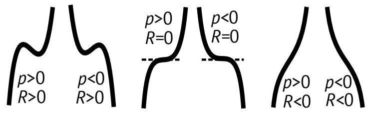
4.5 Polinomios de grado 3 y 4 e integrales racionales

Aunque no haya fórmulas para las raíces de los de grado mayor que 5 veamos algunos resultados para los de grado 3 y 4. Tratemos primero el **caso cúbico** en que sí las hay (complicadas):

$$\boxed{P_3(z)=pz^3+qz^2+rz+s}\ ,\ p\neq 0\,.$$



Como $P_3'(z)=3pz^2+2qz+r$ puede tener 2 raíces reales, 1 doble o ninguna $\big($según sea $R\equiv q^2-3pr>,=$ ó $<0\big)$, la gráfica de P_3 puede puede tener dos extremos, un punto de inflexión de tangente horizontal o ser estrictamente monótona.

Si P_3 tiene raíz múltiple debe anularse el polinomio y su derivada, es decir:

$$\begin{cases} pz^3+qz^2+rz+s=0 \\ 3pz^2+2qz+r=0 \end{cases} \quad \text{sistema que es equivalente al} \quad \begin{cases} qz^2+2rz+3s=0 \\ 3pz^2+2qz+r=0 \end{cases}.$$

Eliminando la z entre ambas ecuaciones se obtendría la expresión de su **discriminante** D_3 que indica la existencia de esas raíces múltiples, pero un antiguo resultado ya asegura que un sistema del tipo:

$$\begin{cases} cz^2+bz+a=0 \\ fz^2+ez+d=0 \end{cases} \quad \text{tiene solución en } z \text{ si y sólo si se anula su } \textbf{resultante}\text{:} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ e & f & g & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \end{vmatrix}.$$

En nuestro caso será $D_3=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3s & 2r & q & 0 \\ r & 2q & 3p & 0 \\ 0 & 3s & 2r & q \\ 0 & r & 2q & 3p \end{vmatrix}=\boxed{q^2r^2-4pr^3-4q^3s+18pqrs-27p^2s^2}\,.$

Llamando $S\equiv 27p^2s-9pqr+2q^3$, este D_3 se puede escribir más compacto: $D_3=\frac{1}{27p^2}\big[4R^3-S^2\big]$.

Se puede probar además que las raíces de P_3 vienen dadas por las siguientes fórmulas:

Si $D_3=0$, hay una raíz doble dada por $z_d=\frac{1}{3p}\Big[-q+\sqrt[3]{\frac{S}{2}}\,\Big]$ y otra simple $z_s=\frac{1}{3p}\Big[-q-2\sqrt[3]{\frac{S}{2}}\,\Big]$.

$\big[$Si es además $R=0$ (y también $S=0$) habrá raíz triple $z_t=-\frac{q}{3p}\,\big]$.

Si $D_3<0$, existe una única raíz real de P_3: $z_r=-\frac{q}{3p}-\frac{1}{3p}\Big[\frac{S-\sqrt{S^2-4R^3}}{2}\Big]^{1/3}-\frac{1}{3p}\Big[\frac{S+\sqrt{S^2-4R^3}}{2}\Big]^{1/3}$.

$\big[$Y las otras dos serán complejas conjugadas$\big]$.

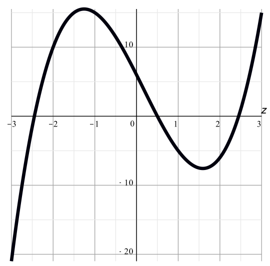
Por último, si $D_3>0$ ($\Rightarrow R>0$), hay tres raíces reales distintas de P_3 que se pueden expresar:

$$z_{1,2,3}=-\frac{q}{3p}+\frac{2\sqrt{R}}{3p}\cos\frac{\phi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2\ ,\ \text{siendo}\ \phi=\arccos\Big(\frac{-S}{2R^{3/2}}\Big)\,.$$

Sin calcular el D_3 es fácil decidir cuántas raíces reales tiene cualquier P_3, por ser su gráfica sencilla (es fácil encontrar sus extremos, lo que no pasa en polinomios de mayor orden).

Ej 1. $\boxed{Q(z)=2z^3-z^2-12z+6}$ (sin raíces) enteras tiene tres, pues

$Q'(z)=2(3z^2-z-6)=0 \to z_\pm=\frac{1}{6}\big[1\pm\sqrt{73}\,\big]$ y es $Q(z_-)>0$, $Q(z_+)<0$.



Podemos localizar mejor esas 3 raíces utilizando el teorema de Bolzano:

$Q(-3)=-21$, $Q(-2)=10$, $Q(0)=6$, $Q(1)=-5$, $Q(2)=-6$, $Q(3)=15$.

Están en $[-3,-2]$, en $[0,1]$ y en $[2,3]$.

Con las fórmulas de arriba: $R=73$, $S=430$, $D_3=12696\to 3$ raíces reales.

$\phi\approx 1.922726 \ \to\ z_{1,2,3}\approx 2.449491, -2.449490, 0.5000027$

$\big[$Los errores de redondeo aconsejan acudir a métodos numéricos incluso para un P_3. El 'fsolve' de Maple, que sabe factorizar directamente el polinomio $Q(z)=(2z-1)(z^2-6)$, sí devuelve las cifras exactas de $1/2$ y $\sqrt{6}\,\big]$.

