

## 4.8 Utilizando la poligonal de Newton

Supongamos el habitual sistema analítico [S]  $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$  y que el origen es punto crítico.

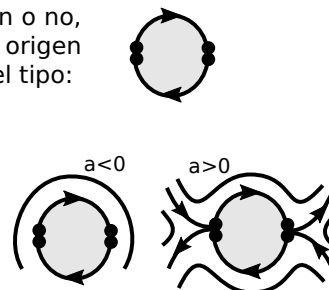
¿Como analizar de forma directa el punto cuando no es suficiente la sección 4.3? En particular, si  $v=0$  es múltiple con 'autovalor' cero, como en los ejemplos del final de 4.3, discutidos a base de blow-ups.

**Ej 1.**  $\begin{cases} x' = y - xy \\ y' = 2ax^3 \end{cases}$  Es  $\Delta = -y^2$  con  $\lambda = 0$ . Aunque no sepamos si existen o no, busquemos variedades horizontales pasando por el origen probando en la ecuación de las órbitas soluciones del tipo:

$$y = c_s x^s + \dots \rightarrow 2ax^3 = (1-x)[c_s x^s + \dots][s c_s x^{s-1} + \dots] = s c_s^2 x^{2s-1} + \dots$$

$$\rightarrow s=2, 2a=2c_2^2, y = \pm \sqrt{a} x^2 + \dots, \text{ para } a \leq 0.$$

Yendo al sistema:  $x' = \pm \sqrt{a} x^2 + \dots$  que da el esquema de la derecha para  $a > 0$  (silla, pues normalmente el comportamiento es similar a cada lado de la variedad) y sugiere que si  $a < 0$  no llegan variedades al origen (centro o foco, de hecho el primero, por la simetría que hay).



Pero no necesitamos utilizar series para obtener esa información. Observemos que **determinar el  $c_s$  probando**  $y = c_s x^s + \dots$  **en la ecuación de las órbitas** de un sistema [S]:

$$g(x,y) - f(x,y) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow g(x, c_s x^s + \dots) - f(x, c_s x^s + \dots) [s c_s x^{s-1} + \dots] = 0$$

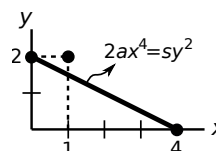
**es equivalente a determinar probando ese desarrollo en la ecuación algebraica:**

$$H_s(x,y) \equiv xg(x,y) - syf(x,y) = 0 \rightarrow g(x, c_s x^s + \dots) - s f(x, c_s x^s + \dots) [c_s x^s + \dots] = 0$$

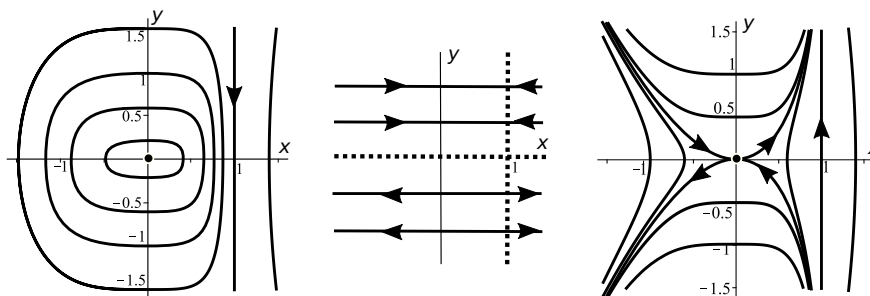
y esto es, precisamente, lo que nos aporta la **poligonal de Newton**.

En nuestro ejemplo,  $2ax^4 - sy(y-xy) = 0$  da los puntos de la derecha, y el segmento devuelve las órbitas  $2ax^4 = sy^2, s=2, y = \pm \sqrt{a} x^2 + \dots$ .

Observemos que **el término  $-xy$**  del sistema (asociado a un punto por encima de la poligonal) **no influye** nada en la estructura del origen.



Las órbitas son calculables (ecuación separable) y podríamos comprobar estas estructuras. Y aunque no fuese resoluble, un cambio  $x = x, y = x^2 v$  (mejor que dos blow-ups) la confirmaría. Con algún cálculo más (o el Maple) se tienen los mapas de fases para  $a = -1, a = 0$  y  $a = 1$ :



[Con los mismos cálculos (por dar el mismo segmento) volvemos a obtener la estructura del sencillo sistema exacto  $x' = y, y' = 2ax^3$  analizado en 4.1 y 4.3, para  $a = \pm 1$ , por otras vías].

