 t\,e^{t^4}dt \quad \text{ó} \quad M(2)=\int_{-2}^2 t\,e^{t^4}dt$$

El integrando $m(t)=te^{t^4}$ es positivo para $t>0$ y negativo para $t<0$ (y m es impar).

La primera integral $\int_{-2}^0<0$, y la segunda $\int_{-2}^2=\int_{-2}^0+\int_0^2$ es mayor que ella, por ser $\int_0^2>0$ (de hecho es $\int_{-2}^2=0$, ya que m es impar). El **valor mínimo** se toma en $\boxed{x=0}$.



g) $\boxed{N(x)=\int_{-x}^x[1-t^2]^{1/3}dt}$ Integrando $f(t)$ continuo $\forall t$ y límites de integración derivables $\forall x$ ⇒ N es derivable $\forall x$ y es:

$N'(x)=[1-x^2]^{1/3}+[1-x^2]^{1/3}=2[1-x^2]^{1/3}=0$ si $x=\pm1$.

[Por ser el integrando par se podría haber usado que $N(x)=2\int_0^x f$].

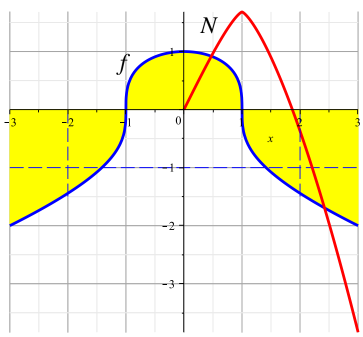
H crece en $[0,1]$ y decrece en $[1,3]$ ⇒ máximo: $\boxed{H(1)=\int_{-1}^1 f=2\int_0^1 f}$.

[También se deduce de que hasta $x=1$ sumamos áreas positivas y después 'areas negativas'; el valor de esta integral no es calculable exactamente].

El mínimo (en uno de los extremos) será $\boxed{H(3)=\int_{-3}^3 f=2\int_0^3 f}$,

pues a la vista de la gráfica de f es claro que esta integral es $<0=H(0)$.

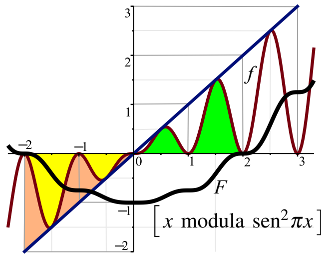
[Como $f\le1$ en $[-1,1]$ es $\int_{-1}^1 f<2$, y como $f<-1$ en $[2,3]$ es $2\int_1^3 f<-2$].



c) $H(x)=x-\int_1^x\cos(\text{sen}\,t)\,dt$. $H'(x)=1-\cos(\text{sen}\,x)\ge0$. H crece en $[1,4]$ ⇒ mínimo en $x=1$ (vale $H(1)=1$), y valor máximo en $x=4$ (no calculable). [H' se anula en $x=\pi$, punto de inflexión con tangente horizontal].

21 $f(x)=x\,\text{sen}^2\pi x$, $F(x)=\int_{-2}^{x} f$. Como f es continua, F es derivable y $F'(x)=x\,\text{sen}^2\pi x$.

$\begin{matrix} >0 \text{ si } x\in(0,1)\cup(1,2)\cup\cdots \\ <0 \text{ si } x\in\cdots\cup(-2,-1)\cup(-1,0)\end{matrix}$ $\Rightarrow F$ decrece en $(-\infty,0]$ y crece en $[0,\infty)$.



El **valor máximo** de F será $F(2)=\int_{-2}^{2} f=\boxed{0}$ (f es impar). El **mínimo** será $F(0)=\int_{-2}^{0} f$.

$F(0)<0$ por ser el integrando negativo en $[-2,0]$, o porque $F(-2)=0$ y decrece hasta 0.

Además en $[-2,0]$ es $f(x)\geq x\Rightarrow \int_{-2}^{0} f\geq\int_{-2}^{0} x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big]_{-2}^{0}=-2$.

[O el área encerrada es menor que el área 2 del triángulo de base 2 y altura 2].

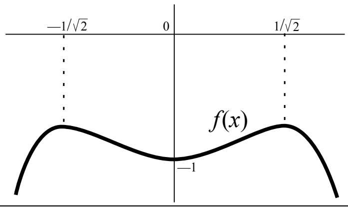
Calculando la primitiva podemos hallar el valor exacto del mínimo:

$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2\pi x)\,dx=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4\pi}\text{sen}\,2\pi x+\frac{1}{4\pi}\int \text{sen}\,2\pi x\,dx=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4\pi}\text{sen}\,2\pi x-\frac{1}{8\pi^2}\cos 2\pi x\Rightarrow\int_{-2}^{0} f=\boxed{-1}$.

---

22 a) $\boxed{F(x)=\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt-e^{x^4}}$ $F(x)$ par y derivable en todo **R**. $F'(x)=2xe^{x^4}(1-2x^2)=0\Leftrightarrow x=0,\pm1/\sqrt{2}$.

$\Rightarrow F$ crece en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ y decrece en $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$.



$F(0)=-1$. Como e^{t^2} es siempre creciente para $t>0$:

$F(1/\sqrt{2})=\int_0^{1/2} e^{t^2}\,dt-e^{1/4}<\int_0^{1/2} e^{1/4}dt-e^{1/4}=-\frac{1}{2}e^{1/4}$.

El valor máximo es negativo y $F(x)$ no se anula para $x\in[0,\infty)$.

---

23 $\boxed{F(x)=\int_{-1/x}^{1/x^2} e^{-t^4}\,dt}$. TFC (e^{-x^4} continua $\forall x$): $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1/x}^{1/x^2} e^{-t^4}\,dt=-\frac{2}{x^3}e^{-1/x^8}-\frac{1}{x^2}e^{-1/x^4}\Rightarrow F'(1)=-\frac{3}{e}$.

$\sum(-1)^n F(n)$ es alternada, pues $F(n)=\int_{-1/n}^{1/n^2} e^{-t^4}\,dt>0$ (integrando positivo y $\frac{1}{n^2}>-\frac{1}{n}$). $F(n)$ es decreciente, al serlo $F(x)$ ($F'(x)<0$ si $x>0$). $F(n)\underset{n\to\infty}{\to}0$, pues la longitud del intervalo de integración $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$. Por Leibniz, la serie converge.

---

24 $\frac{1}{x^3+6n^6}$ continua $\forall x\geq0\Rightarrow f_n(x)$ derivable y $f_n'(x)=\frac{2}{8x^3+6n^6}-\frac{1}{x^3+6n^6}=\frac{3(n^6-x^3)}{(4x^3+3n^6)(x^3+6n^6)}=0\Leftrightarrow x=n^2$.

$f_n'(x)$ es positiva si $x<n^2$ y negativa si $x>n^2\Rightarrow f_n(x)$ alcanza su máximo en $x=n^2$, que podemos acotar:

$$f_n(n^2)=\int_{n^2}^{2n^2}\frac{dt}{t^3+6n^6}\leq\int_{n^2}^{2n^2}\frac{dt}{6n^6}=\frac{1}{6n^4}\quad\left[\text{o bien } f_n(n^2)\leq\int_{n^2}^{2n^2}\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8n^4}\right]$$

(sabríamos hallar exactamente $f_n(n^2)$, con algún esfuerzo). Además $f_n(x)\geq0$ para $x\geq0$ (integrando positivo).

$0\leq f_n(x)\leq\frac{1}{6n^4}\Rightarrow|f_n(x)|\leq\frac{1}{6n^4}$, $\forall n\geq1$, $\forall x\geq0$ y $\sum\frac{1}{6n^4}$ converge $\overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ converge uniformemente en $[0,\infty)$.

---

25 i: b) porque debe ser positiva y menor que π . ii: a) por ser la única negativa (integrando negativo en el intervalo).

---

26 $\int_1^3\left[1-\frac{1}{x+1}\right]dx=2-\left[\log|x+1|\right]_1^3=3-\log4+\log2=2-\log2>1$ pues $\log2<1$ ($2<e$).

[O, sin calcular la integral, como en el intervalo $\frac{x}{x+1}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>1$, la integral es $>\int_1^3\frac{dx}{2}=1$].

---

27 $\boxed{\int_0^{\pi/2}\frac{\text{sen}\,x\cos x}{3+\cos x}}$ **a]** $\begin{matrix}\cos x=t\,,\ -\text{sen}\,x\,dx=dt\\ \cos0=1\,,\ \cos\frac{\pi}{2}=0\end{matrix}$ $\to-\int_1^0\frac{t\,dt}{3+t}=\int_0^1\left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt=1-3\left[\log|t+3|\right]_0^1=\boxed{1-3\log\frac{4}{3}}$.

b] Para probar la acotación no se necesita conocer el valor exacto de la integral I .

Disminuyendo el denominador de la fracción positiva: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\text{sen}\,x\cos x}{3+\cos x}\leq\int_0^{\pi/2}\frac{\text{sen}\,x\cos x}{3}=\frac{\text{sen}^2x}{6}\Big]_0^{\pi/2}=\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$.

Incluso, sin integrar, es suficiente utilizar la cota: $\frac{\text{sen}\,x\cos x}{3}=\frac{1}{6}\text{sen}\,2x\leq\frac{1}{6}\Rightarrow I<\int_0^{\pi/2}\frac{1}{6}=\frac{\pi}{12}<\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

[No basta utilizar que como $\text{sen}\,x$ y $\cos x$ son menores que 1 , el integrando es menor que 1/3].

Pero también podríamos desarrollar el resultado exacto utilizando Taylor:

$1-3\log\left(1+\frac{1}{3}\right)=1-3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\cdots\right)=\frac{1}{6}-\cdots<\frac{1}{6}$ por ser negativo el siguiente término de la serie de Leibniz.

[No conviene desarrolar $1+3\log\frac{3}{4}$ porque se obtiene una serie no alternada].

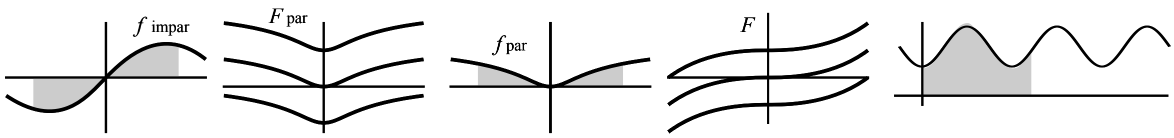
---

28 $F(x)=\int_0^x f$. f impar $\Rightarrow F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt\underset{t=-u}{=}-\int_0^x f(-u)\,du=\int_0^x f(u)\,du=F(x)$. F es par, como $F(x)+C$, $\forall x$.

f impar $\Rightarrow F(-x)=-\int_0^x f(-u)\,du=-\int_0^x f(u)\,du=-F(x)$. F impar, pero las demás no. [Por ejemplo, $x+7$ es primitiva no impar de 1].

f periódica $\not\Rightarrow F$ periódica. Un contraejemplo: $f(x)=1+\cos x$. Ninguna $F(x)=x+\text{sen}\,x+C$ es periódica.