En los polinomios cúbicos ligados a los P_4 que pronto veremos interesará más el caso $D_3>0$, pero en las aproximaciones homogéneas aparecían reales de cualquier tipo. Un ejemplo dependiente de s:

Ej 2. $\boxed{P(z)=z^3-6z^2+9z+s}$ $R=9$, $S=27(s+2)$, $D_3=-27s(s+4)$. Volvemos a comprobar fórmulas:

Raíces múltiples si $s=-4\to\sqrt[3]{S/2}=-3$, $z_d=1$, $z_s=4$, o si $s=0\to\sqrt[3]{S/2}=3$, $z_d=3$, $z_s=0$.

Las fórmulas se comportan peor con las raíces no múltiples, por ejemplo, si $s=16$, para el que P es factorizable por ser $z=-1$ raíz $\big[\,(z+1)(z^2-7z+16)\,\big]$, se deduce de arriba:

$$z_r=2-\big[9-4\sqrt{5}\,\big]^{1/3}-\big[9+4\sqrt{5}\,\big]^{1/3}\approx 2-0.3819660158-2.618033989=-1.0000000053\,.$$

Si $s=2$ (no factorizable) es $z_r=2-\big[2-\sqrt{3}\,\big]^{1/3}-\big[2+\sqrt{3}\,\big]^{1/3}\approx -0.195823345$ (como numéricamente).

Avancemos ahora en el estudio general de los sistemas cuadráticos siguiendo las ideas finales de 4.3. Recordemos que estos sistemas no pueden presentar centros o focos y que otra situación en que no se acababa el análisis era cuando era $P3\equiv 0$.

Para el homogéneo $\boxed{[\mathrm{H}_2]\ \begin{cases} x'=ax^2+bxy+cy^2 \\ y'=ex^2+fxy+gy^2 \end{cases}}$, el sistema algebraico $\boxed{[z\lambda]\ \begin{cases} a+bz+cz^2=\lambda \\ e+fz+gz^2=\lambda z \end{cases}}$

nos proporcionaba sus 'vectores propios' $(1,z)$ y sus 'autovalores' λ.

Lo más sencillo era resolver $\boxed{P_3(z)=cz^3+(b-g)z^2+(a-f)z-e}$ y a partir de esos z deducir los λ.

$\big[$Suponemos desde ahora que $c\neq 0$, pues si no el anterior sería un fácil polinomio de grado $2\,\big]$.

Pero, aunque ahora parezca poco práctico, podemos encontrar una 'ecuación de autovalores' hallando la resultante en z del $[z\lambda]$. La obtendremos, pues, calculando el determinante:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & 0 \\ e & f-\lambda & g & 0 \\ 0 & a-\lambda & b & c \\ 0 & e & f-\lambda & g \end{vmatrix}=0 \to \boxed{\begin{aligned} Q_3(\lambda)=c\lambda^3+\big[g(b-g)-c(a+2f)\big]\lambda^2+\big[(b+2g)(ag-ce)-(2a+f)(bg-cf)\big]\lambda \\ +(bg-cf)(af-be)-(ag-ce)^2\equiv c\lambda^3+q_\lambda\lambda^2+r_\lambda\lambda+s_\lambda=0\,. \end{aligned}}$$

Recordemos que las complicaciones aparecían si había z múltiples o $\lambda=0$ y que no se completaba la clasificación de un punto con esa aproximación homogénea cuando se daban a la vez. Aunque en la tesis se llega a caracterizaciones más precisas nos conformamos aquí con este resultado:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Hay } z \text{ múltiple si } D_z=(a-f)^2(b-g)^2-18(a-f)(b-g)ce-27c^2e^2-4c(a-f)^3+4e(b-g)^3=0\,. \\ \lambda=0 \text{ es autovalor si } s_\lambda=0 \text{ y será autovalor doble si } r_\lambda=s_\lambda=0\,. \end{array}}$$

$\big[$Si hay z múltiples habrá λ múltiples, pero lo contrario no es necesario pues podrían provenir de distintos z, por eso sus discriminantes no son iguales: $D_\lambda=(agc-fgc+bg^2-c^2e)^2D_z\,\big]$.

Ej 3. Sea $\boxed{\begin{cases} x'=y^2-x^2+R(x,y) \\ y'=2y^2+fxy+ex^2+S(x,y) \end{cases}}$, R y S con términos de orden 3 y mayores.

¿Para que valores de e y f no bastaría la aproximación homogénea para caracterizar el origen?

Nuestro P_3 será: $z^3-2z^2-(f+1)z-e$. Y calculando se obtiene:

$s_\lambda=(f+e+2)(f-e-2)$, $r_\lambda=f^2-2f-4e-8$, $D_z=4f^3+16f^2-36ef-27e^2+20f-68e+8$.

Para $f=e+2$ pasan a ser $r_\lambda=(e+2)(e-4)$ y $D_z=(4e+9)(e-4)^2$.

Y cuando $f=-e-2$ son $r_\lambda=e(e+2)$ y $D_z=-(4e-1)e^2$.