**Ej 2.**  $\begin{cases} x' = 2x^2 y - xy^2 \\ y' = 2x^2 y - y^3 - x^5 \end{cases}$  Veamos que nos dice la poligonal para el atractor inestable visto en la sección anterior (y primer ejemplo de 4.3).

Llevamos  $H_s = 2x^3 y - xy^3 - x^6 - s(2x^2 y^2 - xy^3)$  al diagrama  $xy$ .

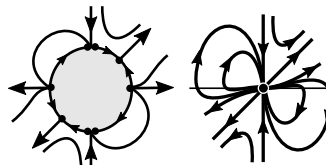
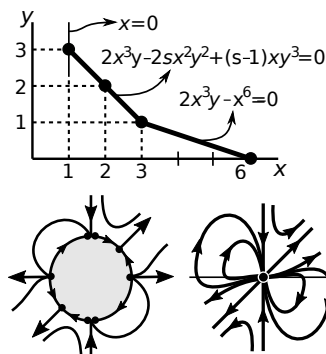
Que no hay puntos sobre el eje  $y$  nos dice que  $x=0$  es órbita.

Del segmento de pendiente  $-1$  ( $s=1$ ):  $2x^3 y - 2x^2 y^2 = 0 \rightarrow y = x$ .

Notemos que **para  $s=1$**  (ramas de la curva de la forma  $y = Kx$ )  $H_s$  **pasa a ser el  $\Delta(x,y)$  de la aproximación homogénea**.

Y el otro segmento (con  $s=3$ ) nos da:  $2x^3 y - x^6 = 0, y = \frac{1}{2} x^3 + \dots$ , que debimos calcular en 4.3 llevando series  $y = c_2 x^2 + \dots$  a la ecuación de las órbitas y que ahora costó muy poco encontrar.

Orientando las variedades reencontramos el atractor inestable.



Pasemos a los resultados generales. Las demostraciones se pueden encontrar en mi tesis.

Sea  $H_s(x,y) = xg(x,y) - syf(x,y)$  y fijémonos en el segmento  $k$ -simo de su poligonal (de pendiente  $-1/s_k$  y que dará lugar a las ramas  $y = m_k x^{s_k} + \dots$ ). Llamemos:

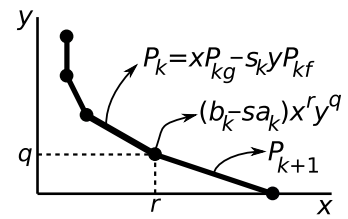
$$P_k(x,y) = xP_{kg}(x,y) - s_k P_{kf}(x,y)$$

a los términos de  $H_s$  asociados a puntos sobre el segmento, siendo  $P_{kg}$  y  $P_{kf}$  los términos que provienen de  $g$  y de  $f$ .

El punto de  $H_s$  que pertenece a dos segmentos consecutivos (de pendientes  $-1/s_k$  y  $-1/s_{k+1}$ ) será de la forma  $(b_k - sa_k)x^r y^q$ , siendo  $b_k x^{k-1} y^q$  un término de  $g$  y  $b_k x^k y^{q-1}$  de  $f$ .

Suponemos en toda la sección que  $P_k$  **no se anula idénticamente para ningún  $k$** .

Las ramas de  $H_{s_k} = 0$  de la forma  $y = m_{ik} x^{s_k} + \dots, x \geq 0$  o  $y = m_{jk} (-x)^{s_k} + \dots, x \leq 0$ , vienen dados por las raíces de  $P_k(x,y) = 0$ . Este teorema asegura variedades de  $[S]$  de esa forma.



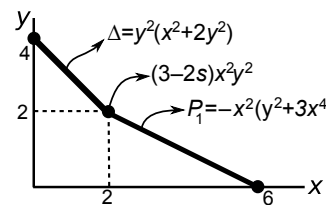
**Teor1.** Si  $y = m_{ik} x^{s_k}, x \geq 0$ , es raíz real simple de  $P_k(x,y) = 0$  o múltiple con  $P_{kf}(1, m_{ik}) \neq 0$  entonces existe una variedad de  $[S]$  de la forma  $y = m_{ik} x^{s_k} + \dots, x \geq 0$ . Análogo resultado se tiene para  $y = m_{jk} (-x)^{s_k} + \dots, x \leq 0$ .

