

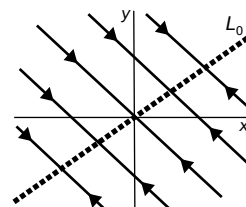
## 4.1 Ejemplos con puntos no elementales

Dibujemos mapas de fases para los que no sabemos clasificar sus puntos críticos (no elementales) y por ahora nos basaremos casi siempre en la expresión de sus órbitas y el campo  $\mathbf{v}$ .

Para empezar, estudiemos los mapas de fases de los **sistemas lineales**  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  con algún  $\lambda = 0$ . El determinante de la matriz  $\mathbf{A}$  será nulo y el origen no será aislado.

Hay inicialmente dos posibilidades, dependiendo de los autovalores de  $\mathbf{A}$ :

- i) que haya un  $\lambda_0 = 0$  y el otro  $\lambda_1 \neq 0$ , ii) que sea  $\lambda = 0$  doble.
- i) La solución general es  $\mathbf{x} = c_0 \mathbf{v}_0 + c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ . La recta  $L_0$  que contiene a  $\mathbf{v}_0$  está formada por puntos críticos [si  $c_1 = 0$  hay solución constante  $\forall c_0$ ]. Las otras órbitas, paralelas a  $\mathbf{v}_1$ , apuntan hacia los puntos críticos si  $\lambda_1 < 0$  (estabilidad no asintótica) o en sentido contrario (inestabilidad) si  $\lambda_1 > 0$ .



ii<sub>a</sub>) Si  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , todos los puntos del plano son críticos (y toda solución es constante).



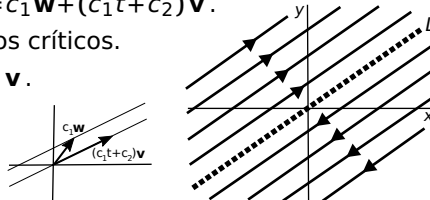
ii<sub>b</sub>) Si  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  sólo hay un  $\mathbf{v}$  asociado a  $\lambda = 0$ . La solución es  $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{w} + (c_1 t + c_2) \mathbf{v}$ .

$c_1 = 0$  nos da la recta  $L$  que contiene  $\mathbf{v}$ , formada por puntos críticos.

Para  $c_1 \neq 0$  y  $c_2$  dados aparece una órbita recta paralela a  $\mathbf{v}$ .

Se recorren en distinto sentido (según el signo de  $c_1$ ) a cada lado de la recta de puntos críticos.

[Las formas de Jordan respectivas son  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ].



Los dos siguientes ejemplos son de sistemas **exactos**.

**Ej 1.**  $\begin{cases} x' = x^2 - 2xy \\ y' = y^2 - 2xy \end{cases} = 0 \rightarrow x=0, x=2y \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  no elemental.  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

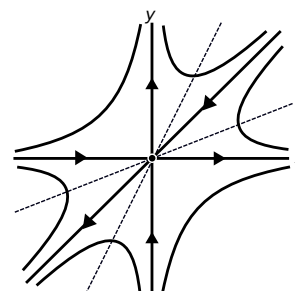
Es exacto y sus órbitas se hallan fácilmente:  $x^2 y - x y^2 = C$ .

En particular, para  $C=0$  aparecen las rectas  $y=0$ ,  $y=x$  y  $x=0$ .

Para orientarlas podemos llevarlas al sistema obteniendo en cada caso, respectivamente:  $x' = x^2$ ,  $x' = -x^2$  e  $y' = y^2$ .

También son fáciles de dibujar sus isoclinas  $\frac{dy}{dx} \Big|_{y=mx} = \frac{m^2 - 2m}{1 - 2m}$ .

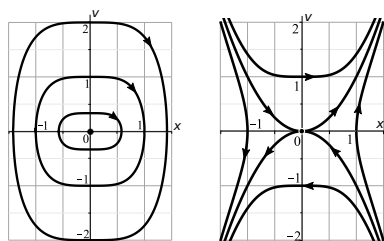
Además tenemos desde el principio que  $\mathbf{v}$  es horizontal si  $y=2x$  y vertical cuando  $x=2y$ .



