

## 4.4 Centros y focos de puntos degenerados

Consideremos primero el sistema analítico homogéneo con  $n$  impar:

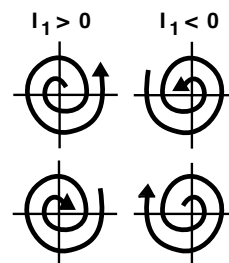
$$[H] \begin{cases} x' = A^n(x, y) = a_{n0}x^n + \dots + a_{0n}y^n \\ y' = B^n(x, y) = b_{n0}x^n + \dots + b_{0n}y^n \end{cases}$$

Escrito en polares [ $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ , como en 4.3 ], adopta la forma:

$$[P] \begin{cases} r' = [cA^n(c, s) + sB^n(c, s)]r^n \equiv M_n(\theta)r^n \\ \theta' = [cB^n(c, s) - sA^n(c, s)]r^{n-1} \equiv m_n(\theta)r^{n-1} \end{cases} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{M_n(\theta)}{m_n(\theta)} r.$$

Suponemos que el denominador  $m_n(\theta) = b_{n0}c^{n+1} + \dots - a_{0n}s^{n+1}$  **no se anula** para ningún  $\theta$  (por tanto, debe ser el producto  $b_{n0}a_{0n} < 0$  y  $n$  impar). Sabemos por 4.3 que no existen variedades que lleguen al origen con pendiente definida y por tanto [H] tiene un **centro** o un **foco** en el origen. Como  $M_n$  y  $m_n$  son  $\pi$ -periódicas, está claro que la  $r$  de las órbitas tenderá a infinito con  $\theta$ , será función periódica de  $\theta$  o tenderá hacia 0 al tender  $\theta$  hacia infinito, según sea mayor, igual o menor que cero, respectivamente, la integral:

$$I_1 \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{M_n(\theta)}{m_n(\theta)} d\theta$$



[H] tendrá entonces un centro en el segundo caso y un foco en los otros dos. Para precisar la estabilidad del foco no basta precisar el signo de la integral. Es necesario conocer, además, el signo de  $m_n(\theta)$ , o lo que es lo mismo, el signo de  $b_{n0}$  o el de  $a_{0n}$  (si  $a_{0n} > 0$ ,  $\theta$  decrece con  $t$ , y crece si  $a_{0n} < 0$ ):

Hagamos unas operaciones para facilitar el cálculo de la integral. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} m_n &= -csB_x^n + c^2B_y^n + s^2A_x^n - csA_y^n - B^n s - A^n c \\ &= A_x^n + B_y^n - c(cA_x^n + sA_y^n) - A^n c - s(cB_x^n + sB_y^n) - B^n s = A_x^n + B_y^n - (n+1)M_n \end{aligned}$$

puesto que para cualquier polinomio homogéneo  $P(x, y)$  de grado  $n$  se cumple que:

$$xP_x(x, y) + yP_y(x, y) = nP(x, y)$$

Por tanto, si llamamos  $E_{n-1}(x, y) \equiv A_x^n(x, y) + B_y^n(x, y)$ , se tiene:

$$I_1 = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c, s)}{m_n} d\theta - \frac{1}{n+1} [\ln |m_n|]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c, s)}{m_n} d\theta$$

Olvidamos la constante positiva, hacemos el cambio de variable  $z = \tan \theta$  en esta última integral, utilizamos para su denominador la notación de la sección anterior y definimos:

$$I \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c, s)}{m_n(\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}(1, z)}{P_{n+1}(z)} dz, \quad P_{n+1}(z) = B^n(1, z) - zA^n(1, z)$$

[Si no hay órbitas de [H] que llegue al origen con pendiente definida es  $P_{n+1}(z) \neq 0 \forall z$ ].

Recopilando lo anterior se tiene el siguiente teorema:

**Teor 1.** Supongamos que  $P_{n+1}(z) \neq 0 \forall z$ . Entonces:  
 Si la integral  $I = 0$ , el origen de [H] es un centro.  
 Si  $a_{0n} \cdot I > 0$ , el origen de [H] es un foco estable.  
 Si  $a_{0n} \cdot I < 0$ , el origen de [H] es un foco inestable.