Como dijimos, para  $s_k = 1$  el  $P_k$  resulta ser el conocido  $\Delta = xB - yA$  y las variedades (válidas para  $x \geq 0$  y  $x \leq 0$ ) son las rectas del teorema de 4.3. Los  $P_k(1, m_{ik})$  ocupan el papel de los  $\lambda$  de allá. Notemos también que el 'segmento' de  $\Delta$  puede reducirse a un punto.

La demostración es similar a la de aquel teorema haciendo blow-ups del tipo  $y = x^{s_k} v$  o bien, si  $s_k = \omega/\beta$ , haciendo  $x^\beta = u, y = u^\omega v$ , ya que aparecen puntos con a lo más un autovalor cero.

Pero aquí surgen complicaciones que no se daban en el caso homogéneo: puede haber variedades llegando al origen que no son del tipo de las del teorema anterior, no es tan fácil ver lo que ocurre entre dos variedades consecutivas,... Consideremos este ejemplo:

**Ej 3.** 
$$\begin{cases} x' = 2x^2 y - 2y^3 \\ y' = 3xy^2 - 3x^5 \end{cases}$$

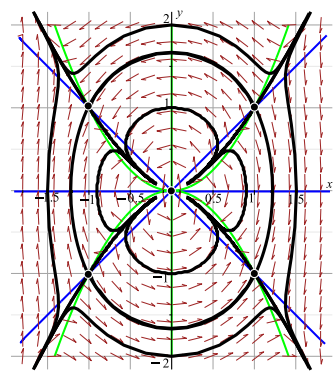


$\Delta$  da  $y=0$  doble con  $\lambda=0$  y el teorema 1 no da variedades cuadráticas por ser complejas las soluciones de  $y^2 + 3x^4$ .

Si no llegan órbitas al origen, sería un centro (sistema con simetrías).

Pero son variedades exactas  $y = \pm (\pm x)^{3/2}$ , que llevan a 4 sectores elípticos.

La existencia de variedades la dará la circunferencia ampliada y orientada con el signo del  $P_1$ .



Un sistema con el mismo  $\Delta$  y similar  $P_1 = x^2(y^2 + 3x^4)$  que sí presenta un centro, como se puede comprobar, es  $x' = -2y^3, y' = xy^2 + 3x^5$ . Aquí no hay cambios de sentido.

El teorema 2 generaliza el teorema 2 de 4.3 y precisa la estructura del origen también en gran parte de los casos con  $y=0$  o  $x=0$  múltiples y con  $\lambda=0$  y sin necesidad de hacer ningún blow-up:

**Teor2.** Suponemos que  $P_k \neq 0 \forall k$  y que todas las raíces reales  $y = m_{ik} x^{s_k}, y = m_{jk} (-x)^{s_k}$  de cada  $P_k(x,y) = 0$ , con  $m_{ik}, m_{jk} \neq 0$ , son simples o múltiples con  $P_{kf} \neq 0$ . Entonces la estructura local del  $\mathbf{0}$  queda determinada por los signos de los  $P_k$  y el flujo sobre cada variedad [dado por  $x' = P_{kf}(x, m_{ik} x^{s_k})$  o  $x' = P_{kf}(x, m_{jk} (-x)^{s_k})$ , o calculando más términos de su desarrollo en el caso de que se anule  $P_{kf}$ ].

[Se puede refinar el teorema y no se precisa el signo de cada  $P_k$  para dar el flujo entre variedades: basta el signo de  $\Delta$  y ver si el valor de los  $b_k/a_k$  de los puntos que dan vértices de la poligonal está o no comprendido entre los  $s_k$  contiguos (en el ejemplo 3 era  $1 < 3/2 < 2$ ). Si no es así (por ejemplo si  $a_k = 0$  o  $b_k = 0$ ) se hereda el sentido de  $\Delta$ , y si ocurre hay variedades  $y = cx^{b/a} + \dots$

Esto se ve en la larga prueba, que va analizando los sistemas obtenidos haciendo los blow-ups horizontales o verticales necesarios que acaban en puntos 'poco degenerados' de los de 4.3].

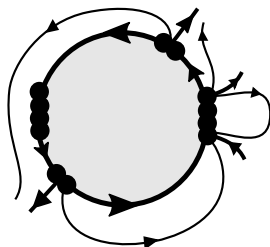
El teorema sigue dejando casos sin analizar y que exigirían en principio hacer explícitamente blow-ups, método clásico para analizar estos puntos degenerados (algunas ideas de cómo proceder se dan en la tesis): si algún  $P_k \equiv 0$  (en particular si es  $\Delta \equiv 0$ ), si hay  $P_k$  múltiples con  $P_{kf} = 0$  o cómo distinguir centros de focos en caso de que la poligonal informe de que ninguna variedad real llega al origen (como vimos no basta para ello que ningún  $P_k$  tenga raíces reales).