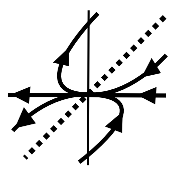
Los únicos valores para los que no basta $[\mathrm{H}_2]$ parecen ser $e=4, f=6$ y $e=0, f=-2$.

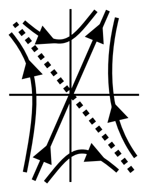
En efecto, en el primero caso son $z=-1$ doble con $\lambda=0$ y $z=4$ con $\lambda=15$.

Y en el segundo: $z=1$ doble con $\lambda=0$ y $z=0$ con $\lambda=-1$.

Factorizando sus $[\mathrm{H}_2]$ se ven sus rectas de puntos críticos y se dibujan fácilmente sus mapas:

$\begin{cases} x'=(y+x)(y-x) \\ y'=2(y+x)(y+2x) \end{cases}$ $\begin{cases} x'=(y+x)(y-x) \\ y'=2y(y-x) \end{cases}$





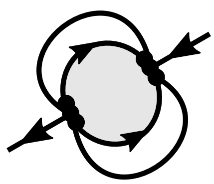
Los problemas para otros valores de e y f hallados son sólo aparentes:

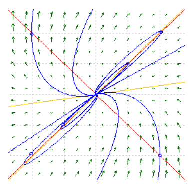
Si $e=-2, f=0$ hay $\lambda=0$ doble, pero están asociados a distintos $z=\pm 1$.

Si $e=\frac{1}{4}, f=-\frac{9}{4}$ hay $\lambda=0$ y $z_d=-\frac{1}{2}$ no asociados entre sí. $\big[$Y análogo si $e=-\frac{9}{4}, f=\frac{1}{4}\,\big]$.

¿Existirá algún z triple? Debe ser $R=7+3f=0$, $f=-\frac{3}{7}$ y también será $D_z=0\to e=\frac{8}{27}$. Para esos valores se encuentra un $z=\frac{2}{3}$ triple asociado a $\lambda=-\frac{5}{9}$.

El esquema y dibujo de pplane son los de la derecha:





Comparemos de nuevo con $n=1$, $[\mathrm{H}_1]\ \begin{cases} x'=ax+by \\ y'=ex+fy \end{cases}$, $[z\lambda]\ \begin{cases} a+bz=\lambda \\ e+fz=\lambda z \end{cases} \to \begin{array}{l} P_2(z)=bz^2+(a-f)z-e\,. \\ Q_2(\lambda)=\lambda^2-(a+f)\lambda+af-be\,. \end{array}$

Ahora ambos discriminantes coinciden: $D_z=D_\lambda=(a-f)^2+4be$, y es $s_\lambda=af-be$.

Hay $\lambda=0$ si se anula el determinante de los coeficientes del sistema.

Hay λ doble si $D_\bullet=0$ y en ese caso, si $b\neq 0$, es el $z_d=\frac{f-a}{2b}$ con $\lambda_d=\frac{a+f}{2}$ (nodo si $a+f\neq 0$).

Pero vamos a dedicar más espacio en esta sección a los **polinomios de cuarto grado**. En particular a aquellos con sus cuatro raíces complejas. Nuestra notación será:

$$\boxed{P_4(z)=mz^4+pz^3+qz^2+rz+s}\ ,\ m\neq 0\,.$$

Antes de avanzar hacia el problema general repasamos un par de casos sencillos.

Las raíces del famoso polinomio bicuadrado $\boxed{P_4(z)=mz^4+qz^2+s}$ se hallan con $Y=z^2$.

Ej 4. $\boxed{P(z)=z^4-2z^2-15} \xrightarrow{Y=z^2} Y^2-2Y-15=0\,,\ Y=1\pm\sqrt{1+15}=5,-3\,,\ z=\pm\sqrt{5}\,,\ \pm i\sqrt{3}\,.$

Las raíces de $\boxed{P_4(z)=mz^4+pz^3+qz^2+pz+m}$ se pueden calcular mediante el cambio $Y=z+\frac{1}{z}$:

$$m\big(z^2+\tfrac{1}{z^2}\big)+p\big(z+\tfrac{1}{z}\big)+q=m\big(z+\tfrac{1}{z}\big)^2+p\big(z+\tfrac{1}{z}\big)+q-2m=0\ \to\ mY^2+pY+q-2m=0\,.$$

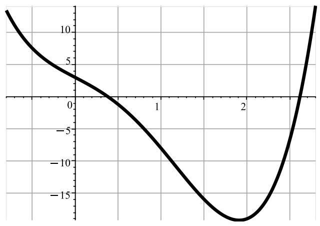
Halladas sus raíces $Y_\pm$, bastará resolver los dos polinomios de segundo grado: $z^2-Y_\pm z+1=0$.

Ej 5. $\boxed{P(x)=3z^4-7z^3-7z+3}=0 \xrightarrow{Y=z+\frac{1}{z}} 3Y^2-7Y-6=0$

$\to Y_\pm=3,-\frac{2}{3}\,,\ z^2-Y_\pm z+1=0\ \to\ z=\frac{1}{2}\Big[Y_\pm\pm\sqrt{Y_\pm^2-4}\,\Big]$.

