

4.3 Análisis de puntos ‘poco degenerados’

Suponemos que el origen $\mathbf{0}$ es punto crítico aislado del sistema analítico:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) = A^n(x, y) + A^p(x, y) + \dots \\ y' = g(x, y) = B^n(x, y) + B^p(x, y) + \dots \end{cases}, \quad p > n \geq 1,$$

con A^k y B^k polinomios homogéneos de grado k y no siendo A^n o B^n ambos nulos.

Para tratar [S] de forma similar al caso lineal introducimos unas notaciones inspiradas en él. Su ‘aproximación homogénea’ será el sistema con sólo los términos de menor orden:

$$[H] \begin{cases} x' = A^n(x, y) \\ y' = B^n(x, y) \end{cases}$$

Serán ‘**poco degenerados**’ los puntos para los que bastaría un único cambio de variable para descomponer el origen en varios puntos elementales o con un autovalor cero. Aunque empezaremos con los cambios, los teoremas que veremos nos darán un algoritmo sencillo para el análisis de $\mathbf{0}$: bastará hallar las raíces de un polinomio P de grado $n+1$ dado por [H], fijar el signo de P entre ellas y hallar los valores de otro polinomio en esas raíces y , en el peor de los casos, calcular algún término del desarrollo de una ‘variedad centro’.

Utilizando la expresión en polares

Comencemos con el cambio a polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $(r, \theta) \in [0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Denotaremos para abreviar en lo que sigue $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, $A^n = A$ y $B^n = B$.

El sistema [S] se convierte en:

$$\begin{cases} r' = r^n [cA(c, s) + sB(c, s)] + \dots \\ \theta' = r^{n-1} [cB(c, s) - sA(c, s)] + r^{p-n} [cB^p(c, s) - sA^p(c, s)] + \dots \end{cases}$$

Las órbitas de este sistema en $r > 0$ son las mismas que las de

$$[P] \begin{cases} r' = r [cA(c, s) + sB(c, s)] + \dots \equiv rR(\theta) + \dots \\ \theta' = [cB(c, s) - sA(c, s)] + r^{p-n} [cB^p(c, s) - sA^p(c, s)] + \dots \equiv \Theta(\theta) + r^{n-p}\Theta^p(\theta) + \dots \end{cases}$$

Supondremos en lo que sigue que $\Theta(\theta) \neq 0$.

Los puntos críticos de [P] sobre $r=0$ vienen dados por el polinomio homogéneo de grado $n+1$ en $\cos \theta$ y $\sin \theta$:

$$(1) \quad cB(c, s) - sA(c, s) = \Theta(\theta) = 0.$$

Podemos escribir (1) en la forma:

$$(2) \quad B(1, \tan \theta) - \tan \theta A(1, \tan \theta) = 0$$

[teniendo en cuenta que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$ son raíces de (1) no aparecerán entre las de (2)].

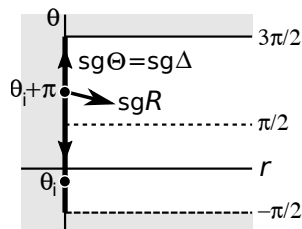
Esta ecuación tiene a lo más $2n+2$ raíces reales θ_i agrupadas por parejas, ya que si θ_i es raíz también lo es $\theta_i + \pi$. Llamaremos $\theta_1, \dots, \theta_q$ (con $q \leq n+1$) a las raíces de (1) en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Observemos que, por ser el origen un punto crítico aislado, no existen más puntos en el entorno del eje $r=0$ que los dados por (1). Como ese eje es órbita de [P], las órbitas de $r > 0$ que lleguen a él sólo pueden hacerlo a los puntos $(0, \theta_i)$. Cada órbita que llegue a uno de esos puntos nos dará una órbita de [S] que llega al origen con pendiente $\tan \theta_i$ y esas serán las únicas posibles pendientes de las órbitas de [S] que lleguen a $\mathbf{0}$. En el caso de que no existiese ninguna raíz real de (1), ninguna órbita podría acercarse a $\mathbf{0}$ con pendiente definida y entonces $\mathbf{0}$ se trataría de un centro o de un foco estable o inestable.