[Si f es $T-$periódica, lo es $F\Leftrightarrow\int_0^T f=0$: $F(x+T)=\int_0^T f+\int_T^{x+T}f(u)\,du=\int_0^T f+\int_0^x \underbrace{f(t-T)}_{=f(t)}\,dt=\int_0^T f+F(x)$].



$\boxed{\mathbf{29}}$ a) $\boxed{\int \frac{dx}{x^2+x-2}} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right]dx = \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$

b) $\boxed{\int \frac{dx}{x^3+x-2}} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+2)} = \left[\,A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x-1)=1\,\right] = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{8}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+2}dx$

$= \frac{1}{4}\log|x-1|-\frac{1}{8}\log(x^2+x+2)-\frac{3}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}} \quad \left[\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2+x+2}=\frac{3}{8}\frac{2}{\sqrt{7}}\int\frac{2/\sqrt{7}\,dx}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2}\right]$.

c) $\boxed{\int x\arctan x\,dx} \underset{\text{partes}}{=} \frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\arctan x-\frac{1}{2}x$.

d) $\boxed{\int x^3(\log x)^2dx} = \frac{x^4(\log x)^2}{4}-\frac{1}{2}\int x^3\log x\,dx = \frac{x^4(\log x)^2}{4}-\frac{x^4\log x}{8}-\frac{1}{8}\int x^3dx = x^4\left[\frac{(\log x)^2}{4}-\frac{\log x}{8}+\frac{1}{32}\right]$.

e) $\boxed{\int e^x\log(e^x+1)dx} \overset{u=e^x+1}{=} \int\log u\,du = u\log u-u = (e^x+1)\left[\log(e^x+1)-1\right]$.

f) $\boxed{\int\frac{\cos x\,dx}{3+\cos^2x}} = \int\frac{\cos x\,dx}{4-\text{sen}^2x} \overset{\text{sen}\,x=u}{=} \int\frac{du}{4-u^2} = \frac{1}{4}\int\frac{du}{2+u}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{2-u} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{2+u}{2-u}\right| = \frac{1}{4}\log\frac{2+\text{sen}\,x}{2-\text{sen}\,x}$.

g) $\boxed{\int\text{sen}^6x\,dx} = \frac{1}{8}\int(1-3\cos2x+3\cos^22x-\cos^32x)dx = \frac{1}{8}\int\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos4x-4\cos2x+\cos2x\,\text{sen}^22x\right)dx$

$= \frac{5}{16}x+\frac{3}{64}\text{sen}\,4x-\frac{1}{4}\text{sen}\,2x+\frac{1}{48}\text{sen}^32x = \frac{5}{16}x-\frac{1}{48}\text{sen}\,x\cos x\left[15+10\,\text{sen}^2x+8\,\text{sen}^4x\right]$.

h) $\boxed{\int\cos^2(\pi x)dx} = \frac{1}{2}\int(1+\cos2\pi x)dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4\pi}\text{sen}\,2\pi x$.

i) $\boxed{\int\cos^5x\,\text{sen}^2x\,dx} = \int[\text{sen}^2x-2\,\text{sen}^4x+\text{sen}^6x]\cos x\,dx = \frac{1}{3}\text{sen}^3x-\frac{2}{5}\text{sen}^5x+\frac{1}{7}\text{sen}^7x$.

j) $\boxed{\int\sqrt{x}\,e^{-2\sqrt{x}}dx} \overset{\sqrt{x}=t}{=} 2\int t^2e^{-2t}dt = -t^2e^{-2t}+\int2te^{-2t} = -(t^2+t)e^{-2t}+\int e^{-2t}dt = -(x+\sqrt{x}+\frac{1}{2})e^{-2\sqrt{x}}$.

k) $\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}} \overset{u=\sqrt{1+e^x}}{=} \int\frac{2u\,du}{u(u^2-1)} = \int\frac{du}{u-1}-\int\frac{du}{u+1} = \log\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| = 2\log(\sqrt{1+e^x}-1)-x$.

l) $\boxed{\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}} \overset{x=\text{sen}\,t}{=} \int\frac{\cos t}{\cos^3t}dt = \tan t = \frac{\text{sen}\,t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

m) $\boxed{\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}} = \left[\,u=x+\sqrt{x^2+4}\,,\ x=\frac{u^2-4}{2u}\,,\ dx=\frac{u^2+4}{2u^2}\,,\ \sqrt{x^2+4}=\frac{u^2+4}{2u}\,\right] =$

$= \int\frac{u^4-8u^2+16}{4u^2}du = \frac{u^2}{8}-2\ln u-\frac{2}{u^2} = \frac{(u^2+4)(u^2-4)}{8u^2}-2\ln u = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$.

n) $\boxed{\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2+x-x^2}}} = -\frac{1}{2}\int\frac{1-2x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx = -\sqrt{2+x-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = -\sqrt{2+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsen\frac{2x-1}{3}$.

ñ) $\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}} = -\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)dx = -\frac{1}{3}\left[(x-1)^{3/2}+(x+1)^{3/2}\right]$.

$\boxed{\mathbf{30}}$ a) $\boxed{\int_{-1}^{1}e^{-|x|}dx} \underset{\text{par}}{=} 2\int_0^1e^{-x}dx = 2(1-e^{-1})$.

b) $\boxed{\int_{-1}^{1}(1-x)^3\,dx} = -\frac{1}{4}(1-x)^4\Big]_{-1}^{1} = 4$.

c) $\boxed{\int_1^{e^2}\sqrt{x}\,\log x\,dx}$ $\quad \int x^{1/2}\log x\,dx \underset{\text{partes}}{=} \frac{2x^{3/2}}{3}\log x-\frac{2}{3}\int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\log x-\frac{4}{9}x^{3/2} \Rightarrow \int_1^{e^2} = \frac{4}{3}e^3-\frac{4}{9}e^3+\frac{4}{9} = \boxed{\frac{4}{9}\left(1+2e^3\right)}$.

d) $\boxed{\int_0^1x^3\arctan x\,dx}$ Partes: $\frac{1}{4}x^4\arctan x\Big]_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx = \frac{1}{4}\arctan1-\frac{1}{4}\int_0^1(x^2-1)\,dx-\frac{1}{4}\arctan1 = -\frac{1}{12}+\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{6}}$.

e) $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}^3x\cos^2x\,dx}$ Por ser el integrando impar y el intervalo de integración simétrico el valor de esta integral es $\boxed{0}$.

[Comprobando: $\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos^2x-\cos^4x\right]\text{sen}\,x\,dx = \left[\frac{1}{5}\cos^5x-\frac{1}{3}\cos^3x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$].

f) $\boxed{\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3x\,dx}{3\,\text{sen}^2x+4\cos^2x}} \overset{t=\text{sen}\,x}{=} \int_0^1\frac{(1-t^2)\,dt}{4-t^2} = \int_0^1\left[1-\frac{3}{(2+t)(2-t)}\right]dt = 1-\int_0^1\left[\frac{A}{2+t}+\frac{B}{2-t}\right]dt \quad \left[\begin{array}{c}3=A(2-t)+B(2+t)\\ t=2\to B=3/4,\ t=-2\to A=3/4\end{array}\right]$

$= 1-\int_0^1\left[\frac{3/4}{2+t}+\frac{3/4}{2-t}\right]dt = 1-\frac{3}{4}\log\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\Big]_0^1 = \boxed{1-\frac{3}{4}\log3}$.

[Muchísimo más largo: $\begin{array}{c}z=\tan\frac{x}{2}\\ \tan\frac{\pi}{4}=1\end{array} \to \int_0^1\frac{(1-z^2)^3\,dz}{2(1+z^2)^2(1+z+z^2)(1-z+z^2)} = \int_0^1\left(\frac{2-2z^2}{(1+z^2)^2}+\frac{3(2z-1)/4}{z^2-z+1}-\frac{3(2z+1)/4}{z^2+z+1}\right)dz = 1-\frac{3}{4}\log3$].

g) $\boxed{\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^4x}}$ Al ser par buscamos el cambio de la tangente: $\int_0^{\pi/4}(1+\tan^2x)\frac{dx}{\cos^2x} \overset{t=\tan x}{=} \int_0^1(1+t^2)\,dt = \boxed{\frac{4}{3}}$.

h) $\boxed{\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}-3}}$ $\quad s=\sqrt[3]{3x-1}\,,\ x=\frac{s^3+1}{3}\,,\ dx=s^2ds\,,\ x=0\to s=-1\,,\ x=3\to s=2$. Entonces

$\int_{-1}^{2}\frac{s^2-9+9}{s-3}\,ds = \int_{-1}^{2}\left[3+s+\frac{9}{s-3}\right]ds = 9+\left[\frac{1}{2}s^2+9\log|s-3|\right]_{-1}^{2} = 9+\frac{3}{2}-9\log|-4| = \boxed{\frac{21}{2}-18\log2}$.

31 $\boxed{I_n(x)=\int\frac{dx}{[x^2+a^2]^n}} \underset{\bullet}{=} \boxed{\frac{x}{(2n-2)a^2[x^2+a^2]^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}I_{n-1}(x)}$. $\boxed{\int\frac{dx}{[x^2+1]^2}}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac12\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac12\left[\frac{x}{x^2+1}+\arctan x\right]$.

• $\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{[x^2+a^2]^n}dx=\frac{I_{n-1}(x)}{a^2}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x\,2x\,dx}{[x^2+a^2]^n}=[\text{partes}]=\frac{I_{n-1}(x)}{a^2}+\frac{x}{(2n-2)a^2[x^2+a^2]^{n-1}}-\frac{I_{n-1}(x)}{(2n-2)a^2}$.

$\boxed{\int\frac{dx}{[x^2+2x+5]^3}}\overset{x+1=u}{=}\int\frac{du}{[u^2+2^2]^3}=\frac{u}{16[u^2+2^2]^2}+\frac{3}{16}\int\frac{du}{[u^2+2^2]^2}=\frac{u}{16[u^2+2^2]^2}+\frac{3u}{128[u^2+2^2]}+\frac{3}{128}\int\frac{du}{u^2+2^2}$

$=\frac{1}{128}\left(\frac{8(x+1)}{[x^2+2x+5]^2}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+5}+\frac32\arctan\frac{x+1}{2}\right)$.

---

32 $I_n=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n x\,dx=-\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x+(n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}^2x)\operatorname{sen}^{n-1}x\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow\boxed{I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}}$.

$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}I_{2n-4}=\cdots=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{2n(2n-2)\cdots2}\frac{\pi}{2}=\binom{2n-1}{n}\frac{\pi}{2^{2n}}$ pues $I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$.