Y_+ da dos raíces reales: $\frac{1}{2}\big[3+\sqrt{5}\,\big]$ y $\frac{1}{2}\big[3-\sqrt{5}\,\big]$,

e Y_- devuelve sus dos complejas: $\frac{1}{3}\big[-1\pm 2\sqrt{2}\,i\,\big]$.



Para el caso general empezamos simplificando el **discriminante** D_4 de P_4 que se calcularía así:

$$\begin{cases} mz^4+pz^3+qz^2+rz+s=0 \\ 4mz^3+3pz^2+2qz+r=0 \end{cases},\quad \begin{cases} pz^3+2qz^2+3rz+4s=0 \\ 4mz^3+3pz^2+2qz+r=0 \end{cases},\quad D_4=\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 4m & 3p & 2q & r & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 3p & 2q & r & 0 \\ 0 & 0 & 4m & 3s & 2q & r \\ p & 2q & 3r & 4s & 0 & 0 \\ 0 & p & 2q & 3r & 4s & 0 \\ 0 & 0 & p & 2q & 3r & 4s \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Llamando}\ \ L\equiv 4ms\,,\ K\equiv pr\,,\ N\equiv mr^2+p^2s\,,\ \text{se comprueba que} \\ D_4=4Lq^4-4Nq^3+\big(K^2-20LK-8L^2\big)q^2+18(2L+K)Nq-27N^2+4(L-K)^3\,. \end{array}}$$

Podemos también dar expresiones más cortas en términos de objetos más sencillos. Por ejemplo, si

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si}\ R\equiv q^2+12ms-3pr=q^2+3(L-K)\,, \\ S\equiv 2q^3-72msq-9prq+27\big(mr^2+sp^2\big)=2q^3-9(2L+K)q+27N\,, \\ \text{el discriminante adopta esta forma compacta:}\ \ D_4=\frac{1}{27}\big[4R^3-S^2\big]. \end{array}}$$

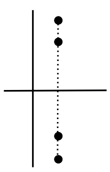
Discutamos el número de raíces reales y complejas de P_4 . Si $D_4\neq 0$ (si no las hay múltiples) no es complicada la clasificación. Con el método de Sturm (que relaciona el número de raíces en un intervalo con el número de cambios de signo en sus extremos de una secuencia de polinomios, construida de forma similar al algoritmo de Euclides) se llega a:

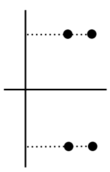
$$\text{Si}\ \boxed{U\equiv 8mq-3p^2\,,\ V\equiv 4mq^3-p^2q^2-2mq(7pr+8ms)+6p^2ms+3p^3r+18m^2r^2=\tfrac{1}{3}\big[UR+2mS\big]}\ ,$$

$$\text{entonces}\ \boxed{\begin{array}{l} \text{si}\ D_4>0\ \text{y}\ V,U<0\ \text{tiene 4 raíces reales distintas el}\ P_4\,, \\ \text{si}\ D_4<0\ \text{posee 2 raíces reales distintas y 2 complejas} \\ \text{y si}\ D_4>0\ \text{y}\ V\geq 0\ \text{ó}\ U\geq 0\ \text{hay 4 raíces complejas distintas.} \end{array}}$$

Del resto de los casos (con raíces múltiples) sólo citamos el resultado que más nos interesa precisar para los cálculos sobre centros y focos:

$$\boxed{\begin{array}{c} P_4\ \text{tiene raíces dobles complejas si}\ R\neq 0\,,U>0\ \text{y}\ \ D_4=V=0\iff 0=V=W\,, \\ \text{siendo}\ \ W\equiv 4mpq-p^3-8m^2r\,. \end{array}}$$





[En caso de ser las cuatro raíces complejas conjugadas, se prueba (ya en la próxima página) que cuando es $W=0$ son iguales o bien sus partes reales o bien sus partes imaginarias].

$\big[$Las raíces dobles son siempre calculables y se llega a la fórmula: $z_d=\frac{1}{4m}\big(-p\pm\sqrt{-U}\,\big)$, válida incluso si $U\leq 0$ y son reales$\big]$.

Queremos cálcular las raíces intentando escribir P_4 como producto de dos polinomios de grado dos:

$$\boxed{P_4(z)=mz^4+pz^3+qz^2+rz+s=m\big[z^2+Az+C\big]\big[z^2+Bz+D\big]}\ .$$

Se tiene entonces que: $\boxed{p=m(A+B)\,,\ q=m(C+D+AB)\,,\ r=m(AD+BC)\,,\ s=mCD}$.

Si dispusiéramos de AB o bien de $Z=C+D$, para calcular C,D o A,B bastaría resolver un polinomio de segundo grado. Y no es difícil dar una ecuación de tercer grado para hallar cada una.

Pero se usará la más simple $\boxed{Q(Y)\equiv Y^3-3RY-S=0}$ que se comprueba para $\boxed{Y=m\big[2(C+D)-AB\big]}$.

Si hemos calculado la Y se obtienen, por ejemplo, A y B simplemente resolviendo el sistema:

$A+B=\frac{p}{m}\,,\ AB=\frac{2q-Y}{3m}$, cuyas soluciones son $\boxed{A,B=\frac{1}{6m}\big[3p\pm\sqrt{12mY-3U}\,\big]}$.