De forma equivalente, escribiendo (1) en cartesianas obtenemos la ecuación más sencilla

$$(3) \quad \Delta(x, y) = xB(x, y) - yA(x, y) = 0$$

que define a lo más $n+1$ rectas que pasan por el origen. Con todo lo anterior está claro que:

Si una órbita llega a $\mathbf{0}$ lo hará siendo tangente a alguna de las rectas definidas por la ecuación (3).



Si cada $(0, \theta_i)$ fuese elemental o con sólo un autovalor 0 (un 'punto simple'), las órbitas de [P] cerca del eje $r = 0$, y por tanto la estructura del origen, quedaría perfectamente determinada. La matriz de la aproximación lineal de [P] en cada uno de esos puntos es:

$$\mathbf{M}(\theta_i) = \begin{pmatrix} R(\theta_i) & 0 \\ E(\theta_i) & \frac{d}{d\theta}\Theta(\theta_i) \end{pmatrix} \text{ con } E(\theta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n+1 \\ \Theta^{n-1}(\theta_i) & \text{si } p = n+1 \end{cases}$$

Sus autovalores son $\Lambda_i = R(\theta_i)$ y $M_i = \Theta'(\theta_i)$, asociado éste a un vector propio vertical. Como $r=0$ es órbita, si $(0, \theta_i)$ es simple sólo puede ser nodo, silla o silla-nodo. Los autovalores de $\mathbf{M}(\theta_i + \pi)$ son los mismos Λ_i y M_i si n es impar o $-\Lambda_i$ y $-M_i$ si n es par. Así pues:

La estructura local de 0 queda determinada si $\Lambda_i^2 + M_i^2 \neq 0$ para todo $i=1, \dots, q$.

Veamos como precisar esta estructura con el mínimo de cálculos. Si θ_i es raíz simple de $\Theta(\theta)=0$ entonces será $\Theta'(\theta_i) \neq 0$ y $(0, \theta_i)$ será un punto simple. Si ninguna raíz es múltiple, a cada $(0, \theta_i)$ llegará una variedad no vertical (al menos). El flujo sobre esta variedad está determinado por $R(\theta_i)$ si es no nulo. Si $R(\theta_i) = 0$ mejor determinaremos el flujo sobre la variedad centro volviendo al sistema [S] y probando la serie adecuada (la variedad seguirá siendo C^∞ en cartesianas). Como $\theta' = \Theta(\theta)$ en $r=0$, para analizar el flujo en la variedad vertical más rápido que calcular los M_i será fijar el signo de Θ en $[0, 2\pi]$ [es decir, el signo de $\Delta(x, y)$]. Para ello se puede calcular Θ en algún θ que no sea raíz de (1) e ir luego orientando alternativamente los segmentos entre puntos críticos.

Si θ_i es raíz de multiplicidad k y $\Lambda_i = R(\theta_i) \neq 0$ (si es cero se complica mucho) la variedad no centro está ya orientada con Λ_i . El flujo en las cercanías de $(0, \theta_i)$ sobre $r=0$ (variedad centro) se determinará de forma análoga a la anterior (sin hallar M_i), teniendo en cuenta para la orientación del eje por encima y por debajo del punto la paridad de k .

Resumamos los cálculos anteriores en un teorema:

Sean $\Theta(\theta) = cB(c, s) - sA(c, s)$ y $R(\theta) = cA(c, s) + sB(c, s)$.
 Suponemos $\Theta \neq 0$ y que $\Theta(\theta)=0$ tiene $q \neq 0$ ceros reales $\theta_1, \dots, \theta_q$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
 Si todos ellos son simples o si para los θ_i múltiples es $R(\theta_i) \neq 0$, existe para cada $i=1, \dots, q$ al menos una variedad de [S] que llega a **0** con pendiente $\tan \theta_i$.
Teor 1. El flujo local sobre cada una lo da el signo de $R(\theta_i)$ si no es nulo o se puede precisar calculando algún término del desarrollo de la variedad si es $R(\theta_i)=0$.
 Estos flujos y el signo de $\Theta(\theta)$ en $[0, 2\pi]$ determinan la estructura local de **0**.