[Si el sistema es exacto se tiene  $I=0$  y el origen es un centro, como debía ocurrir. Y también deberá anularse cuando, por ejemplo,  $A^n$  sea impar y  $B^n$  par en  $y$ ].

Veamos la forma particular que adopta el teorema en el caso no lineal más sencillo:  $n=3$ .

Sea [H3]  $\begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$ ,  $de < 0$ . Para que tenga centro o foco debe ser:

$$P_4(z) = -dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e \neq 0 \quad \forall z \quad [\Rightarrow de < 0].$$

En este caso la integral que informa sobre la estabilidad es:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c+3h)z^2 + (2b+2g)z + (3a+f)}{-dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e} dz$$

Para hallar  $I$  debemos factorizar el denominador. Esto, en teoría, se puede hacer pues hay fórmulas para las raíces de polinomios de cuarto orden, que son poco útiles en la práctica. Por ahora nos limitamos a calcular  $I$  en dos casos de factorización sencilla.

Primero, supongamos que  $P_4(z) = -d[z^2 + Az + C]^2$ , con  $4C - A^2 > 0$ . Debe ser entonces:

$$h-c = -2dA, \quad g-b = -d(A^2 + 2C), \quad f-a = -2dAC, \quad e = -dC^2 \Rightarrow$$

$$A = \frac{c-h}{2d}, \quad C = \frac{1}{8d^2} [4d(b-g) - (c-h)^2] \Rightarrow 4C - A^2 = \frac{1}{4d^2} [8d(b-g) - 3(c-h)^2]$$

y han de satisfacerse las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$f = a - \frac{c-h}{8d^2} [4d(b-g) - (c-h)^2], \quad e = -\frac{1}{64d^3} [4d(b-g) - (c-h)^2]^2 \quad (1)$$

Como es fácil de calcular una integral de la forma  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2z^2 + a_1z + a_0}{[z^2 + Az + C]^2} dz = 2\pi \frac{2a_2C + 2a_0 - a_1A}{[4C - A^2]^{3/2}}$

De lo anterior se deduce que:  $I = -sg(d) 16\pi \frac{8d^2a + d(5bh - 3gh - bc - gc) - h(c-h)^2}{[8d(b-g) - 3(c-h)^2]^{3/2}}$ .

Así pues, si  $8d(b-g) > 3(c-h)^2$  y los coeficientes del sistema satisfacen las relaciones (1), concluimos que el origen de [H3] es del tipo esquematizado a continuación:

$$\begin{array}{l} 8d^2a + d(5bh - 3gh - bc - gc) - h(c-h)^2 < 0 \rightarrow \text{foco E} \\ = 0 \rightarrow \text{centro} \\ > 0 \rightarrow \text{foco I} \end{array}$$

Otro caso fácilmente resoluble aparece si  $a=f$  y  $c=h$ . Entonces:

$$P_4(z) = -dz^4 + (g-b)z^2 + e = 0 \rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{g-b}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{g-b}{d}\right)^2 + 4\frac{e}{d}} \right].$$

Las cuatro raíces de  $P_4(z)$  han de ser complejas. Esto se da en dos casos que conducen a las dos posibles factorizaciones diferentes del polinomio bicuadrado  $P_4$ .

Si  $\frac{b-g}{d} > 2\sqrt{-\frac{e}{d}} \equiv 2S$ , el corchete es real y negativo y hay 4 raíces imaginarias puras. Así:

$$P_4(z) = -d[z^2 + C][z^2 + D], \quad C, D > 0.$$

Como  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2z^2 + a_1z + a_0}{[z^2 + C][z^2 + D]} dz = \pi \frac{a_0 + a_2\sqrt{CD}}{\sqrt{CD}[\sqrt{C} + \sqrt{D}]}$  y es  $\sqrt{CD} = S$ ,  $C + D = \frac{b-g}{d} \rightarrow \sqrt{C} + \sqrt{D} = \sqrt{\frac{b-g}{d} + 2S}$ ,

deducimos que  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4cz^2 + 2(b+g)z + 4a}{-d[z^2 + C][z^2 + D]} dz = -4\pi \frac{a+cS}{dS\sqrt{\frac{b-g}{d} + 2S}} \Rightarrow sg[dI] = -sg[a+cS] \quad (2)$

