4.6 Volviendo a la estabilidad

Empecemos con **puntos críticos**. Decía el teorema de 3.2: si los autovalores de $\mathbf{M}$ tienen $\mathrm{Re}\lambda<0$, $\mathbf{x_o}$ es asintóticamente estable. Si alguno de los λ tiene $\mathrm{Re}\lambda>0$, $\mathbf{x_o}$ es inestable.

En 4.2 comprobamos que la segunda parte era cierta cuando un $\lambda=0$. Y ahora sabemos que un punto con $\lambda_0=0$ y $\lambda_1<0$ puede ser inestable (si el punto resulta ser silla o silla-nodo), o ser AE (si es un nodo), o incluso EnoA, como en un caso del siguiente ejemplo.

Ej 1. $\boxed{x''=bx-2x'+(x')^2}$. Discutamos, según b, la estabilidad de su solución $x=0$.

$$\begin{cases} x'=v \\ v'=bx-2v+v^2 \end{cases} \to \mathbf{M}(0{,}0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & -2 \end{pmatrix} \to \lambda^2+2\lambda-b=0 \to \lambda=-1\pm\sqrt{1+b} \to$$

Si $b>0$ el origen es inestable, pues hay $\lambda>0$ (y el otro es <0; es un punto silla).

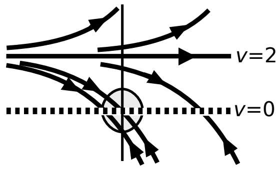
Si $b<0$, ambos autovalores tienen $\mathrm{Re}\lambda<0$ y $x=0$ es AE (en concreto, si $b<-1$ es un foco E, si $b=-1$ es un nodo de una tangente E y si $-1<b<0$ es un nodo E).

[Como ya dijimos, las raíces de $\lambda^2+a\lambda+b=0$ tienen $\mathrm{Re}\lambda<0$ si y sólo si $a,b>0$, con lo que nos podíamos haber ahorrado hasta el cálculo de los λ].

Si $b=0$ son $\lambda=0,-2$ y el teorema citado no nos dice nada. Dibujemos su mapa de fases.

Para $\begin{cases} x'=v \\ v'=-2v+v^2 \end{cases}$ la recta $v=0$ está formada por puntos críticos (no elementales, claro).

Pero sus órbitas son muy sencillas: $\frac{dv}{dx}=v-2 \to v=2+Ce^x$.



Con ellas, los puntos y el sentido de las ecuaciones tenemos el mapa. Se observa que el origen (y cualquiera de los otros) es EnoA: las órbitas que parten lo suficientemente cerca no se salen de un entorno, pero no tienden, salvo dos, hacia el punto.

La situación se complica mucho más en puntos con $\lambda=0$ doble. Incluso para los de 4.3 poco degenerados. Hasta un **sistema homogéneo** puede tener cualquier tipo de estabilidad. En uno con $n=2$, cualquier 'autovalor' no nulo da inestabilidad (la recta asociada se recorre en el mismo sentido a cada lado del origen). Si $n=3$ un 'λ' positivo lo hace I. Sabemos sólo que es AE si hay 'λ' reales y todos son <0. Si no hay 'λ' reales, hemos visto lo difícil que es distinguir entre centros y focos. Y si aparecen '$\lambda=0$' influyen los términos de mayor orden y casi no tenemos técnicas para analizarlos.

Como sabemos, si $n>1$ (a diferencia de las ecuaciones de primer orden) el hecho de que las soluciones que partan cerca del punto estén definidas $\forall t$ y que tiendan hacia él no implica que el punto sea AE. O sea, que existen puntos que son atractores pero que son inestables. De hecho el ejemplo 1 de 4.3 (allí precisamos su estructura local) lo es:

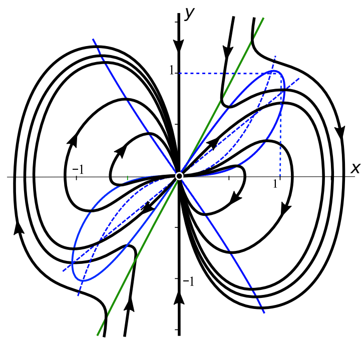
Ej 2. $\boxed{\begin{cases} x'=2x^2y-xy^2 \\ y'=2x^2y-y^3-x^5 \end{cases}}$ Probemos que todas sus soluciones $\mathbf{x}(t)\to\mathbf{0}$ si $t\to\infty$ con un dibujo global de sus órbitas. $\mathbf{v}$ es vertical si $x=0$ (órbita), si $y=0$ o si $y=2x$ (y llevando esto a $g=0$ vemos que no hay más puntos críticos).