En la práctica conviene ir esquematizando la información obtenida sobre una circunferencia (el eje $r = 0$, identificando $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$) en la que habremos situado tantas parejas de puntos críticos asociados a cada raíz de (1) como indique su multiplicidad.

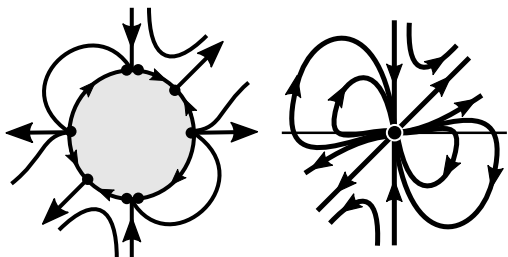
Ej 1. $\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$ Con las notaciones vistas se tiene:
 $cB - sA = 2c^2s(c-s) \rightarrow \theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ doble
 $cA + sB = 2c^3s + c^2s^2 - s^4 \rightarrow \Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = \frac{1}{2}, \Lambda_3 = -1$

Las tres θ_i están asociadas a puntos simples. Como para $(0, \pi/4)$ es $\Theta(\theta) > 0$, sin más que tener en cuenta la paridad de la multiplicidad de las θ_i se obtiene que la orientación de la circunferencia entre puntos críticos es la del dibujo. Falta sólo por orientar la variedad centro correspondiente a θ_1 , para lo que necesitamos conocer algún término de su desarrollo.

Probando $y = c_2x^2 + \dots$ se tiene que $[2c_2x^4 + O(x^5)][2c_2x + O(x^2)] = 2c_2x^4 + 2c_3x^5 - x^5 + O(x^6)$
 $\rightarrow c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{2}$, es decir, $y = \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)$.

[En 4.7 daremos ideas para hallar más rápidamente términos de desarrollos de variedades horizontales o verticales utilizando la poligonal de Newton].

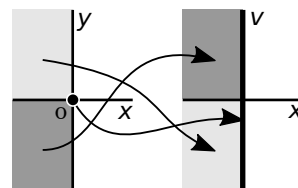
Por tanto, sobre la variedad centro es $x' = x^5 + O(x^6)$ y completamos el dibujo local del origen (único punto crítico del sistema), pues las demás órbitas cerca de $r=0$ quedan determinadas (tal vez pudiera aparecer algún sector parabólico entre los elípticos e hiperbólicos).



Un dibujo del mapa de fases de 1 hecho a partir de Maple aparece en la portada de este libro.

Usando el blow-up: $x=x, y=xv$

Lleguemos con este cambio a resultados equivalentes a los de las polares. El cambio 'estira' verticalmente $(x,y)=(0,0)$ y lo convierte en todo el eje v , deja el eje x invariante y lleva los cuadrantes 1, 2, 3, 4 del plano xy a los cuadrantes 1, 3, 2, 4 del xv .



Haciendo $x=x, y=xv$ ($xv'=y'-vx'$), [S] se convierte en:

$$\begin{cases} x' = x^n A(1, v) + x^p A^p(1, v) + \dots \\ v' = x^{n-1} [B(1, v) - vA(1, v)] + x^{p-1} [B^p(1, v) - vA^p(1, v)] + \dots \end{cases}$$

para el que $x=0$ es una recta de puntos críticos. Sus órbitas para $x < 0$ y $x > 0$ son las de:

$$[B] \begin{cases} x' = xA(1, v) + \dots \\ v' = [B(1, v) - vA(1, v)] + x^{p-n} [B^p(1, v) - vA^p(1, v)] + \dots \end{cases}$$

aunque su orientación en $x < 0$ es la opuesta si n es par. Los puntos críticos de [B] sobre el eje $x=0$ (formado por órbitas) se obtienen resolviendo

$$(4) \quad P_{n+1}(v) = B(1, v) - vA(1, v) = 0$$

ecuación con $n+1$ raíces reales a lo más. Suponemos, como con las polares, que $B-vA \neq 0$ y que (4) posee q raíces v_1, \dots, v_q . La aproximación lineal en un punto crítico $(0, v_i)$ es

$$M(v_i) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ E & \frac{d}{dv}[B-vA]_{(1, v_i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ E_i & \mu_i \end{pmatrix}.$$