$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}=\frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-2)}I_{2n-4}=\cdots=\frac{2n(2n-2)\cdots2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3}=\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}$ pues $I_1=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}x\,dx=1$.

En particular: $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2=\frac{\pi}{4}$, $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3=\frac23$, $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^4=\frac{3\pi}{16}$, $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^5=\frac{8}{15}$.

---

33 $\boxed{\int_0^\pi\operatorname{sen}mx\operatorname{sen}nx\,dx}=\frac12\int_0^\pi\left[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x\right]dx=\frac12\left[\frac{\operatorname{sen}(n-m)x}{n-m}-\frac{\operatorname{sen}(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi=\boxed{0}$ si $n\neq m$.

Si $m=n$, $\int_0^\pi\operatorname{sen}^2nx\,dx=\frac12\left[x-\frac{\operatorname{sen}2nx}{2n}\right]_0^\pi=\boxed{\frac{\pi}{2}}$.

$\boxed{\int_0^\pi\cos mx\cos nx\,dx}=\frac12\left[\frac{\operatorname{sen}(n-m)x}{n-m}+\frac{\operatorname{sen}(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi=\boxed{0}$ si $n\neq m$. Si $m=n$, $\int_0^\pi\cos^2nx\,dx=\frac12\left[x+\frac{\operatorname{sen}2nx}{2n}\right]_0^\pi=\boxed{\frac{\pi}{2}}$.

$\boxed{\int_0^\pi\operatorname{sen}mx\cos nx\,dx}=\frac12\int_0^\pi\left[\operatorname{sen}(n-m)x+\operatorname{sen}(n+m)x\right]dx=-\frac12\left[\frac{\cos(n-m)x}{n-m}+\frac{\cos(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi=\frac{n[1+(-1)^{n+m+1}]}{n^2-m^2}$ si $n\neq m$.

Si $m=n$, $\int_0^\pi\operatorname{sen}nx\cos nx\,dx=\frac{1}{2n}\left[\operatorname{sen}^2nx\right]_0^\pi=\boxed{0}$.

---

34 a) $\int_{-1}^1 dx\underset{\uparrow}{=}\frac32\int_1^1 t^{1/2}\,dt=0$ **!!**

$t=x^{2/3}$, $x=t^{3/2}$, $dx=\frac32t^{1/2}\,dt$, $x=-1\to t=1$, $x=1\to t=1$

[$t=x^{2/3}$ no es lo mismo que $x=t^{3/2}$, no es inyectiva].

Con la notación de los apuntes: $\frac32\int_{-1}^1\left(x^{2/3}\right)^{1/2}\frac23x^{-1/3}dx=\frac32\int_{-1}^1 f(g(x))\,g'(x)\,dx$

$g(x)=x^{2/3}$ debe ser C^1 pero no es derivable en $x=0$.

b) $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}\underset{\uparrow}{=}\int_{-1}^1\frac{(-1/t^2)\,dt}{1+(1/t^2)}=-\int_{-1}^1\frac{dt}{1+t^2}$ **!!**

$t=\frac1x$, $x=\frac1t$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $x=-1\to t=-1$, $x=1\to t=1$

Ahora $t=g(x)=\frac1x$, ni siquiera es continua en $x=0$.

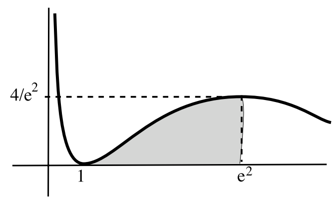
---

35 Dominio $=\{x>0\}$. $f\underset{x\to0^+}{\to}\infty$, $f\underset{x\to\infty}{\to}0$. $f'(x)=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.

Mínimo en $(1,0)$, máximo en $\left(e^2,\frac{4}{e^2}\right)$. $\int_1^{e^2}f=\frac13\ln^3x\Big]_1^{e^2}=\frac83$.

F crece ($F'=f>0$) y va desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (lo hace $\ln^3x$).

Hay 1 cero de F. $F''=f'$ se anula 2 veces. Hay dos puntos de inflexión.



---

36 $D=[-1,\infty)$. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1+\frac12x-\frac18x^2+\cdots-1}{x}=\frac12-\frac18x+\cdots\Rightarrow f'(0)=-\frac18$. O bien: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

$\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)^2}\Rightarrow f'(0)=-\frac18$. [Directamente: $f'(x)=\frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{2\sqrt{1+x}(2\sqrt{1+x}+2+x)}$].

$f'(x)<0\ \forall x\in D\Rightarrow f$ decreciente y $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ [o bien $\sqrt{1+x}\gtrless1$ si $x\gtrless0$] $\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow$ **nunca es** $f(x)=-1$.

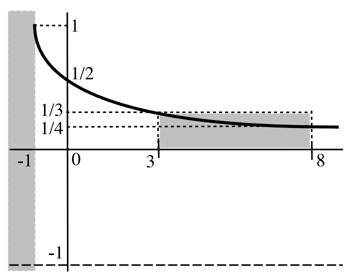
[Ojo: $\sqrt{1+x}-1=-x$, $1+x=(1-x)^2$, $x^2-3x=0$, $x=0,3$ soluciones falsas].

Lo anterior y $f(-1)=1$, $f'(-1^+)=-\infty$, $f(3)=\frac13$, $f(8)=\frac14$ $\longrightarrow$

$I\overset{\sqrt{1+x}=t}{=}\int_2^3\frac{(t-1)2t\,dt}{t^2-1}=\int_2^3\frac{2t\,dt}{t+1}=2-\left[2\log|t+1|\right]_2^3=2-2\log\frac43$.

f decreciente en $(3,8]\Rightarrow f(x)<f(3)=\frac13\Rightarrow I<\int_3^8\frac{dx}{3}=\frac53$.

O bien: $\log(1+\frac13)=\frac13-\frac1{18}+\cdots\Rightarrow\log\frac43>\frac5{18}\Rightarrow I<2-\frac59=\frac{13}{9}<\frac53$.



---

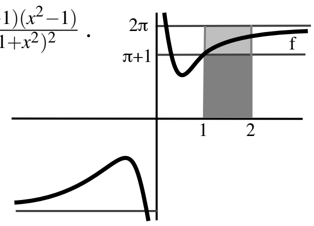
37 $\boxed{f(x)=\frac1x+4\arctan x}$ Impar. $f'(x)=\frac{3x^2-1}{x^2(1+x^2)}$. $f(\frac{\sqrt3}{3})=\sqrt3+\frac{2\pi}{3}$ mínimo. $f''(x)=-2\frac{(3x^2+1)(x^2-1)}{x^3(1+x^2)^2}$.

Inflexión en $(1,\pi+1)$. $\lim_{x\to0^+}=\infty$, $\lim_{x\to\infty}=2\pi$.

En $[1,2]$ crece $\Rightarrow f(1)=1+\pi\le f(x)\le2\pi\Rightarrow1+\pi\le\int_1^2f\le2\pi$.

$\int_1^\infty f$ diverge [como $\int^\infty x^0$, o bien $\int_1^xf\ge\int_1^x(\pi+1)$]. $\lim_{x\to\infty}\frac1x\int_1^xf=[\frac{\infty}{\infty},\text{L'H}]=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1}=2\pi$.

[Se puede integrar: $\int_1^xf=4x\arctan x-2\log(1+x^2)+\log x-\pi+2\log2$].



38 a] $\int x\log\big(1+\frac{4}{x^2}\big)dx = \big[u=\log(1+\frac{4}{x^2}),\ dv=x\,dx\big] = \frac{x^2}{2}\log(1+\frac{4}{x^2})+\int\frac{4x\,dx}{x^2+4} = \frac{x^2}{2}\log(1+\frac{4}{x^2})+2\log(x^2+4)$.

b] $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1/x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\log(1+4t^2)}{t^2} = 4$ e $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergente $\Rightarrow$ la impropia diverge. [Más largo usando $\uparrow$].

---

39 $\boxed{f(x)=x\arctan\frac{4}{x^2}}$, $f(0)=0$. a] $\frac{h\arctan(1/h^2)-0}{h}\xrightarrow[h\to0]{}\frac{\pi}{2}=f'(0)$. $f'(x)=\arctan\frac{4}{x^2}-\frac{8x^2}{x^4+16}$ $\big(\xrightarrow[x\to0]{}\frac{\pi}{2}\big)$, $f'(2)=\frac{\pi}{4}-1$.

b] $\int f(x)\,dx = \frac12 x^2\arctan\frac{4}{x^2}+\int\frac{4x^3}{x^4+16}\,dx = \frac12x^2\arctan\frac4{x^2}+\log(x^4+16)$.

c] $f\overset{\infty}{\sim}\frac1x$, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1/x}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\arctan 4t^2}{t^2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{4t^2+\cdots}{t^2}=4$ e $\int^\infty\frac{dx}{x}$ divergente $\Rightarrow$ diverge (o la primitiva $\to 2+\infty$).

---

40 a) $\boxed{\int_\pi^\infty \frac{\arctan x}{x^3-8}dx}$ converge: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\arctan x}{x^3-8}=\frac\pi2$ e $\int^\infty\frac{dx}{x^3}$ converge. [Como $\pi>2$ sólo es impropia en ∞].

b) $\boxed{\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^{4/3}}}$ Impropia en $1^{+,-}$; $\int_0^{1^-}$ e $\int_{1^+}^2$ divergentes ambas ($\frac43>1$). DIVERGE.
[Es falsísimo, por tanto, que: $\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^{4/3}}=-3(x-1)^{1/3}\big]_0^2=-3-3=-6$!!].

c) $\boxed{\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}}$ $\int_2^\infty$ converge: $\frac{1/\sqrt[3]{x^4-1}}{1/x^{4/3}}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$. $\int_{1^+}^2$ también converge: $\frac{1/\sqrt[3]{x^4-1}}{1/\sqrt[3]{x-1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)}}\xrightarrow[x\to1]{}\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>0$.

d) $\boxed{\int_1^\infty\log(1+\frac4{x^2})dx}$ $\log(1+\frac4{x^2})\sim\frac1{x^2}$ en ∞ : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(1+4/x^2)}{1/x^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\log(1+4t^2)}{t^2}=4>0$. Converge.