Y para encontrar C y D será mejor usar ya los valores de q y r de arriba en función de A y B.

$\big[$Como P_4 tiene raíces múltiples si las tiene Q sus discriminantes deben reflejarlo. Es $D_Q=27^2D_4\,\big]$.

$\big[$La prueba de la geometría de $W=0$: $4mpq-p^3-8m^2r=m^3[A-B]\big(\big[4C-A^2\big]-\big[4D-B^2\big]\big)\big]$.

Si $D_Q>0$, hay 3 valores reales de Y por los tres modos distintos en que se pueden agrupar las 4 raíces de P_4. Si son reales no importa la elección, pero con 4 complejas sólo una Y da factorización real. Se verá en la próxima página que se debe elegir para ello la Y_1 mayor.

(Llamaremos $Y_1\ge Y_2\ge Y_3$ y es claro que se tiene $Y_1+Y_2+Y_3=0$, $Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3=-3R$).

Factoricemos nuestros primeros polinomios siguiendo estos caminos. Para hacerlo exactamente debe ser el Q de tercer orden resoluble, pero hemos reducido bastante el problema.

Ej 6. Sea $\boxed{P_4(z)=z^4+12z^2-64z+132}$. Vamos hallando $U=96=2^5\times 3$, $R=1728=2^6\times 3^3$, $S=0$.

A partir de ellos o desde sus definiciones: $V=55296=2^{11}\times 3^3$, $D_4=764411904=2^{20}\times 3^6$.

Por tanto posee 4 complejas. Y debía tener 3 raíces reales el Q cúbico aquí muy sencillo:

$Q(Y)=Y^3-5184Y$, $Y=72,0,-72$. Luego $A,B=\frac{1}{6}\big[\pm\sqrt{576}\,\big]$. $A=4$ y $B=-4$. De aquí:

$$\begin{matrix}C+D=16+12\\ 4C-4D=-64\end{matrix}\ \to\ C=6\,,\ D=22\,,\ P_4(z)=\big[z^2+4z+22\big]\big[z^2-4z+6\big]\ \to\ z=2\pm\sqrt{2}\,\mathrm{i}\,,\ -2\pm 3\sqrt{2}\,\mathrm{i}\ .$$

$\big[$Eligiendo $Y=0$ los polinomios factorizados serían complejos: $A,B=\pm 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\,\big]$.

Ej 5*. Sea ahora el $\boxed{P(z)=3z^4-7z^3-7z+3}$ de la página anterior. Es $R=-39$, $S=7938\Rightarrow D_4<0$.

Las raíces de Q son en este caso 18 $\big($que da $A,B=\frac{2}{3},-3\big)$ y las dos complejas $-9\pm 6\sqrt{10}\,\mathrm{i}$.

Entonces es $C=D=1$ y la expresión $\big[3z^2+2z+3\big]\big[z^2-3z+1\big]=0$ da las raíces halladas.

La teoría dada de polinomios de grado 4 es, desde luego, para aplicarla al estudio de sistemas del tipo

$$[\mathrm{H}_3]\ \boxed{\begin{cases}x'=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3\\ y'=ex^3+fx^2y+gxy^2+hy^3\end{cases}}\ \text{con } d\neq 0\ \to\ \boxed{[z\lambda]\ \begin{cases}a+bz+cz^2+dz^3=\lambda\\ e+fz+gz^2+hz^3=\lambda z\end{cases}}\ .$$

Los vectores propios de $[\mathrm{H}_3]$ los da el polinomio: $P_4(z)=-dz^4+(h-c)z^3+(g-b)z^2+(f-a)z+e=0$.

No vamos a escribir aquí la larga expresión de su $Q_4(\lambda)$. Como única muestra escribimos desarrollado el s_λ (la resultante para $\lambda=0$) y una forma simplificada de expresarlo.

$$\boxed{\begin{aligned}s_\lambda = {}& a^3h^3-2a^2h^2fc+ahf^2c^2+ah^2fb^2+a^2hcg^2-a^2h^2bg-ahcfbg-a^2g^3d-h^2b^3e\\ &+3a^2hfgd-2ahf^2bd-af^2cgd+afbg^2d+3ah^2cbe-2ahc^2ge-hc^2fbe+hcb^2ge\\ &+af^3d^2-3a^2h^2ed+ahcfed+2acg^2ed-ahbged+fcbged+2hfb^2ed-b^2g^2ed+c^3he^2\\ &-3hcbe^2d-c^2ge^2d-3afged^2-f^2bed^2+3ahe^2d^2+cfe^2d^2+2bge^2d^2-e^3d^3\,.\end{aligned}}$$

Si llamamos $\boxed{T=ah-de\,,\ I=bg-cf\,,\ O=ag-ce\,,\ M=bh-df\,,\ E=af-be\,,\ J=ch-dg}$, se puede

comprobar que: $\boxed{s_\lambda=T^3-T^2I-(3T+I)EJ+M^2E+O^2J=\begin{vmatrix}T&M&J\\ O&T+I&M\\ E&O&T\end{vmatrix}\ .}$ [Es $EJ+IT=MO$].