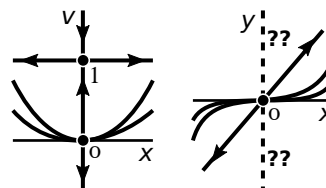
El autovalor μ_i informa aquí también de la multiplicidad de v_i como raíz de (4). Si ninguna es múltiple o si siéndolo el correspondiente $\lambda_i \neq 0$, quedan precisadas elementalmente las órbitas de [B] cerca de $x=0$ [calculando los $\lambda_i = A(1, v_i)$ y el flujo en las posibles variedades centro y analizando el signo de $B-vA$]. A cada variedad no vertical que llegue a un $(0, v_i)$ corresponderá una variedad de [S] que llegará a $\mathbf{0}$ siendo tangente a la recta $y = v_i x$. Su orientación en $x < 0$ coincidirá con la de aquella o se invertirá, según sea la paridad de n (para evitar estos líos con las paridades mejor orientaremos las variedades que vayamos hallando sustituyendo su expresión directamente en la primera ecuación del sistema [S]).

Llegamos otra vez a que las posibles direcciones de aproximación a $\mathbf{0}$ vienen dadas por (3), pues podemos escribir (4) como $0 = B(1, y/x) - \frac{y}{x} A(1, y/x) = \Delta(x, y)/x^{n+1}$, aunque como (4) no da las posibles variedades verticales de [S], mejor resolveremos (3), es decir, $\Delta=0$].

¿Queda determinada la estructura de $\mathbf{0}$ con el análisis de todos los $(0, v_i)$? Volvamos al ejemplo 1. La ecuación (4) es en este caso $2v-2v^2=0$ así que los v_i de [B] son $v_1=0$ y $v_2=1$, con $\lambda_1=A(1, 0)=0$, $\lambda_2=A(1, 1)=1$. Con el signo de $2v-2v^2$ orientamos el eje $x=0$. El flujo en la variedad centro podemos determinarlo calculando términos suyos como hicimos antes.

$$[O \text{ llevando el cambio hasta el final: } \begin{cases} x' = 2xv - xv^2 \\ v' = 2v - 2v^2 - x^2 \end{cases} \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), y = \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)].$$

El dibujo de xv queda precisado, así como las órbitas en el plano xy (se invierten los cuadrantes 2 y 3 pero no el sentido de las órbitas en ellos por ser n impar). Como ya dijimos, para fijar los sentidos, mejor que mirar los λ y paridades será llevar las expresiones de las variedades a la ecuación en x' : por ejemplo, la variedad no centro $y=x+o(x)$ se orienta mejor con $x'=x^3+o(x^3)$.



Aún no tenemos información sobre lo que ocurre cerca del eje y . Se puede evidentemente 'estirar' $\mathbf{0}$ en dirección horizontal haciendo $x=yu$. Obtenemos la ecuación equivalente a (4) que ahora es $A(u, 1) - uB(u, 1) = 0$ y que, como (4), está incluida en la más general (3). Si $u=0$ es raíz simple de esta ecuación [es decir, si $x=0$ lo es de (3)] o si, pese a no serlo, es $\lambda_\infty = B(0, 1) = b_{0n} \neq 0$ existirá variedad no horizontal que llega a $(u, y) = (0, 0)$ y así habrá variedades de [S] que llegarán a $\mathbf{0}$ con pendiente vertical [para fijar el flujo nos bastará b_{0n} o, en el peor de los casos, necesitaremos algún término de la variedad centro $x=h(y)$].

En el ejemplo 1, aunque $x=0$ es raíz doble de $\Delta(x, y) = 2x^2y(x-y)$, es $\lambda_\infty = B(0, 1) = -1$, y hay una variedad estable que llega al origen con pendiente vertical. Para determinar las órbitas cerca de ella no necesitamos un dibujo en el plano uy . En la práctica convendrá reflejar la información que nos dan los $\lambda_i = A(1, v_i)$ y el posible λ_∞ sobre la conocida circunferencia con puntos y orientada. De hecho no es difícil ver que los Λ y los λ tienen el mismo signo en $(-\pi/2, \pi/2]$, aunque los λ son más fáciles de calcular que los Λ .

