

## 4.5 Ejemplos con ciclos límite

Por ahora sólo en el ejemplo 6 de 3.4 nos han aparecido ciclos límite: el sistema cuya  $r$  en polares cumplía la sencilla ecuación:  $r' = ar - r^3$ . Era  $r = \sqrt{a}$  para  $a \in (0, 2)$  ciclo límite (estable, como se suele llamar, por tender todas las órbitas cercanas hacia él).

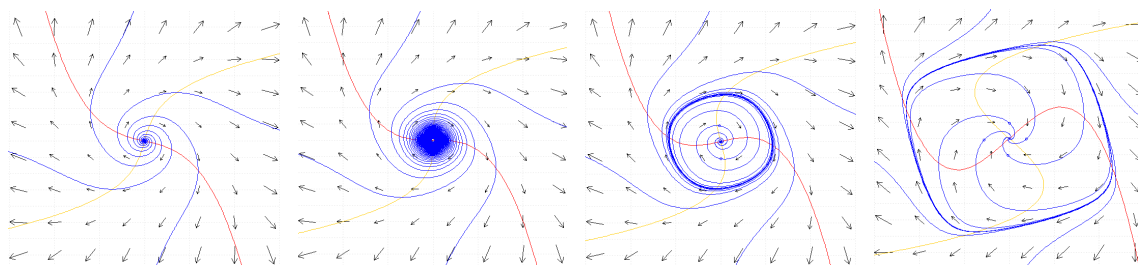
Pero en general, las polares serán más complicadas. ¿Cuándo surgirán ciclos límite? Parece que cuando haya dos tendencias opuestas, un punto crítico que empuje hacia afuera y que el infinito lo haga hacia dentro (o al revés) y sin que existan más puntos que puedan atraer las órbitas.

[Recordemos que (lo argumentamos en 4.1) en un sistema exacto no puede haber ciclos límite].

Construyamos otro ciclo límite (ahora inestable) a partir del ejemplo 5 de 3.4:  $x' = y - x^3$ ,  $y' = -x + y^3$ . Los términos cúbicos inestabilizaban el centro. Si los lineales tiran hacia el origen lo conseguiremos.

**Ej 1.**  $\begin{cases} x' = ax + y + x^3 \\ y' = -x + ay + y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} r' = ar + r^3(c^4 + s^4) = ar + \frac{1}{4}r^3(3 + \cos 4\theta) \\ \theta' = -1 + r^2sc(s^2 - c^2) = -1 - \frac{1}{4}r^2 \sin 4\theta \end{cases} \quad \mathbf{M}(0,0) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = a \pm i.$

Para  $a \geq 0$  el origen será foco inestable y no pueden existir más puntos críticos (ya que es  $r' > 0$ ). Si  $a < 0$  esperamos ciclo límite. Con el pplane obtenemos estos mapas para  $a = 1/4, 0, -1/4, -1$ :



En ellos se observa el ciclo previsto para  $a < 0$ , cuya amplitud va creciendo al irse haciendo el origen cada vez más repulsor. [Cuando  $a$  es gordo y negativo surgen otros 6 puntos críticos nuevos].

[La aparición de ciclos al cruzar los  $\lambda$  el eje imaginario es la llamada bifurcación de Hopf].

Citemos, sin demostración, teoremas generales para el habitual [S]  $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ ,  $f, g \in C^1$ .

El primero es coherente con los ejemplos vistos hasta ahora:

**Teor1.** Cualquier órbita cerrada de [S] debe encerrar, por lo menos, un punto crítico. Si sólo encierra uno, este punto no puede ser un punto silla.

El siguiente es el teorema más famoso sobre el tema (de Poincaré-Bendixon). Su resultado es previsible, pero sus hipótesis son, en general, difíciles de aplicar en la práctica.

**Teor P-B.** Sea  $D$  un conjunto cerrado que no contiene ningún punto crítico. Si una  $\mathbf{x}(t)$  solución de [S] permanece en  $D$  para todo  $t \geq t_0$  entonces o es ella misma una solución periódica o tiende en espiral hacia una órbita cerrada cuando  $t \rightarrow \infty$ .

[El resultado es totalmente análoga para  $t \leq t_0$  y  $t \rightarrow -\infty$ ].

Como una curva cerrada contiene un punto crítico y éste no puede estar en  $D$ , los conjuntos del teorema deberán tener algún hueco (o sea, no serán simplemente conexos).

Probemos con el teorema de P-B la existencia del ciclo límite del ejemplo 1 para el valor  $a = -1$ :

Nuestro conjunto  $D$  va a ser la corona  $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ . Como se tiene

$$\frac{1}{2} \leq R(\theta) \equiv \frac{1}{4}(3 + \cos 4\theta) \leq 1 \Rightarrow r' = r(r^2 R(\theta) - 1) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } r=1 \\ \geq 0 & \text{si } r=\sqrt{2} \end{cases}$$

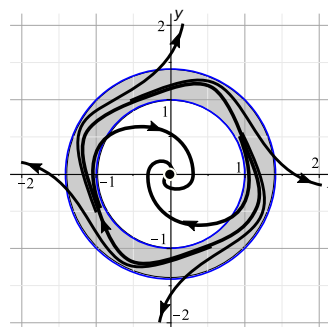
las órbitas avanzarán hacia el interior de  $D$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

Además no hay puntos críticos en  $D$  (ni lejos), pues debería ser  $3 + \cos 4\theta + \sin 4\theta = 0$ . O, complicado, utilizando las cartesianas:

$$x' = 0 \rightarrow y = x - x^3 \rightarrow x(x^8 - 3x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 2) = 0,$$

y se puede demostrar que ese paréntesis siempre es positivo.