$\int_1^\infty = x\log(1+\frac4{x^2})\big]_1^\infty+\int_1^\infty\frac{x\frac{8}{x^3}}{1+\frac4{x^2}}dx=-\log5+\int_1^\infty\frac{2}{1+(\frac x2)^2}dx=2\pi-4\arctan\frac12-\log5$.

e) $\boxed{\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx}$ En 0 sólo tiene problemas aparentemente, pues $\frac{1-\cos x}{x^2}\xrightarrow[x\to0]{}\frac12$.
Como $\frac{1-\cos x}{x^2}\le\frac1{x^2}$ e $\int^\infty\frac{dx}{x^2}$ converge, la nuestra también lo hace (no sabemos hallar su valor).

f) $\boxed{\int_0^\infty\frac{x\cos x}{e^x}dx}$ Integrando no positivo. $|\frac{x\cos x}{e^x}|\le\frac{x}{e^x}$, $\int_0^\infty xe^{-x}dx$ convergente $\Big[\frac{xe^{-x}}{e^{-x/2}}\xrightarrow[x\to\infty]{}0\Big]\Rightarrow$ converge.
Calculable: $\int e^{-x}\cos x = -e^{-x}\operatorname{sen}x-\int e^{-x}\operatorname{sen}x = e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)-\int e^{-x}\cos x=\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen}x-\cos x)\to$
$\int_0^\infty\frac{x\cos x}{e^x}\,dx = x\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen}x-\cos x)\big]_0^\infty-\frac12\int e^{-x}(\operatorname{sen}x-\cos x)\,dx=\frac12e^{-x}\operatorname{sen}x\big]_0^\infty=0$.

g) $\boxed{\int_0^\infty\frac{dx}{2e^x-1}}$ $\frac1{2e^x-1}\sim\frac12e^{-x}$ convergente $\Big[$es decir, $\frac{1/(2e^x-1)}{e^{-x}}=\frac1{2-e^{-x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac12\in(0,\infty)\Big]$.
Calculable: $\int\frac{dx}{2e^x-1}\overset{e^x=u}{=}\int\frac{du}{u(2u-1)}=\int\frac{2du}{2u-1}-\int\frac{du}{u}=\log\big|\frac{2u-1}{u}\big|\Rightarrow\int_0^\infty=\log\big|\frac{2e^x-1}{e^x}\big|_0^\infty=\log2$.

h) $\boxed{\int_0^\infty\frac{dx}{e^x-1}}$ En 0^+ se parece a la divergente $\int_{0^+}^1\frac{dx}{x}$: $\frac{\frac1{e^x-1}}{1/x}=\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+o(x)}\xrightarrow[x\to0^+]{}1$.
Y en ∞ como la convergente $\int_1^\infty e^{-x}dx$: $\frac{\frac1{e^x-1}}{e^{-x}}=\frac1{1-e^{-x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$.
Como una de ellas diverge, la dada es **divergente**.

Calculando: $\int\frac{e^x\,dx}{e^x(e^x-1)}\overset{u=e^x}{=}\int\frac{du}{u(u-1)}=\int\big[\frac1{u-1}-\frac1u\big]du=\log\big|\frac{u-1}{u}\big|=\log\big|1-e^{-x}\big|$. [Esta función no tiene límite en 0^+ y sí lo tiene en ∞].

i) $\boxed{\int_1^\infty x\arctan\frac1{x^2}\,dx}$ Sólo impropia en ∞ . Como $0\le x\arctan\frac1{x^2}\sim\frac1x$ en ∞ $\Big[$es decir, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\arctan(1/x^2)}{1/x}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\arctan t^2}{t^2}=1\in(0,\infty)\Big]$
y diverge $\int^\infty\frac{dx}{x}$, la dada **diverge**. [Con la primitiva: $\int\underset{\text{partes}}{=}\frac12x^2\arctan\frac1{x^2}+\int\frac{x^3dx}{x^4+1}=\frac12x^2\arctan\frac1{x^2}+\frac14\log(x^4+1)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$].

j) $\boxed{\int_0^\infty x\operatorname{sen}^2\frac\pi x\,dx}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\operatorname{sen}^2\frac\pi x}{1/x}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\operatorname{sen}^2\pi t}{t^2}=\pi^2$, $\int^\infty\frac{dx}{x}$ diverge $\Rightarrow$ divergente. [En 0 tiene límite].

k) $\boxed{\int_0^\infty\frac{\sqrt x\,dx}{e^{2x}-1}}$ converge. Como $e^{2x}=1+2x+o(x)$, $\int_{0^+}$ converge, pues lo hace $\int_{0^+}\frac{dx}{x^{1/2}}$ y $\frac{x^{1/2}/(e^{2x}-1)}{1/x^{1/2}}=\frac{x}{e^{2x}-1}\xrightarrow[x\to0^+]{}\frac12$.

l) $\boxed{\int_1^\infty\frac{\log x}{\sqrt{x-1}}\,dx}$ $\lim\limits_{x\to1}\frac{\log x/\sqrt{x-1}}{1/\sqrt{x-1}}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x/\sqrt{x-1}}{1/\sqrt x}=\infty\Rightarrow$ converge en 1 y diverge en $\infty\Rightarrow$ Divergente.

m) $\boxed{\int_1^\infty\sqrt{\frac1x+\frac3{x^2}}\,dx}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}/x}{1/\sqrt x}=1$ e $\int^\infty\frac{dx}{\sqrt x}$ diverge $\Rightarrow$ diverge. [Primitiva calculable con $u=\sqrt{x+3}$].
[Primitiva calculable: $\int\underset{\text{partes}}{=}2\sqrt{x-1}\,\log x-2\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx\underset{t=\sqrt{x-1}}{=}2\sqrt{x-1}\,\log x-4\int\frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,du=2\sqrt{x-1}\,[\log x-2]+4\arctan\sqrt{x-1}$].

n) $\boxed{\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt x+4x+4x\sqrt x}}$ En 0^+ se parece a la convergente $\int_{0^+}^1\frac{dx}{\sqrt x}$: $\frac{\frac1{\sqrt x+4x+4x\sqrt x}}{1/\sqrt x}=\frac1{1+4\sqrt x+4x}\xrightarrow[x\to0^+]{}1$.
Y en ∞ a la convergente $\int_1^\infty\frac{dx}{x^{3/2}}$: $\frac{\frac1{\sqrt x+4x+4x\sqrt x}}{1/x^{3/2}}=\frac1{\frac1x+\frac4{\sqrt x}+4}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac14$.
Como ambas convergen, la dada **converge**.

La primitiva es calculable: $\int\overset{u=\sqrt x}{=}\int\frac{2u\,du}{u+4u^2+4u^3}=\int\frac{2\,du}{(1+2u)^2}=-\frac1{1+2u}=-\frac1{1+2\sqrt x}\Rightarrow\int_0^\infty=\boxed{1}$.

ñ) $\boxed{\int_0^1\frac{\log(1+x)}{x^2}dx}$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(1+x)/x^2}{1/x}=1$ e $\int_0\frac{dx}{x}$ divergente $\Rightarrow$ diverge.

más 40 o) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx} = \int_0^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}} - \int_0^\infty \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}dx$: divergente - convergente [similar a una de los apuntes]. Diverge en ∞. [En $x=0$ tiene límite, con lo que sólo aparentemente es impropia].

p) $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx}$ Como $0 \le \frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ e $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge, la del valor absoluto converge y, por tanto, también **converge** la inicial.

q) $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx} \underset{\text{partes}}{=} -\Big[\frac{\cos x}{x}\Big]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x\,dx}{x^2} = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x\,dx}{x^2}$, y la primera converge, pues vimos que lo hace la última

r) $\boxed{\displaystyle\int_4^\infty \frac{\arctan(1/x)}{(2x-8)^{1/3}}\,dx}$ converge: $\displaystyle\lim_{x\to4} \frac{(x-4)^{1/3}\arctan\frac{1}{x}}{(2x-8)^{1/3}} = \frac{\arctan\frac14}{2^{1/3}} > 0,\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^{4/3}\arctan\frac{1}{x}}{(2x-8)^{1/3}} = \frac{1}{2^{1/3}} > 0.$

s) $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+2e^{\cos x}}{x^3-2\sqrt{2}}\,dx}$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\frac{x+2e^{\cos x}}{x^3-2\sqrt{2}} = 1$: converge en ∞ ; pero además tiene asíntota en $x=\sqrt{2}\in(1,\infty)$. Como $\displaystyle\frac{x+2e^{\cos x}}{(x-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}x+2)} \sim \frac{1}{x-\sqrt{2}}$ si $x\to\sqrt{2}$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+2e^{\cos x}}{x^3-2\sqrt{2}}dx$ diverge en $x=\sqrt{2}^{+,-}$.

t) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{3/2}}\,dx}$ $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\arctan x/x^{3/2}}{1/x^{1/2}} = 1\ ,\ \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x/x^{3/2}}{1/x^{3/2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ converge ($\cdots = \sqrt{2}\,\pi$).

u) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2}}$ $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1/(x^4+x^2)}{1/x^2} = 1$: diverge en 0 , $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1/(x^4+x^2)}{1/x^4} = 1$ converge en ∞ ; diverge.

v) $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}\,dx}$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\frac{\log x}{x^3} = 0$: converge ($\displaystyle -\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\Big]_1^\infty = \frac14$).

w) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx}$ $|e^{-x}\operatorname{sen} x| \le e^{-x}$; absolutamente convergente ($\displaystyle = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)\Big]_0^\infty = \frac12$).

x) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^{x^2}}}$ Sólo es impropia en ∞ donde converge. Por desigualdades: $\displaystyle\frac{x}{1+e^{x^2}} \le xe^{-x^2} \Rightarrow \int_0^\infty f \le \Big[-\frac12 e^{-x^2}\Big]_0^\infty = \frac12$.

Comparando con límites con la convergente $\displaystyle\int^\infty \frac{1}{x^2}$: $\displaystyle\frac{f}{1/x^2} = \frac{x^3}{1+e^{x^2}} \overset{L'H}{\to} \frac{3x}{2e^{x^2}} \overset{L'H}{\to} \frac{3}{4xe^{x^2}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (O con $\int^\infty e^{-x}dx$ o con otras).

O hallando la primitiva: $\displaystyle\overset{t=x^2}{\longrightarrow} \frac12\int\frac{dt}{1+e^t} \overset{e^t=u}{\longrightarrow} \frac12\int\frac{du}{u(1+u)} = \frac{\log u - \log(1+u)}{2} = \frac{x^2-\log(1+e^{x^2})}{2}$, $\displaystyle\int_0^\infty f = \frac12\log 2$.

y) $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty \Big[\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\Big]\,dx} = 4\sqrt{x} - \log x\Big]_1^\infty$; divergente. z) $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty e^{-1/x}\,dx}$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-1/x} = 1$; divergente.

α) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx}$ $\displaystyle\overset{0^+}{\sim}\int_{0^+}\frac{dx}{x^{1/2}}$ C: $\displaystyle\frac{(1-\cos x)/x^{5/2}}{1/x^{1/2}} = \frac{1-1+\frac12 x^2-\cdots}{x^2} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \frac12$. $\displaystyle 0 \le \frac{1-\cos x}{x^{5/2}} \le \frac{2}{x^{5/2}}$, $\displaystyle\int^\infty \frac{2dx}{x^{5/2}}$ C. La dada converge.