Mejoramos el teorema 1 con los últimos cálculos basados en los blow-ups, dando el resultado que es más cómodo de utilizar en la práctica:

Teor 2.

Supongamos que $\Delta(x, y) = xB(x, y) - yA(x, y) \neq 0$ y que $\Delta(x, y) = 0$ posee $q \neq 0$ raíces reales $y = v_1x, \dots, y = v_qx$ [y tal vez $x = 0$].

Si para aquellas v_i que no sean simples se tiene que $A(1, v_i) \neq 0$ [$B(0, 1) \neq 0$], existen en [S] variedades $y = v_ix + o(x)$ [ó $x = o(y)$] que llegan a $\mathbf{0}$ con pendiente v_i [∞] y la estructura local de $\mathbf{0}$ queda totalmente determinada con el signo de $\Delta(x, y)$ y el flujo local sobre cada una de estas variedades.

Este flujo viene dado por $x' = A(x, v_ix)$ si $A(1, v_i) \neq 0$ [$y' = B(0, y)$ si $B(0, 1) \neq 0$] o se puede precisar hallando algún término más de las variedades si fuese cero.

[No queda $\mathbf{0}$ analizado si $\Delta \equiv 0$, o si existe $\lambda = 0$ asociado a v múltiple, o cuando no hay raíces reales (centro o foco, tema que se tratará en 4.4)].

Si el sistema es **homogéneo** (o sea, si es de la forma [H]), **las rectas $y = v_ix$ asociadas a las raíces reales de $\Delta = 0$ están formadas por órbitas del sistema** (invariantes, como en los lineales homogéneos: $n = 1$), ya que $y = vx$ es tangente al campo \mathbf{v} definido por el sistema [H] si y sólo si para algún λ :

$$[v\lambda] \begin{cases} A(1, v) = \lambda \\ B(1, v) = \lambda v \end{cases}$$

Por tanto, para cada v que satisfaga $[v\lambda]$ [es decir que cumpla $P_{n+1}(v) = 0$] hay una recta invariante dada por $(1, v)$. Y los λ que obtenemos de cada v dan la orientación sobre la recta. Como sucedía también en los lineales, a un $\lambda = 0$ está asociada una recta de puntos críticos (y el único punto aislado posible es el origen). Y de nuevo la estructura deducida del análisis local de [H] es válida para todo \mathbf{R}^2 .

Observemos más similitudes entre el último teorema y el modo de analizar sistemas lineales: el papel de los '**vectores propios**' lo cumplen aquí los v_i y el de los '**autovalores**', los $\lambda_i = A(1, v_i)$. En estos términos, el teorema 2 asegura que la estructura queda determinada si no existen 'vectores propios' múltiples asociados al 'autovalor' $\lambda_i = 0$.

Se tiene también que, como ocurría en los puntos elementales, **si hay λ_i reales y todos son distintos de cero el sistema no homogéneo [S] mantiene la estructura de la 'aproximación homogénea' [H]**, aunque las órbitas rectas dejarán de serlo en general.

La forma de proceder con los $\lambda_i = 0$ asociados a v simples es también enteramente análoga al trabajo con sistemas con un único autovalor cero de 4.2: debemos entonces calcular términos del desarrollo de una 'variedad centro'.

Para $n = 1$ se calculaban primero los autovalores y después los vectores propios asociados, pero se podría hacer a la inversa, como aquí, empezando con el cálculo de los v a partir de $[v\lambda]$:

$$\begin{cases} a + bv = \lambda \\ c + dv = \lambda v \end{cases} \rightarrow bv^2 + (a - d)v - c = 0, \quad v = \frac{d - a \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2b}, \quad \lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2} \quad (\text{si } b \neq 0).$$

[Aquí el caso $\Delta \equiv 0$ no plantea problemas: es el nodo estelar].