Hemos, pues, probado que existe al menos un ciclo límite en  $D$ .



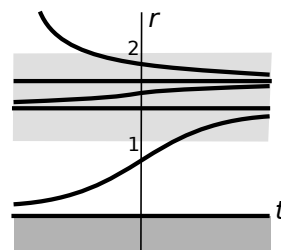
Que P-B no asegura la unicidad del ciclo lo prueba el siguiente ejemplo de sencilla expresión polar.

**Ej 2.**  $\begin{cases} r' = r(r^2 - 2)^2(3 - r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$  [En cartesianas  $\begin{cases} x' = -y + x[12 - 16(x^2 + y^2) + 7(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3] \\ y' = x + y[12 - 16(x^2 + y^2) + 7(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3] \end{cases}$ ].

El dibujo de las soluciones de la autónoma para  $r'$  muestra que la corona  $1 < r < 2$  es un conjunto  $D$  de los de Poincaré-Bendixon, pues la distancia al origen crece para  $r=1$  y decrece para  $r=2$ .

Pero en  $D$  no hay un único ciclo límite, sino dos: el estable  $r = \sqrt{3}$  y el semiestable  $r = \sqrt{2}$  (se acercan a él en espiral las órbitas de su interior, pero las de su exterior, que vienen de él para  $t \rightarrow -\infty$ , se van en el infinito al otro ciclo límite estable).

Hablamos una vez más de prolongabilidad: están definidas  $\forall t$  las soluciones con  $r \leq \sqrt{3}$ , pero las de fuera (que se acercan al ciclo límite y están definidas para  $t$  positivos) han llegado desde el infinito en tiempo finito debido al término  $-r^7$  de la ecuación.

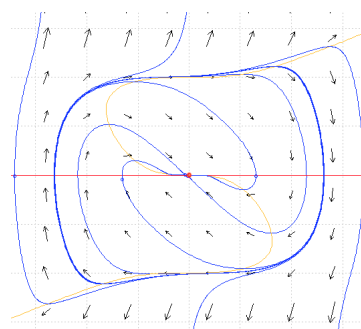


Dos últimos ciclos límite, pero rodeando puntos no elementales.

El primero se basa en el ejemplo de 3.6, vuelto a ver en 4.2, donde comprobamos que tenía un nodo estable en el origen asociado a un  $\lambda = 0$ . Para conseguir el ciclo, hacemos el infinito atractor sumando un término  $y^5$  (un rozamiento positivo para velocidades grandes), que no modificará la estructura del origen.

**Ej 3.**  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - x^3 + y^5 \end{cases}$  El pplane nos muestra el ciclo esperado (inestable), cuyos cortes aproximados con el eje  $x$  son  $\pm 1.3$  y  $\pm 1$  con el  $y$ .

En el origen sigue estando el mismo nodo de antes. No debe un ciclo límite rodear siempre a un foco



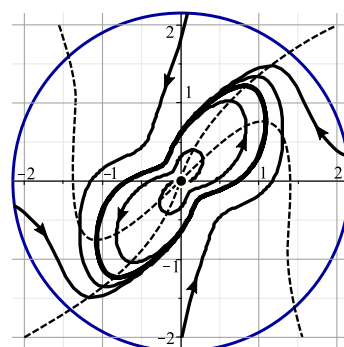
**Ej 4.**  $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 - x^5 \\ y' = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - y^3 - y^5 \end{cases}$  Los términos cúbicos, como vimos en el ejemplo 1 de la sección anterior, dan lugar a un foco inestable. Sumamos esos términos de orden 5 para hacer repulsor al infinito.

El dibujo lo hacemos esta vez a partir del que nos proporciona Maple. Como las curvas definidas implícitamente por  $f = 0$  y  $g = 0$  sólo se cortan en el origen, sigue siendo el único punto crítico. Y, como ya sabíamos, sigue siendo el foco inestable de la aproximación homogénea. Las órbitas se irán de un entorno del origen (ese entorno será el hueco del conjunto  $D$  de P-B).

Faltaría comprobar que hay una región que atrapa también a las órbitas que vienen el infinito. Simplificando las polares:

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{2}r^3(1 + 3\cos 2\theta + \sin 2\theta) - \frac{1}{8}r^5(5 + 3\cos 4\theta) \\ \theta' = r^2 + \frac{1}{4}r^4\sin 4\theta \end{cases}$$

Como el término en  $r^5$  es negativo, para grandes  $r$  será  $r' < 0$ .



Hemos hablado de ciclos límites estables e inestables. En los estables las órbitas que parten cerca se aproximan asintóticamente a ellos. Pero esto no significa que las soluciones correspondientes lo sean. De hecho cualquier solución periódica de un sistema autónomo no puede ser asintóticamente estable: cualquier pareja de puntos sobre la órbita cerrada, periodo tras periodo, estarán a la misma distancia y esta nunca tenderá a 0. Sí son claramente inestables las soluciones asociadas a ciclos inestables o semiestables ya que las soluciones se alejan seguro si lo hacen las órbitas.