

4.2 Puntos críticos con un único autovalor cero

Consideremos el sistema analítico:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) = ax + by + A^p(x, y) + A^{p+1}(x, y) + \dots \\ y' = g(x, y) = cx + dy + B^p(x, y) + B^{p+1}(x, y) + \dots \end{cases}, \quad p \geq 2$$

con A^k, B^k polinomios homogéneos y sea la ecuación de sus órbitas [o] $f(x, y) \frac{dy}{dx} = g(x, y)$.

Suponemos que el origen $\mathbf{0}$ es un punto crítico aislado, que los autovalores de la matriz de la aproximación lineal \mathbf{M} son $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 \neq 0$ (es decir, es $ab = cd$ y $\lambda_1 = a + d \neq 0$) y llamamos \mathbf{v}_0 y \mathbf{v}_1 a los vectores propios asociados respectivos.

[Si hubiese una curva de puntos críticos $p(x, y) = 0$, con p factor común de f y g , dividiendo los segundos miembros por p quedaría un sistema más sencillo con las mismas órbitas, salvo la desaparición de puntos críticos y el posible cambio de sentido de parte de las éllas].

La estructura local de estos puntos es fácil de precisar. Para determinarla basta, como en los puntos elementales con autovalores reales, encontrar las curvas que llegan a $\mathbf{0}$ con pendiente definida y fijar el flujo local sobre ellas. Simplemente es algo más complicado que en los elementales estudiar las curvas asociadas al autovalor 0 (variedades **centro**).

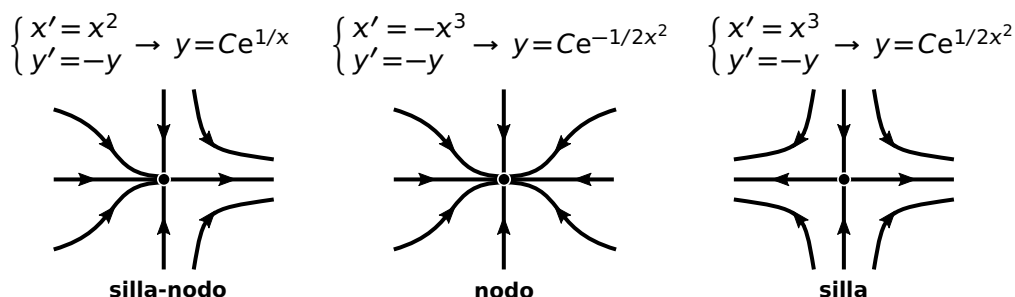
En este teorema presentamos una forma más directa que la habitual de analizar estos puntos (sin suponer, a diferencia de otros resultados, que \mathbf{M} esté en forma de Jordan):

Teor 1.

- i) Existe una única variedad (**variedad estable o inestable**) que llega al origen siendo tangente a \mathbf{v}_1 . El sentido del flujo local sobre ella lo da el signo de λ_1 .
- ii) Existe al menos una variedad de clase C^∞ asociada a λ_0 (**variedad centro**) que llega al origen siendo tangente a \mathbf{v}_0 . El flujo local sobre esta variedad depende de los términos no lineales de [S] y se puede precisar calculando algún término de su desarrollo en serie de Taylor a partir de la ecuación [o].
- iii) La estructura de las órbitas de [S] en un entorno del origen queda determinada por λ_1 y el flujo sobre la variedad centro, pudiendo tratarse de un nodo (estable o inestable), de un punto silla o de un silla-nodo.

[La variedad centro puede no ser única. De hecho, salvo en el caso de la silla, hay infinitas].

Ejemplos de las tres posibles configuraciones citadas en el teorema los dan los tres sencillos sistemas siguientes, para los que la expresión de sus órbitas es fácilmente calculable:



Como se observa, en los dos primeros casos hay infinitas variedades centro, todas ellas C^∞ , y todas tienen la misma serie de Taylor, aunque, salvo la $y=0$, ninguna sea analítica. Para sistemas del tipo [S], en general, no dispondremos de una expresión explícita de la variedad centro, pero siempre podremos (por ser la variedad infinitamente derivable) calcular algún término de su desarrollo en serie de potencias (que podría converger sólo para $x=0$). Esto bastará para determinar el flujo sobre ella y la estructura local de las órbitas.