Nuestro objetivo principal en esta sección será ir más allá de los cálculos sobre **centros y focos** de la sección anterior 4.4, avanzando en cálculo de la integral que los caracterizaba.

Queremos ahora dar el valor (o al menos el signo) de integrales racionales generales de la forma:

$\boxed{I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Hz^2+2Gz+F}{mz^4+pz^3+qz^2+rz+s}\,dz}$, con el denominador P_4 sin raíces reales. Suponemos que $m,s>0$.

Se llega a esta primera expresión en términos de la factorización $P_4(z)=m\big[z^2+Az+C\big]\big[z^2+Bz+D\big]$:

$$\boxed{\text{Llamando }\ \gamma=\tfrac{1}{2}\sqrt{4A-C^2}\,,\ \delta=\tfrac{1}{2}\sqrt{4D-B^2}\ \text{ y }\ E=\gamma\delta\ \text{ es }\ I=\frac{2\pi}{m}\frac{H(C\delta+D\gamma)-G(A\delta+B\gamma)+F(\gamma+\delta)}{E\,[2(C+D)-AB+4E]}\ .}$$

$\Big[$Las raíces del polinomio son $z_{1,2}=\frac{1}{2}\big(-A\pm\mathrm{i}\sqrt{4C-A^2}\big)=\alpha\pm\gamma\mathrm{i}$ y $z_{3,4}=\frac{1}{2}\big(-B\pm\mathrm{i}\sqrt{4D-B^2}\big)=\beta\pm\delta\mathrm{i}$,
y en función de ellas la factorización pasa a ser $P_4(z)=m\big(z^2-2\alpha z+\alpha^2+\gamma^2\big)\big(z^2-2\beta z+\beta^2+\delta^2\big)\Big]$.

Queremos expresar I en términos de los coeficientes de P_4 y de las raíces del polinomio cúbico $Q(y)$.
Para ello multiplicamos numerador y denominador por el número positivo $\gamma+\delta$ y observamos que:

$$3m^2\big(\sqrt{4C-A^2}+\sqrt{4D-B^2}\,\big)^2=m^2\big[12(C+D)+6AB+12E-3(A+B)^2\big]=8mq-3p^2-4mY_3\,,$$

$$\tfrac{3}{2}m^2\big(A\sqrt{4D-B^2}+B\sqrt{4C-A^2}\,\big)\big(\sqrt{4C-A^2}+\sqrt{4D-B^2}\,\big)=m^2\big[6(AD+BC)-(A+B)\big(\tfrac{3AB}{2}-6E\big)\big]=6mr-pq-pY_3\,,$$

$$m^2\big(C\sqrt{4D-B^2}+D\sqrt{4C-A^2}\,\big)\big(\sqrt{4C-A^2}+\sqrt{4D-B^2}\,\big)=m^2\big[8CD-(A+B)(AD+BC)+(C+D)(AB+4E)\big]$$
$$=\tfrac{1}{9}\big[2(Y_3+q)(Y_3-2q)+9pr\big]\,,$$

pues, en términos de las raíces de P_4 , las tres de Q son las siguientes y cumplen estas igualdades:

$$Y_1=m[2(C+D)-AB]=2m\big[(\alpha-\beta)^2+\gamma^2+\delta^2\big]\,,\quad Y_2=m\big[6\gamma\delta-(\alpha-\beta)^2-\gamma^2-\delta^2\big]\,,$$
$$Y_3=-m\big[6\gamma\delta+(\alpha-\beta)^2+\gamma^2+\delta^2\big]=m\big[\tfrac{1}{2}AB-(C+D)-6E\big]\,.$$
$$Y_1-Y_2=3m\big[(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2\big]\ \ (=0\ \text{si raíces dobles}),$$
$$Y_1-Y_3=3m\big[(\alpha-\beta)^2+(\gamma+\delta)^2\big]=\tfrac{3m}{2}[2(C+D)-AB+4E]\,,\quad Y_2-Y_3=12mE\,,$$
$$(Y_1-Y_3)(Y_2-Y_3)=3\big(Y_3^2-R\big)\ \ \text{(el denominador positivo de la } I \text{ de arriba)},$$

Por tanto, una fórmula del tipo que deseábamos puede ser:

$$\boxed{\text{Si }\ N_2(Y)\equiv H\big[2(Y+q)(Y-2q)+9K\big]-6G\big[6mr-pq-pY\big]+3F\big[U-4mY\big]\ \text{ será }\ I=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{N_2(Y_3)}{[Y_3^2-R]\sqrt{U-4mY_3}}}\ .$$

$\big[$Recordamos que $K=pr$, $U=8mq-3p^2$, $R=q^2-3K+12ms$ y que Y_3 es la menor raíz de $Q\,\big]$.