β) $\boxed{\displaystyle\int_2^\infty \frac{\arctan\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx}$ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\arctan\frac{2}{x}}{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x-1}}\,dx$ en 2^+ se comporta como la convergente $\displaystyle\int_{2^+}^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$: $\displaystyle\frac{f(x)}{1/\sqrt{x-2}} = \frac{\arctan\frac{2}{x}}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to2^+}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$.

En ∞ como la convergente $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x^2}$: $\displaystyle\frac{f(x)}{1/x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\,\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\frac{\arctan(2/x)}{1/x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 2$ $\Big[\displaystyle\frac{\arctan 2t}{t} \underset{t\to0^+}{\to} 2\Big]$. Converge.

γ) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}\,dx}$ diverge. $\operatorname{sen}\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{6} + \cdots$, $e^{x^2}-1 = x^2 + \cdots \Rightarrow \displaystyle\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}/(e^{x^2}-1)}{1/x^{3/2}} = \frac{x^2-\ldots}{x^2+\cdots} \overset{x\to0^+}{\to} 1 \Rightarrow \int_0^1$ diverge.

$\displaystyle\Big|\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}\Big| \le \frac{1}{e^{x^2}-1}$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge y $\displaystyle\frac{1/(e^{x^2}-1)}{1/x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \underset{x\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \int_1^\infty$ converge (absolutamente).

---

41 a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x^a}\,dx$. En 0^+ se comporta como $\displaystyle\int_{0^+}\frac{dx}{x^{a-1}}$: $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^{a-1}(1-e^{-x})}{x^a} = \lim_{x\to0^+}\frac{x+o(x)}{x} = 1$, que converge si $a<2$,

y en ∞ como $\displaystyle\int^\infty \frac{dx}{x^a}$: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a(1-e^{-x})}{x^a} = 1$, que lo hace si $a>1$. La inicial converge si $1<a<2$.

---

42 a) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x+\frac{1}{x})}{(1+x^2)^n}\,dx}$ En 0^+ no plantea problemas $\Big[\arctan\big(x+\frac{1}{x}\big) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\Big]$.

En ∞ converge para $\boxed{n>1}$, como $\displaystyle\int^\infty \frac{dx}{x^{2n}}$: $\displaystyle\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}\arctan\big(x+\frac{1}{x}\big) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} > 0$.

b) $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \Big[\frac{n}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\Big]dx}$ $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\big(\frac{n}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\big) = \lim_{x\to0^+}\frac{(n-1)x+o(x)}{x+o(x)} = n-1 \Rightarrow$ diverge para $n\neq1$.

Si $n=1$ tiene límite en $x=0$: $\displaystyle\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \to \frac12$.

c) $\boxed{\displaystyle\int_2^\infty \frac{x\,dx}{x^n-8}}$. Es convergente en el infinito cuando $n\ge3$ (por comparación con $\displaystyle\int^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$) $\Rightarrow \displaystyle\int_2^\infty$ diverge si $n=1,2$

(también divergen las impropias asociadas al cero del denominador, pero ya no es necesario comprobarlo).

Si $n=3$ hay asíntota en $x=2$, donde se comporta como la divergente $\displaystyle\int_{2^+}\frac{dx}{x-2}$: $\displaystyle\lim_{x\to2^+}\frac{x/(x^3-8)}{1/(x-2)} = \lim_{x\to2^+}\frac{x}{(x^2+2x+4)} = \frac16$ (o L'H).

Para $n\ge4$, el denominador no se anula en $[2,\infty)$ ($x\ge2$, $n\ge4 \Rightarrow x^n \ge 2^4 > 8$). La integral converge si y sólo si $n\ge4$.

---

43 a) $\displaystyle\int_0^{1/2}\sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n\,dx = \sum_{n=0}^\infty\int_0^{1/2}(n+1)x^n\,dx = \sum_{n=0}^\infty \big(\tfrac12\big)^{n+1} = 1$ ($\displaystyle\sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$). [Serie de potencias con $R = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$ En $|x|<1$ converge uniformemente].

b) $\displaystyle\int_0^\pi\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n^2}dx = \sum_{n=1}^\infty\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n^2}dx = 0$ (converge uniformemente en todo $\mathbf{R}$: $\sum|\cdot| \le \sum\frac{1}{n^2}$).

c) $\displaystyle\int_0^1\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+x)^4}dx = \frac13\sum_{n=1}^\infty\Big(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\Big) = \frac13$ (converge uniformemente en $[0,1]$: $\sum|\cdot| \le \sum\frac{1}{n^2}$).

44 $H(x)=|x-1|\int_{-1}^{x}\operatorname{sen}t^3dt$. $H(0)=\int_{-1}^{0}[t^3-\frac{1}{6}t^9+\frac{1}{120}t^{15}+\cdots]dt=-\frac{1}{4}+\frac{1}{60}-\frac{1}{1920}+\cdots\Rightarrow H(0)\approx-\frac{7}{30}$.

$H'(x)=\begin{cases}(1-x)\operatorname{sen}x^3-\int_{-1}^{x}, & x<1\\ (x-1)\operatorname{sen}x^3+\int_{-1}^{x}, & x>1\end{cases}$. $H'(1^-)=-\int_{-1}^{1}\operatorname{sen}t^3dt=0=\int_{-1}^{1}\operatorname{sen}t^3dt=H'(1^+)$; derivable y $H'(1)=0$.

---

45 a) $\boxed{0\le\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)\,dx\le\frac{\pi}{2}}$ $0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le\operatorname{sen}x\le 1\Rightarrow 0\le\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)\le\operatorname{sen}1<1\Rightarrow\int_0^{\pi/2}0\le\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)\,dx\le\int_0^{\pi/2}1$.

b) $\boxed{\frac{2}{21}\le\int_0^1\frac{x^6dx}{\sqrt{x^4+1}}\le\frac{1}{7}}$ (primitiva no calculable) $x^6\ge\frac{x^6}{\sqrt{x^4+1}}\ge\frac{x^6}{\sqrt{2}}$ en $[0,1]\Rightarrow\frac{1}{7}\ge\int_0^1\ge\frac{1}{7\sqrt{2}}\ge\frac{2}{21}$ $\big(3>2\sqrt{2}\big)$. O Taylor:

Si $|x|\le 1$, $x^6(1+x^4)^{-1/2}=x^6\big(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8+\cdots\big)\Rightarrow\int_0^1=\frac{1}{7}-\frac{1}{22}+\frac{1}{40}-\cdots\Rightarrow\frac{2}{21}=\frac{1}{7}-\frac{1}{21}\le\frac{1}{7}-\frac{1}{22}\le\int_0^1\le\frac{1}{7}$.

c) $\boxed{\frac{3}{8}\le\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\le\frac{2}{5}}$ $(1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}=(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\cdots)(1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+\cdots)=(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\cdots)$

si $|x|<1\Rightarrow I\equiv\int_0^{1/2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{48}-\frac{1}{128}+\cdots\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\le I\le\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{48}=\frac{19}{48}\le\frac{2}{5}$.

[Se puede hallar el valor exacto de la integral: $t=\sqrt{(1-x)/(1+x)}\to I=\int_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{4t^2dt}{(1+t^2)^2}=\cdots=\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{\pi}{6}$].

---

46 $\boxed{f(x)=\int_0^x\operatorname{sen}t^2dt}=\int_0^x[t^2-\frac{1}{6}t^6+\cdots]\,dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{42}x^7+\cdots\Rightarrow\frac{x-\operatorname{sen}x}{f(x)}=\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}$. $\Big[\overset{L'H}{\to}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x^2}=\frac{\operatorname{sen}x}{x}\frac{1}{2\cos x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}\Big]$.

$P_3(x)=\frac{1}{3}x^3$; $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{24}-\frac{1}{5376}+\cdots\approx\frac{1}{24}$ (≈ 0.042), con error menor que $\frac{1}{5376}<10^{-3}$.

---

47 a) $x\int_0^x e^{-t^2}dt=x(x-\frac{1}{3}x^3+\cdots)\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\frac{1}{3}x^4+\cdots)-(x^2-\frac{1}{3}x^6+\cdots)}{x^4-\frac{1}{2}x^8+\cdots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+\cdots}{x^4+\cdots}=-\frac{1}{3}$.

$\lim_{x\to\infty}\Big[\frac{x}{\log[1+x^4]}\int_0^x e^{-t^2}dt-\frac{\arctan x^2}{\log[1+x^4]}\Big]=\infty$ $(\infty\times p-0\,,\,p>0)$.

b) Sea $G(x)=\int_{-x^2}^{0}\operatorname{sen}t^2dt$. $\lim_{x\to 0}\frac{G(x)}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}x^4}{6x^5}=\frac{1}{3}$; $-x^2\le G(x)\le x^2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{G(x)}{x^6}=0$.

---

48 $\int_0^\infty\big[1+t^3\big]^{-1/2}dt$ converge en ∞ como $\int^\infty\frac{dt}{t^{3/2}}$: $\frac{1/[1+t^3]^{1/2}}{1/t^{3/2}}\xrightarrow[t\to\infty]{}1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^{x^2}[1+t^3]^{-1/2}dt-\operatorname{sen}x^2}{x^6}=\frac{cte-acot}{\infty}=0$.

$\big[1+t^3\big]^{-1/2}=1-\frac{1}{2}t^3+\cdots\Rightarrow\int_0^{x^2}=\big[t-\frac{1}{8}t^4+\cdots\big]_0^{x^2}=x^2-\frac{1}{8}x^8+\cdots$, $\operatorname{sen}x^2=x^2-\frac{1}{6}x^6+\cdots\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{8}x^8+o(x^8)}{x^6}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{6}$.

O bien: $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x[1+x^6]^{-1/2}-2x\cos x^2}{6x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{[1+x^6]^{-1/2}-\cos x^2}{3x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^6+\cdots-1+\frac{1}{2}x^4-\cdots}{3x^4}=\frac{1}{6}$.

---

49 $\lim_{t\to\infty}\frac{t^{-1/2}}{(\log t+t)^{-1/2}}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{1+\frac{\log t}{t}}=1$ e $\int_2^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}}$ divergente $\Rightarrow$ la impropia $\int_2^\infty\frac{dt}{\sqrt{\log t+t}}$ diverge.

Como $F(x),F(2x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$, por L'Hôpital y TFC: $\lim_{x\to\infty}\frac{F(2x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2F'(2x)}{F'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2/\sqrt{\log 2x+2x}}{1/\sqrt{\log x+x}}=\sqrt{2}$.