Si  $-2S < \frac{b-g}{d} < 2S$ ,  $z^2$  es complejo, las raíces de  $P_4$  tienen parte real y entonces:

$$P_4(z) = -d[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C], \quad 4C - A^2 = \frac{b-g}{d} + 2S > 0, \quad C = S$$

Ahora es  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2z^2 + a_1z + a_0}{[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C]} dz = \pi \frac{a_0 + a_2C}{C\sqrt{4C - A^2}}$ , que nos lleva a la misma condición (2).

Si  $\frac{b-g}{d} = 2S$ , es  $P_4(z) = -d[z^2 + C]^2$ ,  $C > 0$  y el valor de  $I = -2\pi \frac{a+cS}{dS^{3/2}}$  está recogido en (2).

Y, por último, si  $\frac{b-g}{d} \leq -2S$ , el denominador  $P_4(z)$  posee raíces reales.

Resumiendo, si  $a=f$ ,  $c=h$  y  $\frac{b-g}{d} > -2\sqrt{-\frac{e}{d}}$  el teorema 1 nos da esta estabilidad:

$$\begin{array}{l} c\sqrt{|e|} + a\sqrt{|d|} < 0 \rightarrow \text{foco E} \\ = 0 \rightarrow \text{centro} \\ > 0 \rightarrow \text{foco I} \end{array}$$

Veamos que dice el teorema 1 al aplicarlo al bien conocido caso  $n=1$ :

Entonces el sistema es lineal:  $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$  y son  $P_2(z) = -bz^2 + (d-a)z + c$ ,  $E_0 \equiv a+d$ .

Para que tenga centro o foco debe ser  $P_2(z) \neq 0 \forall z \Leftrightarrow (a-d)^2 + 4bc < 0$  [ $\Rightarrow bc < 0$ ]. Como

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a+d}{-bz^2 + (d-a)z + c} dz = -sg(b) \frac{2\pi(a+d)}{\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}} \Rightarrow sg[bI] = -sg[a+d] \Rightarrow$$

si  $a+d=0$  el origen es un centro, si  $a+d < 0$  es foco estable, si  $a+d > 0$  es foco inestable.

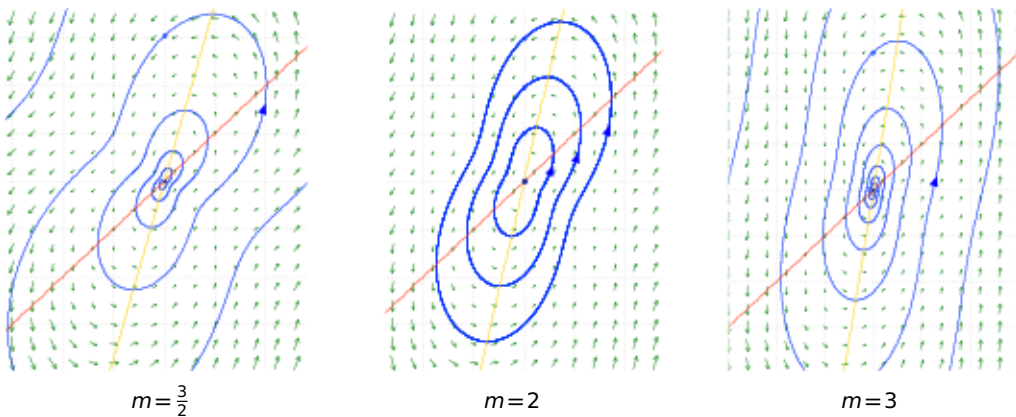
(Resultado inmediato viendo los autovalores del sistema:  $\lambda = \frac{1}{2}[a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}]$ ).