En la demostración del carácter de los puntos críticos de sistemas exactos lo que en esencia se deducía era la imposibilidad de que hubiera atractores o repulsores (como nodos o focos). Pero no impedía que hubiera puntos como el anterior. Aquel argumento sí asegura que **nunca puede haber ciclos límite**.

En el caso de **ecuaciones exactas** hay un tipo de punto no elemental que no existía en 3.3.

**Ej 2.** a)  $x'' = -2x^3$ , b)  $x'' = 2x^3$ , c)  $x'' = \frac{3}{2}x^2$ . Para los tres  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  es no elemental:  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .



Los potenciales son  $V(x) = \frac{1}{2}x^4$ ,  $V(x) = -\frac{1}{2}x^4$ ,  $V(x) = -\frac{1}{2}x^3$ .

El mínimo del primero y el máximo del segundo nos aseguran el centro y punto silla respectivos, aunque ésta no es como las lineales pues las separatrices  $y = \pm x^2$  entran con la misma pendiente horizontal en el origen. [Observemos de paso que todas las soluciones (periódicas) de a) están definidas  $\forall t$  y que todas las no triviales de b) explotan por ser no acotadas y comportarse como  $x' = x^2$ ].

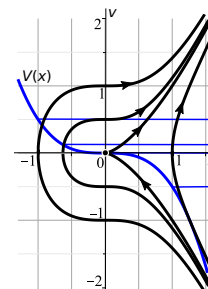
¿Cómo son las órbitas asociadas al punto de inflexión del potencial en c)?

La expresión de las órbitas  $v = \pm \sqrt{x^3 + C}$ , para  $C=0$ , nos da  $v = \pm x^{3/2}$ , que incluye el origen y también las dos órbitas que llegan y salen de él.

El dibujo del potencial (en azul) da el dominio de definición de las demás.

Este tipo (inestable) de puntos aparece asociado a los puntos de inflexión de  $V$  (aunque la cúspide puede perfectamente apuntar hacia la derecha).

[También aquí explotan todas las soluciones, por parecerse a  $x' = x^{3/2}$ ].



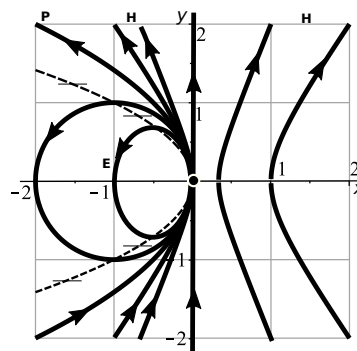
**Ej 3.**  $\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y^2 \end{cases}$  Único punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  no elemental con  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Órbitas calculables (Bernouilli):  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{y} \rightarrow y^2 = Cx^2 - 2x$ .

Son cónicas (que cortan  $y=0$  en  $x=0$  y  $x=\frac{2}{C}$ ). Si  $C < 0$  son elipses, si  $C = 0$  la parábola  $x = -\frac{1}{2}y^2$  y si  $C > 0$  hipérbolas.

$\mathbf{v}(0,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(x,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ .  $\mathbf{v}$  horizontal si  $x = -y^2$ .

Hay un nuevo tipo de órbitas (llamadas **elípticas**) que **salen y llegan al punto crítico**, que no se dan en los elementales.



Se demuestra que para un sistema analítico **un punto no elemental aislado es o un centro o un foco o bien hay en torno a él un número finito de sectores formados por órbitas parabólicas, hiperbólicas o elípticas**.

En puntos elementales (además de centros o focos), sólo puede haber sectores parabólicos (uno que rodea todos los nodos, estables o inestables) o los 4 hiperbólicos de un punto silla.

El ejemplo 3 muestra los tres tipos de sectores (uno elíptico a la izquierda, dos parabólicos comprendidos entre la parábola y el eje  $x=0$  y el hiperbólico de la derecha). En la página anterior hay ejemplos con 6 (el 1) o sólo 2 (el 2c) sectores hiperbólicos.

Un centro no elemental lo vimos en el ejemplo 2a ( $x'' = -2x^3$ ) y un foco no elemental es el ejemplo 3 de 3.6 ( $x'' + x' + 2x^3 = 0$ , el anterior con rozamiento, comprobado con funciones de Lyapunov).