Además $\mathbf{v}$ es horizontal sobre la curva $g(x,y)=2x^2y-y^3-x^5=0$, que pasa por $(0,0)$ y es simétrica respecto a él. Y pasa por $\pm(1,1)$.

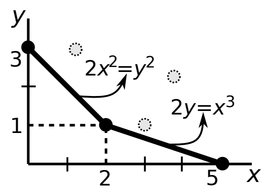
Tiene pendiente vertical y horizontal, respectivamente, si

$$g_y=x(4y-5x^3)=0,\ y=\pm\tfrac{\sqrt{6}}{3}x \to \pm\left(\tfrac{2}{3}6^{1/4},\tfrac{2}{9}6^{3/4}\right)\approx\pm(1.04,0.85).$$

$$g_x=2x^2-3y^2=0,\ y=\tfrac{5}{4}x^3 \to \pm\left(\tfrac{2}{5}30^{1/4},\tfrac{2}{25}30^{3/4}\right)\approx\pm(0.94,1.03).$$



En $(0,0)$ es $g_y=g_x=0$. El análisis local clásico de curvas de este tipo se hace usando la **poligonal de Newton** como resumimos.



Dibujamos un punto en el plano xy para cada término de la curva y una poligonal que deje al resto de términos por encima (en este caso no hay, pero unos tenues puntos los sugieren). Las ramas de la curva que pasan por $(0,0)$ las dan los términos sobre cada segmento de la poligonal:

$$2x^2y-y^3=0 \to y=\pm\sqrt{2}\,x+\cdots\ ,\quad 2x^2y-x^5=0 \to y=\tfrac{1}{2}x^3+\cdots.$$

Analizando el sentido de $\mathbf{v}$ y probando que no hay órbitas cuya x no se va a infinito (usando polares o las ideas de 4.8), se concluye que todas las soluciones tienden hacia el origen que es un **atractor global inestable** (es claro que órbitas cercanas al origen se alejan de él).

Pasemos a tratar ahora la aún más complicada estabilidad de **soluciones no constantes**.

Insistimos en la idea de que si las órbitas de dos soluciones se alejan, las soluciones también lo hacen (y la inestabilidad 'se ve' en un mapa de fases), pero que si esas órbitas se acercan indefinidamente a otra, las soluciones pueden no hacerlo y no se deduce la estabilidad.

Por ejemplo, observando el mapa de fases, es clara la inestabilidad de la solución del ejemplo 1 con $x(0)=0$, $x'(0)=2$ y de la del ejemplo 2 con $x(0)=0$, $y(0)=1$. Estudiemos ahora tres sistemas para enfatizar la segunda afirmación, cada uno con una estabilidad diferente:

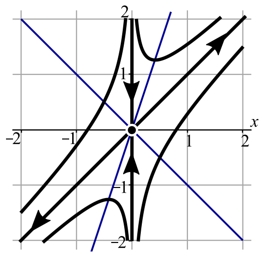
Ej 3. Dibujemos su órbitas y estudiemos la estabilidad de la solución $\mathbf{x}$ con $x(0)=y(0)=1$ para:

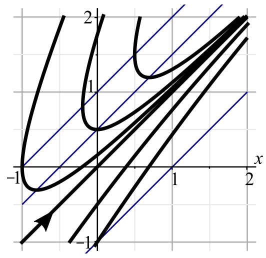
a) $\boxed{\begin{cases} x'=2x \\ y'=3x-y \end{cases}} \to \mathbf{x}=\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$. b) $\boxed{\begin{cases} x'=x-y+1 \\ y'=2x-2y+1 \end{cases}} \to \mathbf{x}=\begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}$. c) $\boxed{\begin{cases} x'=e^{-x} \\ y'=e^{-y} \end{cases}} \to \mathbf{x}=\begin{pmatrix} \ln(t+1) \\ \ln(t+1) \end{pmatrix}$.