**Ej 1.**  $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = m^2x^3 + 2x^2y + 2mxy^2 - y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 2mz^2 + m^2 = [z^2 + m]^2$ .

Este sistema posee un centro o un foco si  $m > 0$ . Para precisar su estabilidad podemos acudir a las fórmulas de los dos casos analizados. De cualquiera de ellas deducimos que:

$$0 < m < 2 \rightarrow \text{foco I} \quad m=2 \rightarrow \text{centro} \quad m > 2 \rightarrow \text{foco E}$$

Integrando gráficamente con el ordenador para los tres valores de  $m$  indicados abajo:



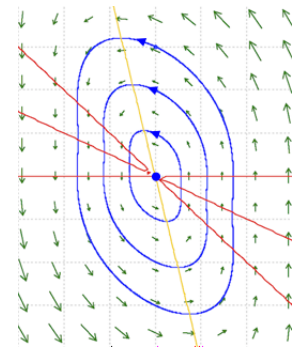
**Ej 2.**  $\begin{cases} x' = -x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \\ y' = 4x^3 + 4x^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases} \quad P_4(z) = 2[z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2] = 2[z^2 + 1][z^2 + 2z + 2] > 0$ .

Por tanto,  $I = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z+1}{[z^2+1][z^2+2z+2]} dz = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+2z+2} \right] dz = 0$ ,

Y hay un centro en el origen, como también se observa en el dibujo aproximado de la derecha, en el que la isoclina de pendiente horizontal  $y = mx$  con  $m$  único cero real de  $m^3 + 5m^2 + 4m + 4$  aparece en amarillo y en rojo las de pendiente vertical:  $y=0$ ,  $y = -\frac{x}{2}$ ,  $y = -x$ .

[En la tesis hay una sección dedicada a la factorización de polinomios  $P(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s$  y al cálculo exacto de integrales como  $I$ .

En ella también se puede ver que este sistema siempre tiene un centro si en vez del  $4x^3$  aparece un término  $sx^3$  cuando  $s > 7/8$ . Si  $s \leq 7/8$  hay siempre variedades pasando por el origen, excepto si  $s=0$  (con dos rectas de puntos críticos)].



**Ej 3.**  $\begin{cases} x' = -x^4y + ax^3y^2 - y^5 \\ y' = 3x^5 + 6x^4y + 2x^3y^2 + ax^2y^3 \end{cases} \rightarrow P_6(z) = z^6 + 3[z+1]^2 > 0$  para todo  $z$ .

Tenemos que  $a_{05} = -1 < 0$  y que  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_4(1,z)}{P_6(z)} dz = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{az^2+1}{P_6(z)} dz$ .

Por el teorema 1 está claro que si  $a \geq 0$  el origen es un foco inestable. Pero para discutir lo que sucede si  $a < 0$ , al no disponer de una expresión exacta de  $I$  (que es lo habitual), tenemos que evaluar numéricamente las integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{P_6(z)} dz \approx 1.7456, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P_6(z)} dz \approx 1.0857$$

El cambio de estabilidad (el centro) se da, pues, aproximadamente para  $a \approx -1.615$ .

Pasemos ya a considerar el sistema general y lo escribimos en polares:

$$[S] \begin{cases} x' = A^n(x, y) + A^{n+1}(x, y) + \dots \\ y' = B^n(x, y) + B^{n+1}(x, y) + \dots \end{cases} \rightarrow$$

$$[P] \begin{cases} r' = M_n r^n + M_{n+1} r^{n+1} + \dots, & M_k = cA^k(c, s) + sB^k(c, s) \\ \theta' = m_n r^{n-1} + m_{n+1} r^n + \dots, & m_k = cB^k(c, s) - sA^k(c, s) \end{cases}$$

Suponiendo que  $m_n$  no se anula [es decir que  $P_{n+1}(z) = B^n(1, z) - zA^n(1, z) \neq 0 \forall z, n$  impar] y operando como en los centros lineales de 3.5:

$$[e] \frac{dr}{d\theta} \equiv R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + \dots = \frac{M_n r + M_{n+1} r^2 + \dots}{m_n + m_{n+1} r + \dots} = \frac{M_n}{m_n} r + \frac{m_n M_{n+1} - M_n m_{n+1}}{m_n^2} r^2 + \dots$$