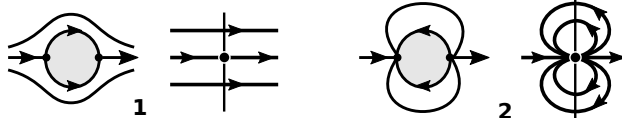
O podríamos llegar a la ecuación de autovalores eliminando directamente v de ese sistema:

$$v = \frac{\lambda - a}{b} \rightarrow c + \frac{d(\lambda - a)}{b} = \frac{\lambda(\lambda - a)}{b}, \quad \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Pero, a diferencia de los lineales, donde los autovalores contienen toda la información sobre la estructura del punto (y, muchas veces, del punto del sistema no lineal del que sea aproximación), **conociendo para $n > 1$ los λ (e incluso los v) la estructura de $\mathbf{0}$ no queda determinada: es necesario también el signo de $\Delta(x, y)$.**

Ej 2. Sean: [1] $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta(x, y) = -y(x^2 + y^2)$, [2] $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases} \rightarrow \Delta(x, y) = y(x^2 + y^2)$.

Los dos sistemas tienen el mismo único vector propio ($v = 0$) asociado al mismo autovalor ($\lambda = 1$). Pero sus mapas de fase son esencialmente diferentes:



Ahora discutimos un ejemplo más general (que incluye en particular el [2] del ejemplo anterior).

Ej 3. Analicemos las diferentes posibles estructuras del origen en un sistema de la forma:

$$[S] \begin{cases} x' = ax^2 - y^2 + A^p(x, y) + \dots \\ y' = 2xy + B^p(x, y) + \dots \end{cases} \text{ con } p > 2.$$

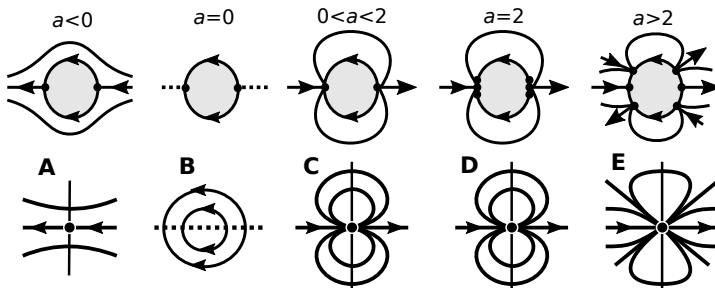
Tratemos primero la aproximación homogénea (para la que los retratos de fase serán globales):

$$[H] \begin{cases} x' = ax^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases} \rightarrow \Delta(x, y) = y[(2-a)x^2 + y^2].$$

Sus raíces son $y=0 \forall a$ (simple, salvo si $a=2$, en que es triple) e $y = \pm\sqrt{a-2}x$ para $a > 2$.

Los autovalores asociados son: $\lambda_0 = a, \lambda_{\pm} = 2$.

Existen, pues, 5 casos para [H], asociados a los retratos de fase de abajo.



¿Cuáles son localmente equivalentes a los de cualquier sistema de tipo [S]? o, en otras palabras, ¿en qué casos la estructura de [S] queda fijada por los términos homogéneos de menor orden? Viomos que para A, C, D, E la estructura del origen de [S] es la aproximación homogénea [H].

Pero en el caso B ($a=0$) los términos A^p y B^p influyen en el flujo de la variedad centro, habiendo (en el caso de que el origen sea aislado) cuatro posibilidades (determinadas por a_{p0} , si este coeficiente no es nulo) ejemplificadas por dos que vuelven a dar C y A, respectivamente:

$$\begin{cases} x' = -y^2 + x^4 \\ y' = 2xy \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -y^2 - x^4 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

y por otras dos que proporcionan retratos locales de fase de nuevo tipo (el segundo es el único asintóticamente estable de todos los que nos aparecen):

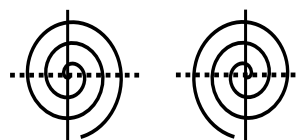


Si $a_{p0} = 0$ son necesarios los términos de orden mayor que p . Por ejemplo $\begin{cases} x' = -y^2 + x^6 \\ y' = 2xy + y^3 + x^4 \end{cases}$

exige calcular el término x^3 del desarrollo de variedad y el x^6 para precisar el flujo sobre ella.

Probando series se obtiene: $y = \frac{1}{4}x^3 + O(x^4) \rightarrow x' = \frac{3}{4}x^6 + O(x^7)$. Tiene, pues, la estructura C.