Observemos también que las curvas asociadas a $\lambda \neq 0$ no siempre admiten esos desarrollos. Por ejemplo, las órbitas del nodo elemental $x' = x, y' = 2y - x^2$ son $y = (C - \log|x|)x^2$ y todas las que pasan por el origen siendo tangentes al eje x son sólo C^1 en un entorno de $x=0$. Pero esto no impide el análisis, pues el flujo sobre ellas viene dado por el signo del λ .

Las afirmaciones hechas se deducen de la bibliografía sobre variedades centro o de resultados más antiguos en los que se analizan directamente por otros métodos estos puntos.

Ilustremos el método propuesto de análisis de puntos con un $\lambda=0$ con unos ejemplos:

Ej 1. $\begin{cases} x' = x - y - xy - x^3 \\ y' = -x + y + 4y^2 \end{cases}$ En este caso $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\lambda_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hay variedad inestable tangente a \mathbf{v}_1 . Para ver el flujo sobre la variedad centro (tangente a \mathbf{v}_0) llevamos soluciones de la forma $y = x + c_2 x^2 + \dots$ a la ecuación diferencial de las órbitas:

$$[x - y - xy - x^3] \frac{dy}{dx} = -x + y + 4y^2 \rightarrow$$

$$[x - x - c_2 x^2 - \dots - x^2 - \dots - x^3][1 + 2c_2 x + \dots] = -x + x + c_2 x^2 + \dots + 4x^2 + \dots$$

$$\rightarrow x^2: -c_2 - 1 = c_2 + 4, c_2 = -\frac{5}{2}. \text{ La variedad centro es: } y = x - \frac{5}{2}x^2 + O(x^3).$$

Llevando esta expresión a la primera ecuación del sistema obtenemos:

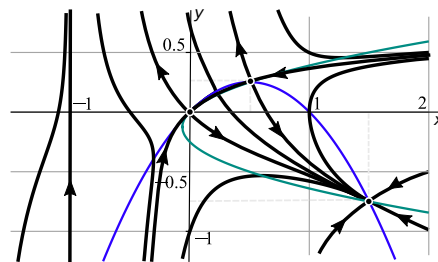
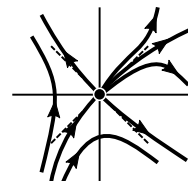
$$x' = x - x + \frac{5}{2}x^2 - x^2 + O(x^3) = \frac{3}{2}x^2 + O(x^3)$$

con lo que la variedad centro se recorre hacia la derecha a ambos lados del origen y es un silla-nodo.

Hagamos un dibujo global del mapa. Son calculables todos los puntos críticos: los cortes de las curvas con pendiente vertical $x = y + 4y^2$ y horizontal $(x+1)(y-x+x^2) = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-y-3x^2 & -x-1 \\ -1 & 1+8y \end{pmatrix} \begin{matrix} (1/2, 1/4) \nearrow \lambda = \frac{1}{2}[3 \pm \sqrt{15}] \text{ silla} \\ (3/2, -3/4) \searrow \lambda = -5 \pm \sqrt{5/2} \text{ nodo E} \end{matrix}$$

$x = -1$ es una órbita vertical (recorrida en tiempo finito).



Calculemos en general para el sistema [S]. Sea $d \neq 0$ (si $d=0$ cambiaríamos los papeles de x e y). Como el \mathbf{v}_0 asociado a $\lambda_0=0$ es $(1, -\frac{c}{d})$ probamos series del tipo $y = -\frac{c}{d}x + c_p x^p + \dots \rightarrow$

$$[bc_p x^p + A^p(x, -\frac{c}{d}x + \dots) + \dots][-\frac{c}{d}x + \dots] = dc_p x^p B^p(x, -\frac{c}{d}x + \dots) + \dots \rightarrow$$

(1) $y = h(x) = -\frac{c}{d}x + \frac{1}{d(d+a)}[cA^p(1, -\frac{c}{d}) + dB^p(1, -\frac{c}{d})]x^p + O(x^{p+1}) \rightarrow$

(2) $x' = \frac{1}{d+a}[dA^p(1, -\frac{c}{d}) - bB^p(1, -\frac{c}{d})]x^p + O(x^{p+1})$

y, por tanto, el corchete, si no se anula, basta para determinar la estructura del origen.

[En el ejemplo anterior: $y = -\frac{-1}{1}x + \frac{1}{1 \cdot 2}[(-1)(-1) + 4]x^2 + \dots$, $x' = \frac{1}{1+1}[-1 - (-4)]x^2 + \dots$].