El signo de I lo da $N_2(Y_3)$ (y la estabilidad del foco degenerado si estamos con ello). Será un **centro si se anula**. Deducimos una **condición necesaria** para ello sólo en términos de los parámetros de la integral (de los coeficientes del sistema). Como Y_3 debe anular N_2 y Q será 0 la **resultante** en Y de ambos polinomios. Hallándola y factorizándola con ordenador aparece como producto de la W ligada a las z_d dobles (y con I calculable si es $W=0$, por ser factorizable Q) y de nuestra I_0 :

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Si } W\neq 0\,,\ I=0\ \Rightarrow\ I_0\equiv 4\big(mF^2-sH^2\big)\big[(K+2L)G-2q^2G+(rH+pF)q-2(mrF+psH)\big]+16(mrF-psH)qG^2\\&\qquad -4\big(mr^2-p^2s\big)\big(3HF+2G^2\big)G+(rH-pF)\big[4(K+2L)G^2-2(rH+pF)qG+(rH+pF)^2\big].\end{aligned}}$$

$\big[$Que sea $I_0=0$ no implica, desde luego, que $I=0$, pues N_2 puede ser anulado por otras raíces de Q .
Era esperable la simetría con que se presentan en I_0 las parejas de constantes $m-s$, $r-p$ y $H-F\,\big]$.

Recordemos que, en caso de venir I de un sistema $[H_3]$ con $de<0$ y sin λ reales, la integral era:

$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(c+3h)z^2+2(b+g)z+(3a+f)}{-dz^4+(h-c)z^3+(g-b)z^2+(f-a)z+e}\,dz$. Sustituyendo esas constantes (y sin el 8 común) se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned}I_o&=4(b+g)\big[(3a+f)^2d+(c+3h)^2e\big]ed-(ac+cf+fh-3ah)\big[2(c+3h)(3a+f)+8(b+g)^2\big]ed\\&+(a-f)(3a+f)^3d^2-(c-h)(c+3h)^3e^2+4(b+g)(ab+fb-2ag)^2d+4(b+g)(cg+hg-2hb)^2e\\&+2(3a+f)\big[2(cf+2hf-3ah)(ag+fg-2ab)-(a-f)(3a+f)(c+3h)(b-g)\big]d\\&+2(c+3h)\big[2(cf+2ac-3ah)(cb+hb-2hg)-(c-h)(c+3h)(3a+f)(b-g)\big]e\\&+(ac+cf+fh-3ah)\big[4(ac-fh)^2-(b+g)[(b-g)(ac+cf+fh-3ah)-2(a-f)(cg+hg-2hb)]\big].\end{aligned}}$$

$\big[$Si [H3] es exacto ($3a+f=b+g=c+3h=0$) o simétrico ($a=c=f=h=0$) se anula I_0 como debía$\big]$.

El N_2 en términos de los coeficientes, una vez quitado el 2 común es:

$$\boxed{\begin{aligned}N_o&=(c+3h)Y^2+2\big[3d(3a+f)-cb-2cg+3hb\big]Y+6d(fg+3ab+5bf-9ag)\\&\quad-9(c-h)(ca+cf+hf-3ah)+(b-g)(cb+3hg+5cg-9hb)\,.\end{aligned}}$$

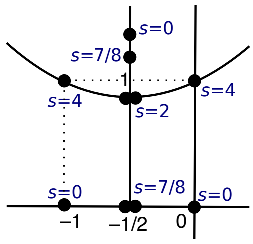
Los primeros ejemplos que vemos son de los que ya hablamos en la sección anterior:

Ej 7. $\boxed{\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = s^2x^3 + 2x^2y + 2sxy^2 - y^3 \end{cases}}$ Era $P_4(z) = \left[z^2+s\right]^2$ y vimos que su origen era: foco I si $0<s<2$, centro si $s=2$ y foco E si $s>2$.

Resulta ser $I_0=0$ (sin ser centro para todo s) y $N_2(Y)=-8(Y-4s)(Y+2s+12)$.
Se puede factorizar $Q(Y)=(Y-4s)^2(Y+8s)$. Si $s>0$ es $Y_3=-8s$. $N_2(Y_3)=-s(s-2)^{\uparrow}$.

Ej 8. $\boxed{\begin{cases} x'=-x^2y-3xy^2-2y^3=-y(x+y)(x+2y) \\ y' = sx^3 + 4x^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases}}$ $P_4(z)=2z^4+4z^3+6z^2+4z+s$. En 4.4 hallamos su centro si $s=4$ y anunciamos que lo sería $\forall s>7/8$.

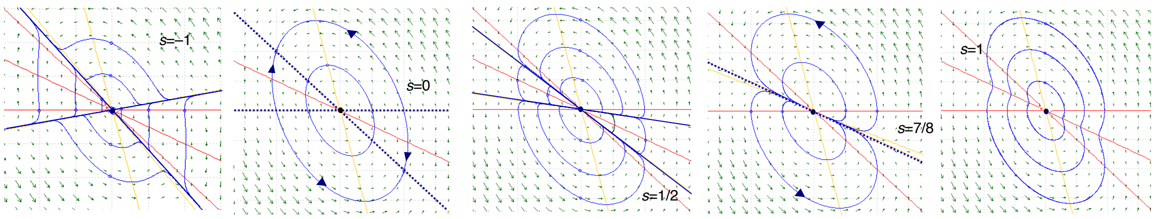
Para él son: $U=48$, $R=12(2s-1)$, $S=432(1-s)$, $V=192(2-s)$, $D_4=256(s-2)^2(8s-7)$.
Y además: $W=0$, $I_0=0$, $N_2\equiv 0$, $Q(Y)=[Y-6]\left[Y^2+6Y+72(1-s)\right]$.