---

50 Con un poco de vista: $u=x^2\to\boxed{I=\int_0^1\frac{x}{x^4-16}\,dx}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{du}{u^2-16}=\frac{1}{8}\int_0^1\big[\frac{1}{u-4}-\frac{1}{u+4}\big]du=\frac{1}{16}\log\frac{3}{5}$. Sin vista:

$x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)\to\frac{x}{x^4-16}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\to A(x-2)(x^2+4)+B(x+2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-4)=x$

$x=2\to A=\frac{1}{16}$, $x=-2\to B=\frac{1}{16}$, $\begin{matrix}x^3: A+B+C=0\to C=-1/8\\ x^0: 8A-8B+4D=0\to D=0\end{matrix}$, $I=\frac{1}{16}\big[\log|x-2|+\log|x+2|-\log(x+4)\big]_0^1=\frac{1}{16}\log\frac{3}{5}$.

Para aproximar I con un racional podemos desarrollar el resultado. Para tener serie alternada:

$$I=-\frac{1}{16}\log\frac{5}{3}=-\frac{1}{16}\log(1+\tfrac{2}{3})=-\frac{1}{16}\big[\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{9}+\tfrac{8}{81}-\cdots\big]\approx-\frac{1}{36},\ \text{con } |E|<\frac{1}{162}<10^{-2}$$

Mucho más largo: $\frac{1}{16}\log(1-\frac{2}{5})=-\frac{1}{16}\big[\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{8}{375}+\cdots\big]$. $f=\log(1+x)$, $f'=(1+x)^{-1}$, $f''=(1+x)^{-2}$, $f'''=-2(1+x)^{-3},\ldots$

Con un término: $I\approx-\frac{1}{40}$, $|E|=\frac{1}{16}\frac{1}{2(1+c)^2}\frac{4}{25}\underset{c\in(-2/5,0)}{<}\frac{1}{200(3/5)^2}=\frac{1}{72}$ no basta. El ordenador dice que sí pero nuestra cota es mayor.

Con dos: $I\approx-\frac{3}{100}$, $|E|=\frac{1}{16}\frac{1}{3(1+c)^3}\frac{8}{125}<\cdots<10^{-2}$. Otra posibilidad (que no exige calcular la integral):

$-\frac{x}{16}\frac{1}{1-x^4/16}=-\frac{1}{16}\big[x+\frac{x^5}{16}+\frac{x^9}{16^2}+\cdots\big]\to I=-\frac{1}{16}\big[\frac{1}{2}+\frac{1}{6\cdot 16}+\frac{1}{10\cdot 16^2}+\cdots\big]\approx-\frac{1}{32}$, con $|E|<\frac{1}{6\cdot 16^2}\frac{1}{1-1/16}=\frac{1}{6\cdot 15\cdot 16}<10^{-2}$.

---

51 $\boxed{f(x)=\frac{x^2+2}{x^4+4}}$. $x^4=-4=4e^{i\pi}\to x=\sqrt{2}e^{i3\pi/4},\sqrt{2}e^{i\pi/4},\sqrt{2}e^{i5\pi/4},\sqrt{2}e^{i7\pi/4}=i\pm 1,-i\pm 1$.

O bien, $x^2=\pm i=(a+bi)^2=a^2-b^2\pm 2ab\to a=\pm 1,b=\pm 1$.

$\frac{x^2+2}{x^4+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}\to B=D=\frac{1}{2}$, $A=C=0$, $\int f=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\frac{1}{2}[\arctan(x+1)+\arctan(x-1)]\to$

Debemos probar que $\boxed{\frac{1}{2}\le I=\int_0^1 f=\frac{1}{2}\arctan 2\le\frac{2}{3}}$. $\arctan 2>\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}>1\Rightarrow I>\frac{1}{2}$ (Taylor no converge en 2).

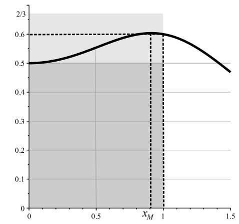
No basta $\frac{1}{2}\arctan 2<\frac{\pi}{4}$. Sin la primitiva podemos probar las cotas (acotando f o con Taylor):

$\frac{1}{2}\le f\Leftrightarrow x^4\le x^2$, $f\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow 0\le 2x^4-3x^2+2=2(x^2-1)^2+x^2$ ciertas en $[0,1]\Rightarrow\frac{1}{2}\le I\le\frac{2}{3}$.

[Más largo: $f'=-2x\frac{x^4+4x^2-4}{(x^4+4)^2}\to x_M=\sqrt{2\sqrt{2}-2}\approx 0.9$, $f(x_M)=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)<\frac{2}{3}$, $f(1)=\frac{3}{5}$].

$f(x)=\frac{1}{4}\big[x^2+2\big]\big[1-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{16}x^8+\cdots\big]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6+\cdots\Rightarrow$

$I=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}+\cdots<\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}<\frac{2}{3}$ [alterna cada dos].



52 $\boxed{3<\int_0^1 \frac{nx}{4+x^4}\,dx<4}$ $A=\int_0^1 \overset{t=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(1/2)dt}{1+(t/2)^2}=\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\big[\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{160}+\cdots\big]$. Alternada y decreciente.

O bien, $\frac{x}{4+x^4}=\frac{x}{4}\frac{1}{1+x^4/4}=\frac{x}{4}\big[1-\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{16}+\cdots\big]$ e integrando se llega a lo mismo.

De 2 términos deducimos: $\frac{11}{96}<A<\frac{1}{8}\Rightarrow\begin{cases} nA<n/8\leq 4 \text{ si } n\leq 32\\ nA>11n/96\geq 3 \text{ si } n\leq 288/11>27\end{cases}\Rightarrow$ si $\boxed{27\leq n\leq 32}$ se cumple $3<nA<4$.

[Más sumandos, quizás darían algún n más].

Otras formas de aproximar A (sin la serie): $\arctan\frac{1}{2}<\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}<\frac{3{,}2}{6}=\frac{8}{15}$ $\big(>\frac{1}{2}$, peor cota$\big)$.

Acotando el integrando: $\frac{1}{5}<\frac{1}{4+t^2}<\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{10}<A<\frac{1}{8}$ (la primera es peor y la segunda es la de antes).

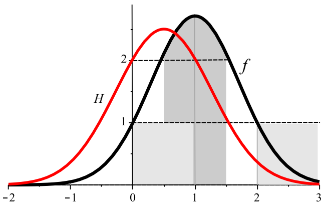
---

53 $\boxed{f(x)=e^{2x-x^2}}=\big[1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\cdots\big]\big[1-2x^2+2x^4+\cdots\big]=1+2x-\frac{8}{3}x^3-\frac{4}{3}x^4+\cdots$ (apuntes).

a) $\int_0^1 f\approx x+x^2+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^4\big]_0^1=\boxed{2}$.

b) $H'(x)=e^{2(x+1)-(x+1)^2}\cdot 1-e^{2x-x^2}\cdot 1=e^{1-x^2}-e^{2x-x^2}=e^{-x^2}\big[e-e^{2x}\big]=0$ si $x=\frac{1}{2}$. Antes crece y luego decrece.

El máximo local y absoluto es, pues, $\boxed{H\big(\frac{1}{2}\big)=\int_{1/2}^{3/2} f}$ (no calculable).



El mínimo, en un extremo del intervalo $[0,2]$. $f'(x)=2(1-x)e^{2x-x^2}\begin{matrix}>1 \text{ en } (0,1)\\ <1 \text{ en } (2,3)\end{matrix}$.

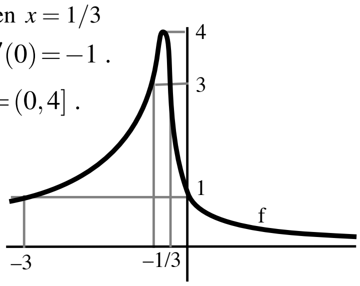
La gráfica de f muestra que se toma en 2 : $H(2)<1<H(0)\approx 2<H\big(\frac{1}{2}\big)$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=$ [L'H y TFC] $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=1$ (o usando el desarrollo de arriba).

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=0$, pues el numerador tiende a una constante ($\int_0^\infty f$ converge). [No aplicables ni L'Hôpital ni Taylor].

---

54 $\boxed{f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}}\to f'(x)=\frac{x(1+3x)^{-2/3}-(1+3x)^{1/3}+1}{x^2}=\frac{(1+3x)^{2/3}-1-2x}{x^2(1+3x)^{2/3}}\Rightarrow$ f derivable si $x\neq 0,-1/3$; f no derivable en $x=1/3$



$[1+3x]^{1/3}=1+\frac{(3x)}{3}-\frac{(3x)^2}{9}+\cdots=1+x-x^2+\cdots$, si $|x|<\frac{1}{3}\Rightarrow f(x)=1-x+\cdots\Rightarrow\exists f'(0)=-1$.

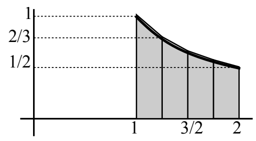
$f'=0\Rightarrow(1+3x)^2=(1+2x)^3\Rightarrow x=-\frac{3}{8}$, $f(-\frac{3}{8})=4$ máximo. $f>0$, $f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0\Rightarrow \operatorname{im} f=(0,4]$.

c) $\int_{-2/3}^0 f\overset{1+3x=t^3}{=}3\int_{-1}^1\frac{t^2dt}{t^2+t+1}=\big[3t-\frac{3}{2}\log(t^2+t+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\big]_{-1}^1$.

Simpson: $\int_{-2/3}^0 f\approx\frac{1}{9}\big[f(-\frac{2}{3})+4f(-\frac{1}{3})+f(0)\big]=\frac{1}{9}[3+4\cdot 3+1]=\frac{16}{9}$ [Taylor no vale].

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{-2/3}}=\sqrt[3]{3}\Rightarrow\int_0^\infty$ divergente. e) $F'(3)=-f(-3)\cdot(-1)=1$.

55



$T_2=\frac{1}{4}\big[1+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\big]=\frac{17}{24}\approx 0.708$; $T_4=\frac{1}{8}\big[1+2\cdot\frac{4}{5}+2\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\big]\approx 0.697$.

$S_2=\frac{1}{6}\big[1+4\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\big]=\frac{25}{36}\approx 0.6944$; $S_4=\frac{1}{12}\big[1+4\cdot\frac{4}{5}+2\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\big]\approx 0.6933$.

Exacto: log2 = 0.69314718...