Ej 2. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - 2x^3 \end{cases}$ Es un sistema tratado en 3.6, donde vimos con funciones de Lyapunov que era asintóticamente estable.

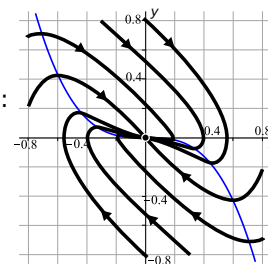
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \lambda_1 = -1, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \lambda_0 = 0, \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La variedad centro es de la forma $y = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$ que sustituimos en [0]:

$$[c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots][2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots] = -c_2 x^2 - c_3 x^3 - c_4 x^4 + \dots - 2x^3 \rightarrow$$

$$x^2: c_2 = 0, x^3: c_3 = -2, \dots \rightarrow y = -2x^3 + \dots \rightarrow x' = -2x^3 + \dots$$

La variedad centro se recorre hacia el origen y este punto es un nodo estable [y, por tanto, el origen es asintóticamente estable y no es preciso Lyapunov].



Ej 3. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -2y + ax^2 + y^2 \end{cases}$ Clasifiquemos el origen del sistema (que puede provenir de una ecuación). $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\lambda_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow h(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$$[c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots][2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots] = (a - 2c_2)x^2 - 2c_3 x^3 - 2c_4 x^4 + c_2^2 x^4 + \dots \rightarrow y = \frac{a}{2}x^2 + \dots \rightarrow$$

$$x' = \frac{a}{2}x^2 + \dots \text{ (basta para orientar la variedad centro).}$$

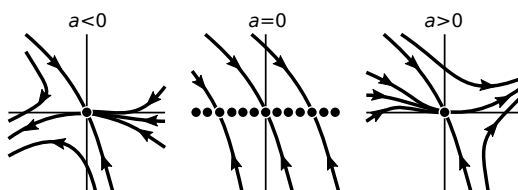
[Más términos serían: $y = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2}{4}x^3 + \frac{2a^2 + 5a^3}{16}x^3 + \dots$].

[Podemos dar algún término de la variedad estable:

$$y = -2x - c_2 x^2 + \dots \rightarrow y = -2x - (1 + \frac{a}{4})x^2 + \dots$$

Si $a=0$ todo el eje x está formado por puntos críticos

(todos con $\lambda=0, -2$) y sus órbitas ($y' = y - 2$) se pintan y calculan fácilmente ($y = 2 + Ce^x$).



Para determinar el flujo en la variedad centro, en ocasiones necesitaremos más de un término de su desarrollo (y en otras nos bastará con el término lineal que se deduce de \mathbf{v}_0) como en:

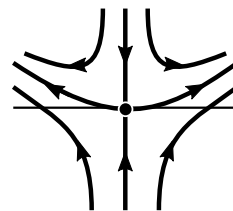
Ej 4. $\begin{cases} x' = xy - x^3 + xy^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \quad \lambda_1 = -1, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_0 = 0, \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{probamos } y = c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$

$$[c_2x^3 + c_3x^4 + c_4x^5 + \dots - x^3 + c_2^2x^5 + \dots][2c_2x + 3c_3x^2 + \dots] = -c_2x^2 - c_3x^3 - \dots + x^2 \rightarrow c_2 = 1.$$

Este término no basta, pues de $y = x^2 + O(x^3)$ sólo deducimos $x' = O(x^4)$.

Necesitamos calcular también $c_3 = 0, c_4 = 0$ (y ningún término más).

Ahora sí: $y = x^2 + O(x^5) \rightarrow x' = x^5 + O(x^6)$, y el origen es un punto silla.



En muchos libros se supone que, tras cambios de variable lineales, \mathbf{M} ya está en forma de Jordan (y esto es lo que nos sucede en los ejemplos 2, 3 y 4):

$$[\text{Sd}] \begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = dy + Q(x, y) \end{cases}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad d \neq 0, \quad P, Q \text{ de orden } > 1.$$

Se demuestra que si $P, Q \in C^k$ en un entorno U del origen existe una variedad centro local $y = h(x)$ de clase C^k con $h(0) = h'(0) = 0$. Además, si $d < 0$, la estabilidad de $\mathbf{0}$ es la misma que la de la solución $x = 0$ de la ecuación escalar $x' = P(x, h(x))$ y se tiene que dentro de U todas las soluciones se acercan exponencialmente a las soluciones sobre la variedad centro. Si $d > 0$, basta cambiar el sentido de las órbitas. El teorema 1 es un modo de presentar estos resultados más útil para el cálculo (es innecesario llevar \mathbf{M} a forma de Jordan).