Hagamos otro ejemplo (con sectores parabólicos y elípticos) que es homogéneo (los homogéneos serán importantes en análisis posteriores). Serán fáciles sus isoclinas y pueden tener órbitas rectas.

**Ej 4.**  $\begin{cases} x' = 3xy \\ y' = 4y^2 - 4x^2 \end{cases}$  Único punto (no elemental):  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

[o] es resoluble:  $\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - 4x^2}{3xy}$  (homogénea o Bernouilli)

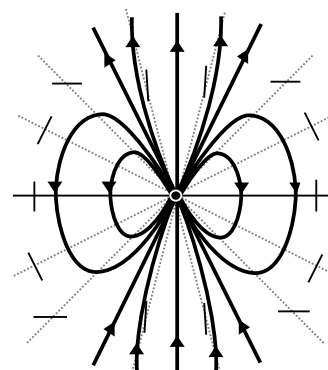
$\rightarrow y^2 = 4x^2 + Cx^{8/3}$  (si  $C=0$  se tienen las rectas  $y = \pm 2x$ ).

Mejor que dibujar estas curvas, usamos las isoclinas, rectas  $y = mx$ . La pendiente de las órbitas sobre ellas es:

$K = \frac{4m^2 - 4}{3m} \rightarrow$  para  $m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4$  es  $K = \infty, \pm 2, 0, \pm 2, \pm 5$ .

Buscando directamente las órbitas rectas:  $\frac{4m^2 - 4}{3m} = m \rightarrow m = \pm 2$ .

Podemos orientarlas viendo que  $\mathbf{v}(0,y)$  apunta hacia arriba (nos da además las órbitas verticales no recogidas en la solución general).



Otra posibilidad de orientar las órbitas rectas (que será como procederemos en otras situaciones más generales) es llevarlas al sistema (como hicimos en el ejemplo 1):

$y = 2x \rightarrow x' = 6x^2$  (hacia la derecha),  $y = -2x \rightarrow x' = -6x^2$  (izquierda),  $x = 0 \rightarrow y' = 4y^2$  (arriba).

Alguna conclusión sobre las soluciones:  $\mathbf{0}$  es inestable (viendo el dibujo). La solución con  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$  (de órbita  $y = 2x$ ) no está definida  $\forall t > 0$ , pues para ella se obtienen  $x' = 6x^2$ ,  $y' = 3y^2$ . La que cumple  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$  (no calculable) sí lo está por ser acotada, pero ¿será estable? (su diferencia con las soluciones cercanas tiende a  $\mathbf{0}$  si  $t \rightarrow \infty$ , pero esto no basta en sistemas).

Acabamos la sección con una ecuación no lineal con infinitos puntos críticos no aislados.

**Ej 5.**  $x'' = 2xx'$   $\begin{cases} x' = v \\ y' = 2xv \end{cases} \cdot \frac{dv}{dx} = 2x \rightarrow v = x^2 + C = \frac{dx}{dt}$ .

El eje  $x$  está lleno de puntos críticos no aislados (y no elementales):

$\mathbf{M}(a,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = 2a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$ .

Parte de las parábolas están formadas por varias órbitas, recorridas como todas las ecuaciones. Los puntos críticos con  $a \geq 0$  son inestables. Los de  $a < 0$  son estables (no asintóticamente). Coherente con los  $\lambda$  hallados.

Las soluciones de  $v < 0$  (acotadas) están seguro definidas para todo  $t$ .

No lo están las de  $v > 0$ . Podemos comparar  $x' = x^2 + C$  o incluso resolverla. Además de las  $x = K$ :

$t + K = \int \frac{dx}{x^2 + C} \rightarrow x = \tan(\sqrt{C}t + K)$ , si  $C > 0$ ;  $x = \frac{1}{K+t}$ , si  $C = 0$ ;  $x = \sqrt{-C} \frac{1 - Ke^{2\sqrt{-C}t}}{1 + Ke^{2\sqrt{-C}t}}$ , si  $C < 0$ .