---

56 a) $\boxed{\int_0^1 e^{-x^2}dx}\overset{\forall x}{=}\int_0^1\big[1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^3+\cdots\big]dx=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\cdots\Rightarrow$

$S_4=0.74286<S_6=0.74673<S_6=0.74682<\int_0^1<S_7=0.74684<S_5=0.74749$

Simpson: $n=2\to 0.747181$, $n=4\to 0.746854$, $n=6\to 0.746830$.

b) $\boxed{\int_0^1\sqrt{x^4+1}\,dx}=\int_0^1\big[1+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{8}x^8+\frac{1}{16}x^{12}-\frac{5}{128}x^{16}+\frac{7}{256}x^{20}+\cdots\big]dx=1+\frac{1}{10}-\frac{1}{72}+\frac{1}{208}-\frac{5}{2176}+\frac{1}{768}-\cdots$

[el desarrollo vale si $|x|<1$ pero las $\sum$ integrales suelen converger más] $\Rightarrow S_5=1.08862<\int_0^1<S_6=1.08992$

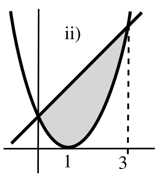
Simpson: $n=2\to 1.08956$, $n=4\to 1.08941$, $n=6\to 1.08943$.

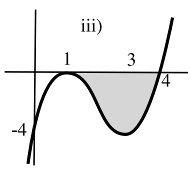
c) $\boxed{\int_1^2\frac{e^x}{x}dx}=\int_1^2\big[\frac{1}{x}+1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{120}x^4+\frac{1}{720}x^5+\cdots\big]dx=\log 2+1+\frac{3}{4}+\frac{7}{18}+\frac{5}{32}+\frac{31}{600}+\frac{7}{480}+\cdots\Rightarrow$

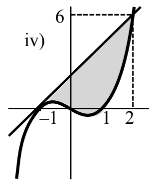
$S_6=3.03996<S_7=3.05454<\int_0^1$. Simpson: $n=2\to 3.06066$, $n=4\to 3.05923$, $n=6\to 3.05914$.

---

57 i) $A=\int_0^\pi \operatorname{sen}x\,dx=2$.





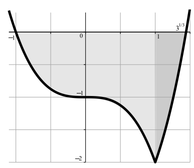


ii) $x^2-2x+1=x+1\to x=0,3$. $A=\int_0^3(3x-x^2)dx=\frac{9}{2}$.

iii) $A=-\int_1^4(x-1)^2(x-4)dx=\frac{27}{4}$.

iv) La recta tangente $y=2(x+1)$ corta a $f(x)$, además de en $x=-1$,

en $x=2$. $A=\int_{-1}^2[2(x+1)-f(x)]dx=\int_{-1}^2[2+3x-x^3]dx=\frac{27}{4}$.



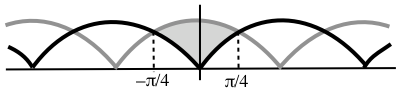
v) $f(x)=|x^3-1|-2=\begin{cases}-1-x^3 , x\leq 1\\ x^3-3 , x\geq 1\end{cases}$. Corta el eje x si $x=-1$ y si $x=3^{1/3}$.

$A=-\big[\int_{-1}^0(-1-x^3)\,dx+\int_0^{3^{1/3}}(x^3-3)\,dx\big]=\int_2^0\big[(y+3)^{1/3}+(y+1)^{1/3}\big]\,dx=\frac{3}{4}\big[3\cdot 3^{1/3}-1\big]$.

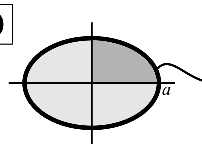
---

58 $y=\frac{1}{x^2+1}$, $y''=2\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$. Inflexión en $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. $2\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

59 $|\cos x| = |\operatorname{sen} x| \Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen} x$ ó $\cos x = -\operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}[\,|\cos x| - |\sin x|\,]dx) = 2(\int_0^{\pi/4}[\cos x - \sin x]dx) = 2(\sqrt{2}-1)$.



---

60 

$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ Área $= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ x=a\operatorname{sen}\theta}}{=} 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \boxed{\pi ab}$.

$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}$.

Volvemos a calcular $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[1+\cos 2\theta]\,d\theta = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\big[\operatorname{sen}2\theta\big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$.

---

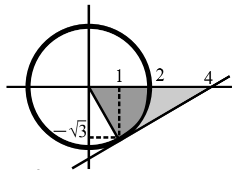
61 $x^2+y^2=4 \Rightarrow 2x+2yy'=0$. La tangente a la curva en $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ es $y=\frac{x-4}{\sqrt{3}}$, $x=4+\sqrt{3}\,y$.

El área se hallaría fácil sin integrar: área triángulo – área sector $=\frac{1}{2}4\sqrt{3}-\frac{1}{6}\pi 2^2 = \boxed{2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}}$

Integrando respecto a x: $A=-\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\int_2^4\frac{x-4}{\sqrt{3}}\,dx=-\big[2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\big]_1^2+4\sqrt{3}-\big[\frac{x^2}{2\sqrt{3}}\big]_1^4$

Integrando respecto a y: $A=\int_{-\sqrt{3}}^0\big[4+\sqrt{3}\,y-\sqrt{4-y^2}\,\big]\,dy=4\sqrt{3}+\big[\frac{\sqrt{3}y^2}{2}\big]_{-\sqrt{3}}^0-\big[2\arcsin\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}\big]_{-\sqrt{3}}^0$

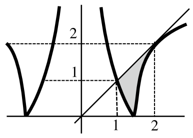
$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=[x=2\operatorname{sen}t]=4\int\cos^2t\,dt=2t+\operatorname{sen}2t=2t+2\operatorname{sen}t\cos t=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$.



---

62 $g(x)=|3-\frac{4}{x^2}|=\begin{cases}3-\frac{4}{x^2} \text{ si } |x|\ge 2/\sqrt{3}\\ \frac{4}{x^2}-3 \text{ si } |x|\le 2/\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow g'(2)=\frac{8}{x^3}\Big|_{x=2}=1$. Recta tangente: $y=2+1(x-2)=x$.

Corta $y=g(x)$ si $x=\frac{4}{x^2}-3 \underset{(x=-2\text{ no vale})}{\Rightarrow} x=1$. Área $=\int_1^2 x\,dx+\int_1^{2/\sqrt{3}}(3-\frac{4}{x^2})\,dx+\int_{2/\sqrt{3}}^2(\frac{4}{x^2}-3)\,dx=8\sqrt{3}-\frac{27}{2}$.



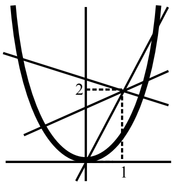
---

63 Tangentes por $(1,2)$: $y=k(x-1)+2$. Cortan $y=x^2$ en dos puntos con $x_\pm=\frac{1}{2}\big[m\pm\sqrt{m^2-4m+8}\,\big]\ \forall m$.

Área encerrada: $A(m)=\int_{x_-}^{x_+}\big[2-m+mx-x^2\big]dx=\cdots=\frac{1}{6}(m^2-4m+8)^{3/2}$.

$A'=\frac{1}{6}\frac{3}{2}(m^2-4m+8)^{1/2}(2m-4)=0 \Rightarrow m=2$. La recta es $\boxed{y=2x}$ y el área mínima: $\frac{1}{6}4^{3/2}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

$\big[$Se necesitan cosas más fuertes que el TFC para derivar directamente $\int_{a(m)}^{b(m)}f(x,m)\,dx\big]$.



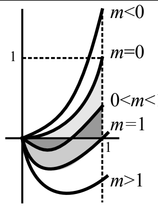
---

64 $\boxed{S(m)=\int_0^1|x^3-mx|\,dx}$ Si $m\le 0$, no hay cortes y $S(m)\ge\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}$.

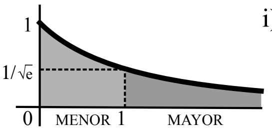
Si $m\ge 1$, tampoco corta y $S(m)\ge\int_0^1(x-x^3)\,dx=\frac{1}{4}$.

Para $m\in(0,1)$ hay corte en $\sqrt{m}\Rightarrow S(m)=\int_0^{\sqrt{m}}\big[mx-x^3\big]\,dx+\int_{\sqrt{m}}^1\big[x^3-mx\big]\,dx=\frac{1}{4}-\frac{m}{2}+\frac{m^2}{2}$.

$S'(m)=m-\frac{1}{2}$. Mínimo si $\boxed{m=\frac{1}{2}}$. Área mínima: $\boxed{S(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}}$.



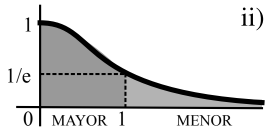
---

65 

i) $\int_0^1 e^{-x/2}dx=-2e^{-x/2}\big]_0^1=2-\frac{2}{\sqrt{e}}$

$\int_1^\infty e^{-x/2}dx=-2e^{-x/2}\big]_1^\infty=\frac{2}{\sqrt{e}}$

Mayor la segunda: $\frac{4}{\sqrt{e}}>2$, $e<4$.



ii) Ahora integrales no calculables, pero:

$\int_0^1 e^{-x^2}dx>\int_0^1 e^{-1}dx=e^{-1}$

$\int_1^\infty e^{-x^2}dx<\int_1^\infty e^{-x}dx=e^{-1}$

La impropia es menor.

---

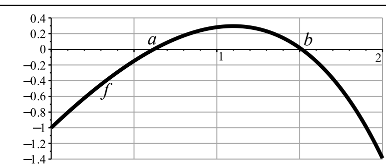
66 $y=3x$ e $y=e^x$ se cortan donde $f(x)\equiv 3x-e^x=0$. $f'(x)=3-e^x$.

Máximo en $(\log 3, 3\log 3-3)$. $f(0)=-1$, $f(1)=3-e>0$. $f(1)=6-e^2<0$.

Hay dos puntos de corte: $0<a<1<b<2$, $b-a<2$, $b+a<3$.

$\Rightarrow \int_a^b(3x-e^x)\,dx=\frac{3}{2}(b^2-a^2)-\underbrace{\left(e^b-e^a\right)}_{3b-3a}=\frac{3}{2}(b-a)\big[(b+a)-2\big]<3$.

O bien $3\log 3-3<1$ $\big(\Leftrightarrow \log 3<\frac{4}{3}\Leftrightarrow e^{4/3}=1+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}=\frac{29}{9}>3\big)\Rightarrow\int_a^b<\int_0^2 1<3$.

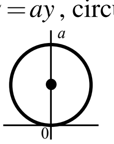


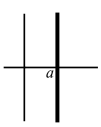
$\big[$Ordenador: $a\approx 0.62$, $b\approx 1.51$, $\int_a^b\approx 0.176\big]$

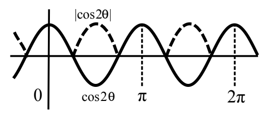
---

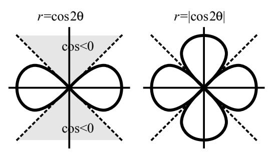
67 a) $\boxed{r=a\operatorname{sen}\theta}$ $r^2=ar\operatorname{sen}\theta$ b) $\boxed{r=a\sec\theta}$ $r\cos\theta=a$ c) $\boxed{r=\cos 2\theta}$ d) $\boxed{r=|\cos 2\theta|}$

$x^2+y^2=ay$, circunferencia $x=a$, recta vertical





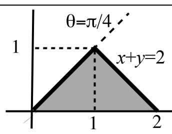




---

68 $h(x)=\begin{cases}x,\ x\le 1\\ 2-x,\ x\ge 1\end{cases}$. Corta el eje en 0 y 2. Área $=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx=\int_0^1(2-y-y)\,dy=1$.