Pero hagamos varios ejemplos que muestren la utilidad de los teoremas de la página anterior. El primero presenta varias situaciones descritas en el teorema 1 (y ninguna variedad ligada a ángulos).

**Ej 4.** 
$$\begin{cases} x' = 2xy^4 - y^5 + 3x^5y \\ y' = xy^4 - x^{10} \end{cases}$$

Además del origen no elemental tiene un par de sillas: una en  $(1, -1)$  y otra aproximadamente en  $(2.03, 4.93)$ . Se dibuja para el  $(0, 0)$  otra vez la poligonal asociada:

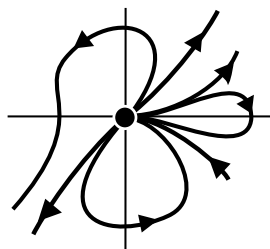
Y una vez más dibujamos la circunferencia orientada con  $\Delta$  en la que iremos plasmando las variedades que encontremos.



Existe variedad del tipo  $y=x+\dots$  pues, a pesar de ser doble, su  $\lambda$  es no nulo, es decir, para ella es  $x'=x^5+\dots$

(esto lo sabíamos desde 4.3).

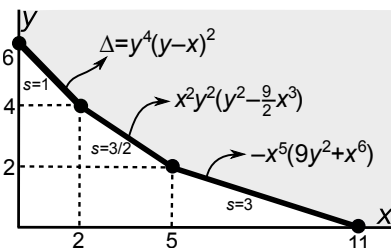
El segundo segmento de la poligonal da las variedades simples  $y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}x^{3/2}+\dots$  y el flujo sobre ellas lo obtenemos llevándolas a la primera ecuación del sistema:  $x'=\pm\frac{9}{\sqrt{2}}x^{13/2}+\dots$



Que no existen variedades  $y=cx^3+\dots$  lo da el tercer segmento y, viendo el signo de los dos  $P_k$  (o teniendo en cuenta los comentarios tras el teorema) comprobamos que no hay otro tipo de variedades y que el sector entre las dos simples de orden  $3/2$  es elíptico y no hiperbólico. Tenemos, por tanto, que la estructura del origen es la esquematizada a la izquierda.

Comprobar numéricamente esta estructura no es sencillo cerca del origen, por la presencia de potencias altas que retrasan el avance de las órbitas.

El dibujo de abajo del Phase Plane incluye la silla de  $(1, -1)$  con  $\lambda=2, -19$ .

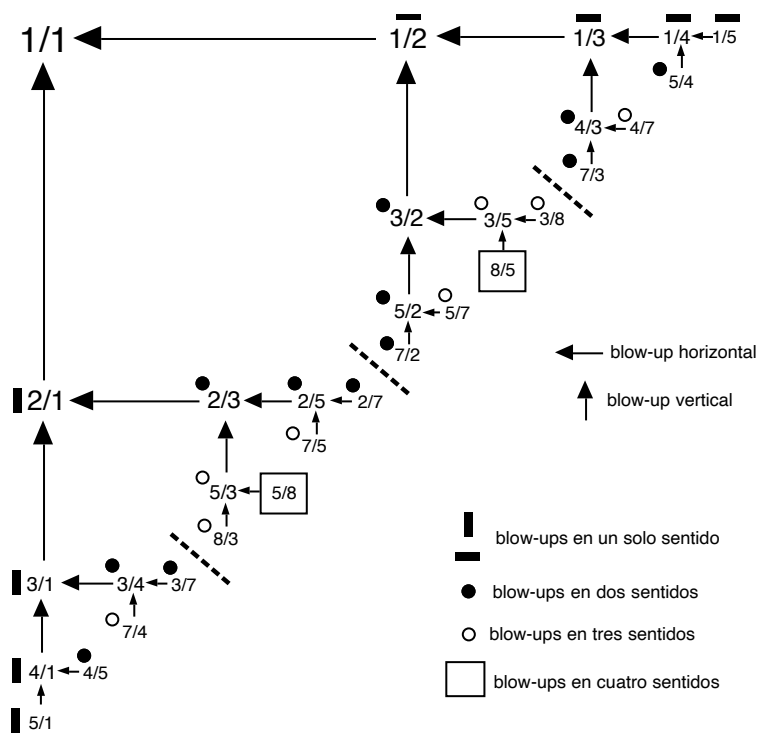
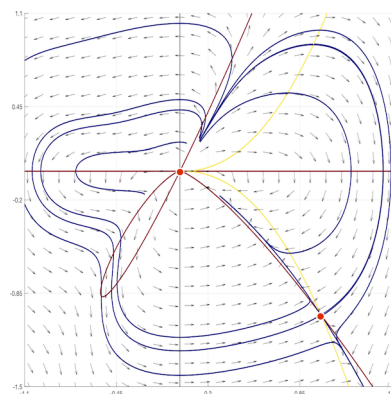