Veamos cómo se simplifican las cosas para [Sd]. Si todos los $b_{k0} = 0$ la variedad centro es $y = 0$ (sobre ese eje es $y' = 0$). En caso contrario, sea b_{N0} el primer b_{k0} que no se anula. Es fácil comprobar que $c_2 = \dots = c_{N-1} = 0$ y $dc_N + b_N = 0$, y por tanto:

$$\text{La variedad centro es de la forma } y = -\frac{b_{N0}}{d}x^N + O(x^{N+1}), \quad N \geq p.$$

[En general, no son los términos no lineales de menor orden los que más influyen en la forma de la variedad centro o en la estructura del origen de [Sd] (por ejemplo, influyen más que b_{02} el b_{30} en la forma y el a_{30} en la estructura). Esto no contradice (1) y (2). De allí:

$$h(x) = -\frac{1}{d}b_{p0}x^p + O(x^{p+1}) = O(x^{p+1}) \text{ si } N > p; \quad x' = a_{p0}x^p + O(x^{p+1})].$$

Los sistemas con $a = b = c = 0$ permiten determinar la estructura con cálculos más sencillos [**método de Lyapunov-Schmidt**]. Sea $y = L(x)$ la función analítica con $L(0) = L'(0) = 0$ definida implícitamente en un entorno de 0 por la ecuación $g(x, y) = dy + A^p(x, y) + \dots = 0$ (el teorema de la función implícita asegura que existe). Se prueba que el flujo local sobre la variedad centro coincide con el de la ecuación obtenida al sustituir y por $L(x)$ en la primera ecuación: $x' = P(x, L(x))$. También aquí bastan un número finito de términos del desarrollo de $L(x)$ para analizar cada ejemplo. El primer término del desarrollo es, de nuevo, $(-b_{N0}/d)x^N$, aunque $L(x)$ y $h(x)$ diferirán en términos posteriores. La ecuación para x' que se obtiene al sustituir y por $h(x)$ o $L(x)$ no será $x' = 0$, pues entonces $y = h(x)$ e $y = L(x)$ serían curvas de puntos críticos y el origen no sería aislado.

Calculemos, utilizando ambos métodos, algún término más de los desarrollos en un sistema de la forma [Sd], en el caso de que P y Q comiencen por términos de orden dos:

$$h(x) = c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \rightarrow$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{b_{20}}{d}x^2 + \left[\frac{(b_{11} - 2a_{20})b_{20}}{d^2} - \frac{b_{30}}{d} \right] x^3 \\ &\quad + \left[\frac{b_{20}(2b_{20}a_{11} + 5a_{20}b_{11} - 6a_{20}^2 - b_{20}b_{02} - b_{11}^2)}{d^3} + \frac{b_{20}(b_{21} - 2a_{30}) + b_{30}(b_{11} - 3a_{20}) - b_{40}}{d^2} - \frac{b_{40}}{d} \right] x^4 + O(x^5) \\ \rightarrow x' &= a_{20}x^2 + \left[a_{30} - \frac{a_{11}b_{20}}{d} \right] x^3 + \left[a_{40} - \frac{a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30}}{d} + \frac{b_{20}(a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11} - 2a_{20}a_{11})}{d^2} \right] x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

Nos van proporcionando la misma estabilidad los primeros términos de $L(x)$ que son (basta hacer todos los $a_{ij} = 0$):

$$\begin{aligned} L(x) &= -\frac{b_{20}}{d}x^2 + \left[\frac{b_{11}b_{20}}{d^2} - \frac{b_{30}}{d} \right] x^3 + \left[-\frac{b_{20}(b_{20}b_{02} + b_{11}^2)}{d^3} + \frac{b_{20}b_{21} + b_{30}b_{11}}{d^2} - \frac{b_{40}}{d} \right] x^4 + O(x^5) \\ \rightarrow x' &= a_{20}x^2 + \left[a_{30} - \frac{a_{11}b_{20}}{d} \right] x^3 + \left[a_{40} - \frac{a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30}}{d} + \frac{b_{20}(a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11})}{d^2} \right] x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

[Con Lyapunov-Schmidt las cuentas hubieran sido mucho más cortas en el ejemplo 4, cuya $L(x)$ es inmediata: $g = 0 \rightarrow y = L(x) = x^2 \rightarrow x' = x^5$].