$y=x-2\to r=\frac{2}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}\Rightarrow$ Área $=\int_0^{\pi/4}\frac{2\,d\theta}{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2}\overset{t=\tan\theta}{=}\int_0^1\frac{2\,dt}{(1+t)^2}=1$.

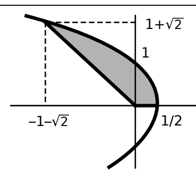


---

69 $A=\frac{1}{2}\int_0^{3\pi/4}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\big[u=\tan\frac{\theta}{2},\dots\big]=\frac{1}{2}\big[\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}\big]_0^{3\pi/4}=\frac{1}{6}\left(5+4\sqrt{2}\right)$ $\big[\tan\frac{3\pi}{8}=1+\sqrt{2}\big]$.

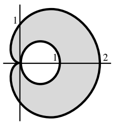
$r+r\cos\theta=1$, $x^2+y^2=(1-x)^2$, $y^2=1-2x\ \to$

$A=\int_{-1-\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-2x}\,dx-\int_{-1-\sqrt{2}}^{0}(-x)\,dx=\int_0^{1+\sqrt{2}}\left(\frac{1-y^2}{2}+y\right)dy=\frac{1}{6}\left(5+4\sqrt{2}\right)$.



70 Área $=2\left[\frac12\int_0^\pi(1+\cos\theta)^2\,d\theta\right]-\pi\frac{1}{2^2}=\frac{3\pi}{4}+\int_0^\pi\left(2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$

$$=\frac{5\pi}{4}+\left[2\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^\pi=\frac{5\pi}{4}.$$

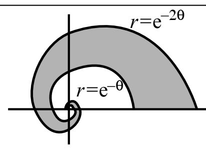


---

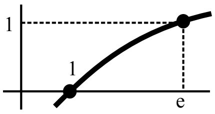
71 i) En $[0,2\pi]$, $A=\frac12\int_0^{2\pi}\left[(2e^{-\theta})^2-(e^{-\theta})^2\right]d\theta=\frac32\int_0^{2\pi}e^{-2\theta}\,d\theta=\boxed{\frac34[1-e^{-4\pi}]}\approx0.749997$.

ii) En $[0,\infty)$, $A=\frac32\int_0^\infty e^{-2\theta}\,d\theta=\boxed{\frac34}=0.75$.

[Casi todo el área está concentrada en $[0,2\pi]$ porque la exponencial se va a 0 rápidamente].

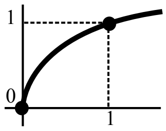


---

72 

a) $\boxed{y=\log x}$, $x\in[1,e]$; $L=\int_1^e\sqrt{1+x^{-2}}\,dx=\int_1^e\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$

$[u=x+\sqrt{x^2+1}]\to\ =\sqrt{x^2+1}-\log\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\Big]_1^e\approx2.0035$.



b) $\boxed{y=x^{2/3}}$, $x\in[0,1]$; $L=\int_0^1\sqrt{1+\frac43x^{-2/3}}\,dx$ es difícil. Pero

$x=y^{3/2}$, $L=\int_0^1\sqrt{1+\frac94y}\,dy=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}\approx1.44$.

---

73 $L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta\overset{(\bullet)}{=}4a\int_0^{\pi/2}\left[\sum_{n=0}^\infty\binom{1/2}{n}(-1)^nk^{2n}\mathrm{sen}^{2n}\theta\right]d\theta\overset{(\circ)}{=}4a\sum_{n=0}^\infty\binom{1/2}{n}(-1)^nk^{2n}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2n}\theta\,d\theta$

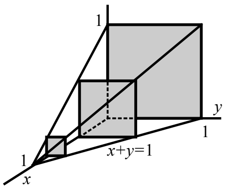
$$\overset{\text{pr 32}}{=}4a\sum_{n=0}^\infty\binom{1/2}{n}(-1)^nk^{2n}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot1}{2n(2n-2)\cdot2}\frac\pi2=2a\pi\left[1-\frac14k^2-\frac3{64}k^4-\frac5{256}k^6-\cdots\right].$$

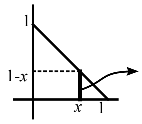
($\bullet$) válido si $|k\,\mathrm{sen}\,\theta|<1$, cierto $\forall\theta$ pues $k<1$. ($\circ$) hay convergencia uniforme por Weierstrass: $\sum\binom{1/2}{n}(-1)^nk^{2n}$ converge.

$3x^2+4y^2=12\to\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt3)^2}=1\to a=2,\ b=\sqrt3,\ k^2=\frac14,\ k=\frac12\overset{\uparrow}{\Rightarrow}L=4\pi\left[1-\frac1{16}-\frac3{1024}-\frac5{16384}-\cdots\right]\approx11.7403$.

Por Simpson: $4\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta$ se tiene: $n=2\to11.7447$, $n=4\to11.7397$, $n=6\to11.7397$.

---

74 



longitud
lado del
triángulo

Vol $=\int_0^1A(x)\,dx=\int_0^1(1-x)^2dx=-\left[\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1=\boxed{\frac13}$

Pues $A(x)$ es el área de cuadrado de base $(1-x)$.

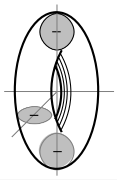
[Es fácil ver que se trata una pirámide de base 1 y altura 1 y su volumen debía ser $\frac13$ de su producto].

---

75 $(y-d)^2+x^2=r^2\to y=d\pm\sqrt{r^2-x^2}\to$

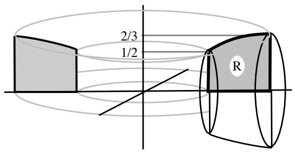
Volumen $=\pi\int_{-r}^r\left[\left(d+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2-\left(d-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right]dx=\pi\int_{-r}^r4d\sqrt{r^2-x^2}\,dx$

$$=8\pi d\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx\underset{x=r\,\mathrm{sen}\,u}{=}8\pi dr^2\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2u\,du=4\pi dr^2\int_0^{\pi/2}[1-\cos2u]\,du=2\pi^2dr^2.$$



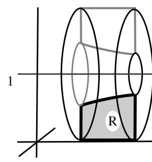
---

76 $y=\frac{x}{1+x}\leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$.



a_i, a_{ii}) $\int_1^2\frac{x}{1+x}dx=\frac12+\int_{1/2}^{2/3}\left(2-\frac{y}{1-y}\right)dy=1+\log\frac23$.

b_i) $\pi\int_1^2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2dx=\left[x-2\log(1+x)-\frac1{1+x}\right]_1^2=\pi\left(\frac76+2\log\frac23\right)$.



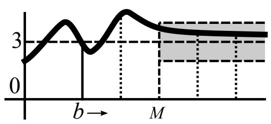
b_{ii}) $\frac{3\pi}{2}+\pi\int_{1/2}^{2/3}\left[4-\left(\frac{y}{1-y}\right)^2\right]dy=\pi\left(1+2\log\frac32\right)$. b_{iii}) $\pi\int_1^2\left[1-\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^2\right]dx=\frac{5\pi}{6}$.

---

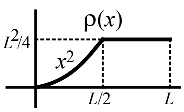
77 Si $f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}3$ parece que el valor medio $\frac1b\int_0^bf$ va a tender a 3. Lo probamos.

$\forall\varepsilon\ \exists M$ tal que si $x\ge M\Rightarrow3-\varepsilon<f(x)<3+\varepsilon\Rightarrow\int_0^M(3-\varepsilon)<\int_0^Mf<\int_0^M(3+\varepsilon)\Rightarrow$

$$\frac{\int_0^Mf+(3-\varepsilon)(b-M)}{b}\le\frac{\int_0^bf}{b}\le\frac{\int_0^Mf+(3+\varepsilon)(b-M)}{b}\Rightarrow\lim_{b\to\infty}\frac1b\int_0^bf=3.$$



---

78 

$\rho(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } 0\le x\le L/2\\ L^2/4 & \text{si } L/2\le x\le L\end{cases}$ $M=\int_0^L\rho=\left[\frac13x^3\right]_0^{L/2}+\frac{L^2}{4}\frac L2=\boxed{\frac{L^3}{6}}$, $\bar x=\frac{6}{L^3}\left[\int_0^{L/2}x^3\,dx+\frac{L^2}{4}\int_{L/2}^Lx\,dx\right]=\boxed{\frac{21L}{32}}$.

$I=\int_0^{L/2}x^4\,dx+\frac{L^2}{4}\int_{L/2}^Lx^2\,dx=\boxed{\frac{19L^5}{240}}$.

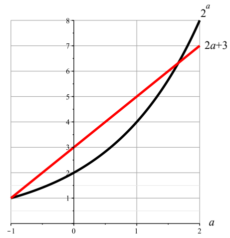
[a la derecha de $L/2$ porque ahí es más densa]

---

79 $\boxed{v(t)=t(1+t^2)^a}$. Posición en tiempo t: $x(t)=\int_0^tv(s)\,ds=\frac{1}{2(a+1)}\left[(1+t^2)^{a+1}-1\right]$, si $a\neq1$. $x(t)=\frac12\log(1+t^2)$, si $a=1$.

a) ¿$x(1)\ge1$? $\frac{2^{a+1}-1}{2(a+1)}\ge1\underset{a>-1}{\iff}2^{a+1}\ge2a+3$. Esto se da para un $a\in(1,2)$ [ordenador $\to\approx1.66$].

[Si $a=1$, es $\frac{\log2}{2}<1$ y si $a<1$ nunca es $2^{a+1}\le2a+3$.



b) ¿$\exists T$ con $x(T)\ge1$? Equivale a $[x(t)$ creciente$]$: ¿Es $\lim_{t\to\infty}x(t)>1$?

$$x(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}\infty,\ a\ge-1\\ -\frac{1}{2(a+1)},\ a<-1;\ -\frac{1}{2(a+1)}>1\Leftrightarrow2a+1>-1\end{cases}\Leftrightarrow a>-\frac32.$$

c) ¿$\exists T$ con $x(T)\ge K\ \forall K>0$? $\Leftrightarrow$ ¿Es $\lim_{t\to\infty}x(t)=\infty$? $\Leftrightarrow$ ¿Diverge $\int_0^\infty t(1+t^2)^a\,dt$? $\Leftrightarrow$ $a\ge-1$.