Precisar la estructura del origen mediante blow-ups es un trabajo largo. Para llevar el segmento inicial de pendiente  $-2/3$  (de potencias  $3/2$ ) a uno de pendiente  $-1$  al que se puedan aplicar las técnicas de 4.3 hay que hacer el habitual vertical  $x = xv$ ,  $y = xv$  y luego otro horizontal  $x = uv$ ,  $v = v$  para descomponer el origen en puntos simples. Si lo hacemos (y simplificamos las potencias habituales) se llega a:

$$\begin{cases} u' = u(6u - v + 4v^2 - 2v^3 + u^5v^2) \\ v' = v(v - 3u - 2v^2 + v^3 - u^5v^2) \end{cases} \rightarrow \Delta = uv(2v - 9u)$$

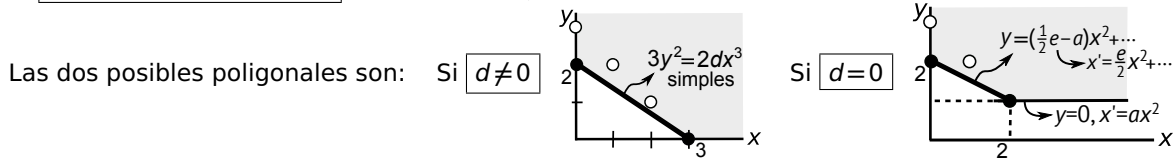
Sus variedades  $v = \frac{2}{9}u + \dots$  devuelven nuestras  $y^2 = \frac{2}{9}x^3 + \dots$

Esquemizamos ahora los blow-ups elementales necesarios para las potencias que exigen un número de ellos  $\leq 4$ :

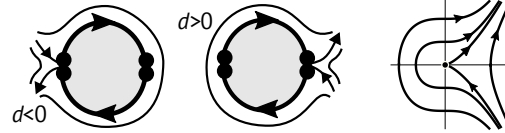


Clasifiquemos ahora el origen de los sistemas cuadráticos, caso de que sea punto crítico aislado con aproximación lineal no nula, pero con ambos autovalores 0. Supuestos en forma canónica serán:

Ej 5.  $\begin{cases} x' = y + ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = dx^2 + exy + fy^2 \end{cases} \rightarrow \Delta = -y^2$    $H_s = dx^3 + (e-sa)x^2y + (f-sb)xy^2 - scy^3 - sy^2$ .



En el caso  $d \neq 0$  la discusión es muy sencilla. Aparecen 'ángulos' a la izquierda o la derecha (como el del ejemplo 2 c) de 4.1), orientadas sus variedades con  $x' = \pm \sqrt{|x|}^{3/2} + \dots$