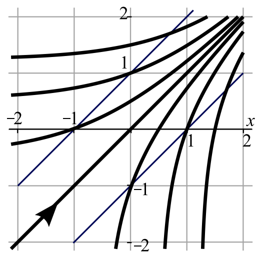
[Las soluciones salen de comprobar que $y=x$ es órbita y resolver las ecuaciones resultantes].

a) es lineal con silla en el origen. No tienen puntos críticos ni b) (lineal) ni c) (no lineal resoluble).

Los respectivos mapas de fases son fáciles de dibujar (por ejemplo, utilizando isoclinas):







La solución general en cada caso es: a) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} c_1e^{2t} \\ c_1e^{2t}+c_2e^{-t} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} c_1+c_2e^{-t}+t \\ c_1+c_2 2e^{-t}+t \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \ln(t+c_1) \\ \ln(t+c_2) \end{pmatrix}$.

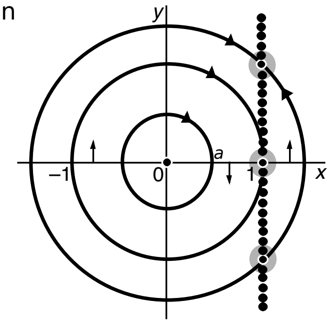
Y en los tres las órbitas tienden a $y=x$ si $t\to\infty$. En los lineales se deduce de las soluciones y en el no lineal es consecuencia de sus calculables órbitas: $y=\ln\left(e^x+C\right)$.

Pero sabemos que todas las soluciones del lineal a) son I ($\lambda=2,-1$) y que todas las de b) son EnoA ($\lambda=0,-1$). Y a partir de las soluciones se prueba que la solución pedida para c) es AE.

Tratemos ahora la estabilidad de **soluciones periódicas**. Argumentamos en 4.5 que ninguna puede ser AE. Sabemos que todas las soluciones de un sistema lineal con $\lambda=\pm qi$ (los centros) son EnoA. Pero muchas veces en un sistema no lineal una solución periódica es I.

Ej 4. $\boxed{\begin{cases} x'=y-xy \\ y'=x^2-x \end{cases}}\begin{matrix} =y(1-x) \\ =-x(1-x) \end{matrix}$ El origen es centro de AL y los $(1,b)$ son infinitos puntos críticos con $\lambda=0,-b$.

Órbitas: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \to x^2+y^2=C$. $\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix} 0 \\ x(x-1) \end{pmatrix}$.



Observemos primero la estabilidad de sus soluciones constantes.

$(0,0)$ e $(1,b)$, $b>0$ son EnoA. Los $(1,b)$, $b\leq 0$ son inestables.

Es periódica cada solución asociada a una circunferencia que pase por $(a,0)$, $a<1$. La órbita por $(-1,0)$ nace y muere en $(1,0)$ y se recorre en tiempo infinito. Su solución es I, pues no se parece a las periódicas de dentro. El periodo T_a de estas tenderá a infinito al acercarse a ella (y debe tender hacia el de la AL si $a\to 0$).

Este sistema es resoluble y da lugar a una integral calculable, con lo que podemos comprobar las afirmaciones hechas sobre los periodos:

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2} \to x'=\pm(1-x)\sqrt{a^2-x^2}=\frac{dx}{dt}\ , \quad T_a=2\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(1-x)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\begin{matrix} \to 2\pi \text{ si } a\to 0\,. \\ \to\infty \text{ si } a\to 1\,. \end{matrix}$$

¿Son estables cada una estas soluciones periódicas no triviales? No, no lo es ninguna de ellas. Dos soluciones que partan de $(a,0)$ y $(a^*,0)$ con a y a^* muy próximos, por tener periodos distintos, se irán alejando progresivamente una de la otra (la de dentro corre más).