Por último, veamos dos nuevos casos que pueden derivar del B si hay una curva de puntos críticos $y = h(x)$. Dividiendo los segundos miembros del sistema por $y - h(x)$ obtendríamos uno del tipo $x' = -y + \dots, y' = 2x + \dots$ para el que la aproximación lineal es un centro, con lo que [S] podría tener también estas estructuras:



En el siguiente sistema (homogéneo) aparece un caso del teorema que no ha salido en los ejemplos: vector propio múltiple con autovalor no nulo.

Ej 4. $\begin{cases} x' = -x^3 + y^3 \\ y' = -x^2y - 2xy^2 \end{cases} \Delta(x, y) = x(-x^2y - 2xy^2) - y(-x^3 + y^3) = -y^2(2x^2 + y^2) \rightarrow y=0 \text{ doble.}$

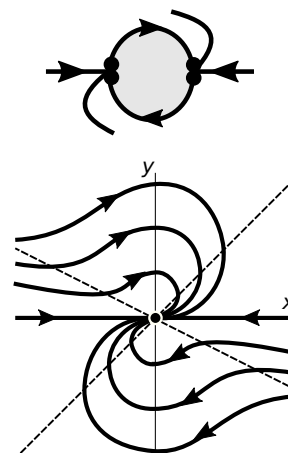
Pero está asociado a un autovalor no nulo: $A(x, 0) = -x^3$.

Orientando esta variedad horizontal y la circunferencia (es $\Delta \leq 0$), obtenemos el esquema de arriba y el mapa de fases de abajo. Es un nodo de una tangente no elemental (asintóticamente estable).

Como en toda ecuación homogénea, son fáciles sus isoclinas (sólo hemos dibujado las de pendiente horizontal y vertical) y se pueden hallar sus órbitas (salvo integrales no calculables):

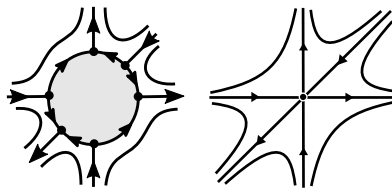
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + 2xy^2}{x^3 - y^3} \xrightarrow{z=y/x} xz' = \frac{z^4 + 2z^2}{1 - z^3} \rightarrow \frac{1}{z} + \ln(z^2 + 1) + \arctan z = C - \ln x. \quad (z \text{ no despejable})$$

La estructura del punto no se vería modificada si incluyésemos en el sistema cualquier término de orden mayor que 3.



Miremos ahora ejemplos de 4.1. Con las técnicas de esta sección podemos precisar la estructura del 1 y 4 de allí (sistemas homogéneos). Veamos el 1 (es análogo el 4):

Ej 5. $\begin{cases} x' = x^2 - 2xy \\ y' = y^2 - 2xy \end{cases} \Delta = 3xy(y-x), \lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1, \lambda_\infty = 1 \rightarrow v_i \text{ simples, } \Delta < 0 \text{ si } x > 0 \text{ y } 0 < y < x$



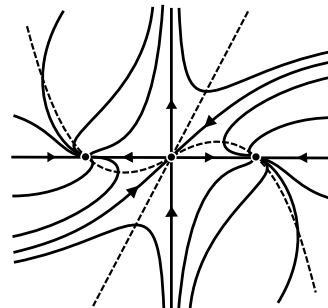
Y volvemos a encontrarnos con la estructura precisada en 4.1. Y ahora también sabemos que el origen no se vería afectado si añadimos cualquier término de orden mayor que 2, como en

$\begin{cases} x' = x^2 - 2xy - x^4 \\ y' = y^2 - 2xy \end{cases}$ Este sistema, además del origen, tiene 2 nodos de 1 tangente en $(\pm 1, 0)$ [estable e inestable], los dos con vector propio horizontal.

El origen mantiene los 6 sectores hiperbólicos, dos de las rectas del homogéneo se han conservado, pero la $y=x$ se ha deformado con el término $-x^4$, como muestran estos valores del campo \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} x^2 - x^4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(x, x) = -x^2 \begin{pmatrix} 1 + x^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además, \mathbf{v} horizontal también en $y=2x$ y vertical en $y = \frac{1}{2}(x - x^3)$.