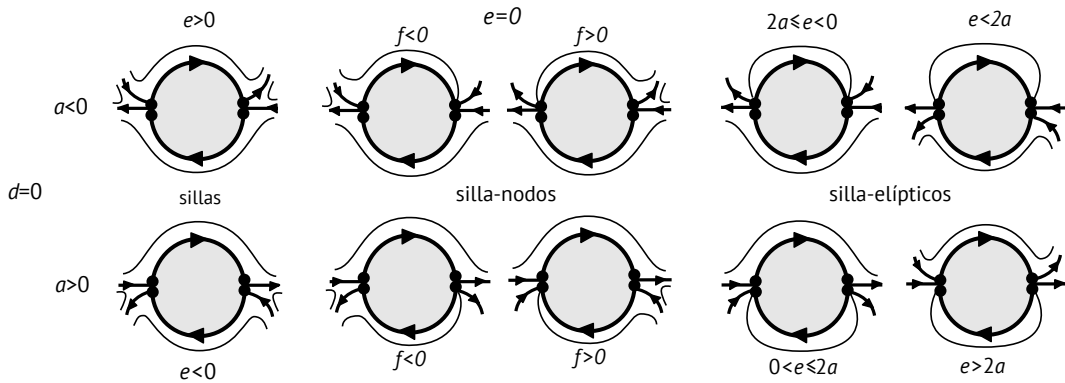


Para  $d = 0$  observemos primero que debe ser  $a \neq 0$ , pues si no sería  $y = 0$  recta de puntos críticos. Hay dos variedades simples salvo si  $e = 2a$  y el flujo sobre ambas queda determinado si  $e \neq 0$ . Si  $e = 2a$  pasa a ser doble  $y = 0$ , pero está asociada a  $x' = ax^2 + \dots$  (es  $P_f \neq 0$ ).

Si  $e = 0$  se necesita un término más de la variedad para orientarla. Llevamos  $y = -ax^2 + c_3x^3 + \dots$  a la ecuación de las órbitas (ya considerando  $d = e = 0$ ):  $(y + ax^2 + bxy + cy^2) \frac{dy}{dx} = fy^2 \rightarrow$

$$[c_3x^3 + \dots - bax^3 + \dots][ -2ax + \dots ] = f[a^2x^4 + \dots], \quad c_3 = ab - \frac{1}{2}af \rightarrow x' = -\frac{1}{2}afx^3 + \dots$$

que ya determina el flujo (si  $d = e = f = 0$  el origen no sería aislado). Con todo lo anterior se tiene:



A la derecha los mapas de

$$\begin{cases} x' = y + x^2 \\ y' = exy + 2y^2 \end{cases}$$

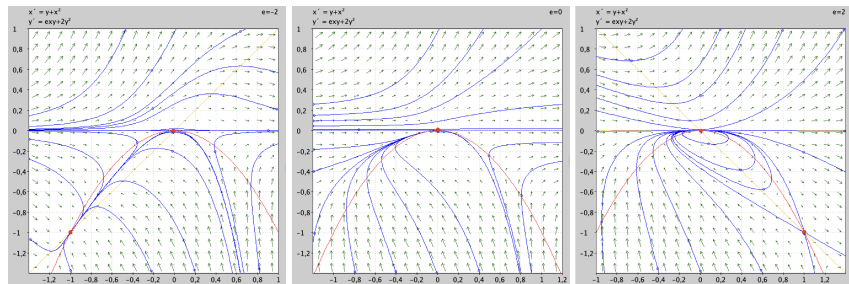
para  $e = -2$ ,  $e = 0$  y  $e = 2$ .

La variedad para  $e = 0$  es

$$y = -x^2 - x^3 + \dots,$$

y las órbitas si  $e = 2$  son:

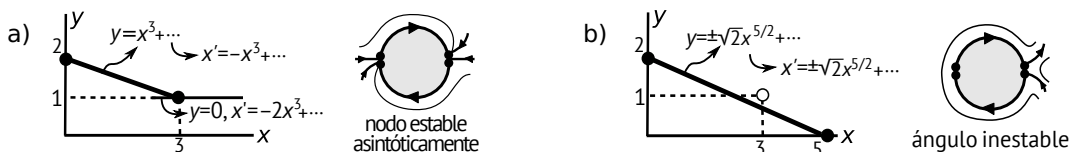
$$\frac{x^2}{y} + 2x - \ln|y| = C.$$



Un punto elemental asintóticamente estable o inestable conserva su estabilidad al añadir términos no lineales. Pero los importantes para los no elementales son precisamente los de la poligonal y términos de mayor orden en ella pueden influir más en la estructura que otros de orden menor.

Ej 6. a)  $\begin{cases} x' = y - 2x^3 \\ y' = -3x^2y \end{cases}$ , b)  $\begin{cases} x' = y + x^3 \\ y' = -3x^2y + 5x^4 \end{cases}$

La estabilidad asintótica del origen del sistema a) con términos hasta orden 3 cambia al incluir el de orden 4:



[Algo similar ocurre con el punto elemental  $x' = y + y^2$ ,  $y' = -x + y^2$  centro de la aproximación lineal y foco estable por los términos cuadráticos ( $I_3 = -2 < 0$ ), pero que cambia de carácter si añadimos un término cúbico. El origen es un foco inestable de  $x' = y + y^2 + x^3$ ,  $y' = -x + y^2$ , pues  $I_3 = 1 > 0$ ].