Desarrollando la solución analítica  $r(\theta)$  con  $r(0) = r_0$ :  $r(\theta) = u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + u_3(\theta)r_0^3 + \dots$

Y haciendo  $\theta = 0$ :  $r_0 \equiv u_1(0)r_0 + u_2(0)r_0^2 + u_3(0)r_0^3 + \dots \Rightarrow u_1(0) = 1, u_k(0) = 0$  si  $k > 1$ .

Sustituyendo  $r(\theta)$  en [e] se obtiene este sistema recursivo para el cálculo de los  $u_k(\theta)$ :

$$u_1' = R_1 u_1, \quad u_1(0) = 1;$$

$$u_2' = R_1 u_2 + R_2 u_1^2, \quad u_2(0) = 0; \quad u_3' = R_1 u_3 + 2R_2 u_1 u_2 + R_3 u_1^3, \quad u_3(0) = 0 \quad \dots$$

El  $u_1$  resulta ser mucho más complicado que la sencilla constante del caso no degenerado:

$$u_1(\theta) = e^{S_1(\theta)}, \quad \text{con } S_1(\theta) = \int_0^\theta R_1$$

Resolviendo las siguientes ecuaciones lineales:

$$u_2(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta u_1 R_2, \quad u_3(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta [u_1^2 R_3 + 2u_2 R_2], \quad \dots$$

se irían obteniendo los  $u_k$  en términos de primitivas (no calculables elementalmente).

Para ver si  $\mathbf{0}$  es centro o foco debemos hallar, para  $r_0$  pequeño, el signo de:

$$r(2\pi) - r(0) = [u_1(2\pi) - 1]r_0 + u_2(2\pi)r_0^2 + u_3(2\pi)r_0^3 + \dots$$

Y este signo lo da  $S_1(2\pi)$  si es no nulo, es decir, el signo de la  $I_1$  del principio de la sección.

Por tanto, **el sistema se comporta como la aproximación homogénea cuando  $I \neq 0$** .

Lo difícil es ver lo que ocurre cuando  $I = 0$ , saber si el centro se conserva o si pasa a ser un foco estable o inestable (no hay un coeficiente de Lyapunov sencillo como el de 3.5).

**Ej 1\*.**  $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + 2x^2y + 4xy^2 - y^3 - 9x^4 \end{cases}$  [Sistema del ejemplo 1 con un término  $-9x^4$ , para el caso de centro de la aproximación homogénea].

No sabemos si el origen seguirá siendo centro o pasará a ser un foco.

[Para los otros valores de  $m > 0$  sería un foco del mismo carácter].

Aparece un nuevo punto crítico (elemental) en  $(1, 1)$ :

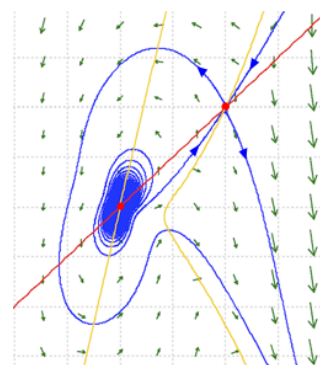
$$f = (x - y)(y^2 + 2xy + 2x^2) = 0 \rightarrow y = x \rightarrow 9x^3(1 - x) = 0.$$

La aproximación lineal en ese punto es

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -16 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{es silla con } \lambda = 15 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda = -3 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La inclinación de los vectores propios sugiere que  $\mathbf{0}$  se inestabiliza al añadir el nuevo término, y es lo que se observa numéricamente.

Las órbitas se alejan (lentamente) del origen.



No son los analizados en esta sección todos los centros o focos degenerados, desde luego. Ya hemos visto en 4.1 ejemplos (que deben estar asociados a 'vectores propios múltiples' con  $\lambda = 0$  que no hemos analizado) como el centro de la ecuación exacta  $x'' + 2x^3 = 0$ .