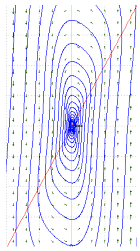
Hay pues dos raíces complejas y dos reales, dos complejas y una real doble o cuatro complejas si, respectivamente, es $s<,=,>7/8$, siendo compleja doble si $s=2$. Como en el tercer caso es $N_2\equiv 0$ el origen es centro. [Las partes reales o las imaginarias son iguales como debían]. Si $s\leq 2$ es $Y_1=6$ y sabemos escribir su factorización:

$$P_4(z)=2\left[z^2+z+1+\sqrt{1-s/2}\,\right]\left[z^2+z+1-\sqrt{1-s/2}\,\right].$$

Discutir los casos con $s\leq 7/8$ nos lleva a la sección 4.3. Para $s<0$ y $0<s<7/8$ hay dos órbitas rectas, que orientadas con sus 'autovalores' y viendo el signo de Δ dan lugar a 4 sectores hiperbólicos y a 4 elípticos.
Si $s=0$ son rectas de puntos críticos $y=0,-x$. Dividiendo por el factor común a f y g queda el centro de $x'=-x-2y$, $y'=4x+y$. El mapa de fases es el suyo, con las rectas de puntos y el cambio de sentidos.
Si $s=7/8$ es factor repetido $(x+2y)$. Analizando $x'=-xy-y^2$, $y'=(7x^2+18xy+4y^2)/8$ se tiene su dibujo.
[Si se hubiera calculado el $s_\lambda=s^2(8s-7)$ ya se habría sabido cuándo aparecían los autovalores 0].



Ej 6*. $\boxed{\begin{cases} x' = 8x^3 - y^3 \\ y'=132x^3-56x^2y+12xy^2 \end{cases}}$ En el ejemplo 6 vimos que era $P_4(z)=\left[z^2+4z+22\right]\left[z^2-4z+6\right]$ y que su $Q(Y)=Y(Y-72)(Y+72)$.

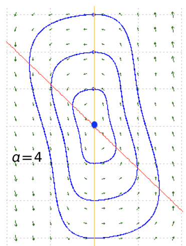


El hecho ser $I_o=2621440$ nos asegura ya que es un foco. Para ver su caracter basta sustituir la $Y_3=-72$ en su $N_2(Y)=384(Y+48)$. Es, pues, foco estable.
Hemos avanzado mucho desde que necesitábamos ver el signo de la I inicial:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{24-32z}{z^4+12z^2-64z+132}\,dz=\frac{1}{18}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{11z+94}{z^2+4z+22}-\frac{11z+6}{z^2-4z+6}\right]dz=\cdots=-\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$$

(valor que nos devueve, desde luego, la fórmula con N_2 de la página anterior).

Un nuevo ejemplo con P_4 perteneciente a otra familia de casos factorizables (si $mr^2=p^2s$, entre ellos están los bicuadrados y simétricos; si $p\neq 0$ una raíz de Q es $Y=\frac{6mr}{p}-q$).

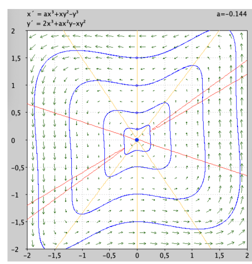


Ej 9. $\boxed{\begin{cases} x'=(a-8)x^3+2xy^2-y^3 \\ y'=16x^3+ax^2y+2xy^2 \end{cases}}$ $P_4(z)=z^4-2z^3+2z^2+8z+16$ y es $U,V,D_4>0$. $Q(Y)=0$ si $Y=28,-2,-26$, $I_0=0$ si $a=4,7,12$.

Para $Y=-26$ resulta ser $N_2=1296(a-4)$. Si $a=4$ es centro (el del dibujo).
Es foco E,I si $a<,>4$. Factorizando: $\left[z^2+2z+2\right]\left[z^2-4z+8\right]$, $z=-1\pm i$, $z=2\pm 2i$.

Último ejemplo (sin valores exactos).

Ej 10. $\boxed{\begin{cases} x' = ax^3 + xy^2 - y^3 \\ y'=2x^3+ax^2y-xy^2 \end{cases}}$ $P_4(z)=z^4-z^3-z^2+2$. $U=-11$, $V=39$, $D_4=892$. $Q(Y)=Y^3-75Y-196$, $I_0=32\left(10a^3+19a^2+4a+1\right)$.



Hay centro o foco para todo a, y sólo puede ser centro para los ceros de I_0.
Numéricamente se ve que $I_0=0$ si $a_{123}\approx -0.14401547, 0.43028993, 1.61372554$.
La Y_3 de Q es -6.793205564 (calculable con $10\cos\left[(\arccos\frac{98}{125}+2\pi)/3\right]$).
Sólo se anula $N_2(Y)=(Y-1)(Y+5)-6a(4Y+11)$ para Y_3 si $a=a_1$.
[Ese sería el valor para el que $\int_{-\infty}^{\infty}(z^2-2z)/P_4=-a\int_{-\infty}^{\infty}4/P_4$].