Pero **no tenemos teoría** aún para analizar los 3 casos del ejemplo 2: $x'' = -2x^3$, $x'' = 2x^3$, $x'' = \frac{3}{2}x^2$. pues en los tres es $\Delta = -y^2$ y a este vector propio múltiple está asociado el autovalor $\lambda = A(1, 0) = 0$. [Lo mismo sucede para toda ecuación con matriz de aproximación lineal no nula $x'' = B^2(x, x') + \dots$].

Ni tampoco para el ejemplo 3: $\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y^2 \end{cases} \rightarrow \Delta = x^2, B(0, 1) = 0$. También doble con autovalor 0.

Aunque en 4.7 daremos ideas de cómo tratar estos puntos 'mas degenerados', hagamos unos primeros cálculos para acabar la sección. Un resultado probado hace cuarenta años asegura que cualquier punto degenerado se acaba convirtiendo en puntos simples haciendo un número suficiente de blow-ups.

En la silla de 2b, como han precisado nuestros teoremas, con un blow-up no se resuelve el problema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x^3 \end{cases} \xrightarrow{x=x, y=xv} \begin{cases} x' = xv \\ xv' + x'v = xv' + xv^2 = 2x^3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = xv \\ v' = 2x^2 - v^2 \end{cases} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ no elemental.}$$

[Sí sabríamos analizar el último sistema con el teorema 2: $\Delta = 2x(x-v)(x+v)$, los tres simples].

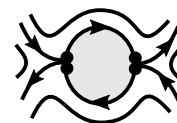
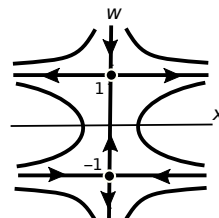
Para llegar a puntos elementales habría que realizar otro blow-up en el mismo sentido: $x=x, v=xw$. O, en el sistema inicial, directamente $x=x, y=x^2w$. Hacemos esto último:

$$x=x, y=x^2w \xrightarrow{\quad} \begin{cases} x' = x^2w \\ x^2w' + 2xx'w = x^2w' + 2x^3w^2 = 2x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = xw \\ w' = 2 - 2w^2 \end{cases}.$$

Con un único cambio de variable hemos convertido el origen en los dos puntos elementales (ambos sillas) de este sistema; $(0, \pm 1)$. Existen, pues, variedades $w = \pm 1 + \dots$, que volviendo a nuestras variables, se convierten en $y = \pm x^2 + \dots$ (conocidas hace tiempo para este sencillo ejemplo exacto e integrable).

No es claro cómo reconstruir el mapa de fases inicial a partir del xw , pero sí es obvio lo que sucede llevando las variedades orientadas a la circunferencia. La estructura resulta ser como que habíamos calculado en 4.1.

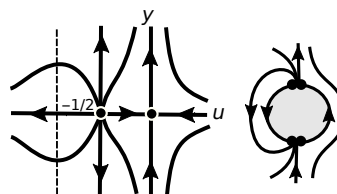
[Como el inicial, los dos sistemas son resolubles: $v^2 = x^2 + \frac{c}{x^2}$, $w^2 = 1 + \frac{c}{x^4}$].



El ejemplo 3 exige dos blow-ups horizontales, o bien, un único cambio $x=y^2u, y=y$, que lleva a:

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y^2 \end{cases} \xrightarrow{x=y^2u, y=y} \begin{cases} w' = -yu - 2yu^2 \\ y' = y^2u + y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w' = -u - 2u^2 \\ y' = yu + y \end{cases}.$$

También el punto doble se ha desdoblado en otros dos elementales: $(0, 0)$ (silla) y $(-\frac{1}{2}, 0)$ (nodo inestable). Las variedades verticales que pasan por esos puntos $x = -\frac{1}{2}$ y $x=0$ dan lugar en el sistema inicial a las calculadas $x = -\frac{1}{2}y^2$ y $x=0$, recorridas ambas hacia arriba.



Pero, ¿cuántos blow-ups habrá que hacer, en general, para convertir un punto degenerado en otros elementales? ¿Qué cambio único podría conseguir lo mismo? ¿Se podrá precisar la estructura (como en el teorema 2) sin hacer explícitamente el cambio? Daremos algunas respuestas en 4.7.