

4.9 Análisis del infinito

Investiguemos el comportamiento 'en el infinito' de las órbitas del sistema polinomial:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) = A^n(x, y) + \dots + A^m(x, y) \\ y' = g(x, y) = B^n(x, y) + \dots + B^m(x, y) \end{cases}, \text{ donde } m > n \geq 0.$$

Veremos que las técnicas serán muy similares a las del origen. Como sucedía allí, podremos concluir el análisis, salvo en casos muy excepcionales, sin realizar cambios de variable.

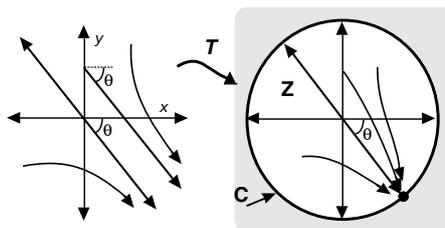
Nuestro objetivo será hacer un modelo de las órbitas de [S] sobre el círculo abierto unidad \mathbf{Z} , para el que cada punto de la circunferencia exterior \mathbf{C} representará un 'punto del infinito' asociado a una determinada dirección de llegada al infinito.

La forma más natural de convertir todo \mathbf{R}^2 en \mathbf{Z} es hacer esta transformación de coordenadas en el plano:

$$\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z} \quad (x, y) \rightarrow (x_*, y_*) \quad \text{con } x_* = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, y_* = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

O, de forma más clara, \mathbf{T} lleva puntos de coordenadas polares (r, θ) a puntos de \mathbf{Z} de coordenadas (r_*, θ) con

$$r_* = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (\text{es decir: } r = \frac{r_*}{\sqrt{1-r_*^2}}, \text{ para } r_* < 1).$$



\mathbf{T} lleva cada órbita Γ de [S] a otra curva Γ_* sobre \mathbf{Z} . Queremos describir las Γ_* cerca de \mathbf{C} , que nos informarán de las Γ cerca del infinito. Una curva que llega al infinito con pendiente m definida ($\theta = \arctan m$ definida) es transformada por \mathbf{T} en otra de \mathbf{Z} que tiende al punto de \mathbf{C} de coordenadas polares $(1, \theta)$. De otra forma: una curva de \mathbf{Z} que llega a un $(1, \theta)$ de \mathbf{C} corresponde a una curva del plano xy que llega al infinito con una pendiente $\tan \theta$.

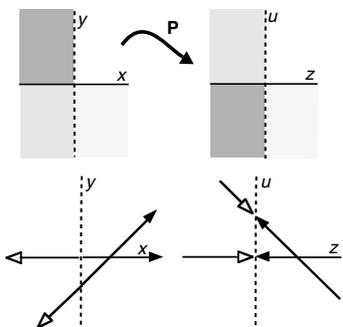
Para estudiar las órbitas inducidas por \mathbf{T} en \mathbf{Z} cerca de \mathbf{C} el cambio \mathbf{T} lleva a expresiones analíticamente poco sencillas, por lo que mejor el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{P}: \mathbf{R}^2 - \{x=0\} \rightarrow \mathbf{R}^2 - \{z=0\} \quad (x, y) \rightarrow (z, u) \quad \text{con } z = \frac{1}{x}, u = \frac{y}{x} \quad (x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z}).$$

que actúa en el plano de la siguiente forma fácil de comprobar:

- lleva los cuadrantes 1, 2, 3, 4 a los cuadrantes 1, 3, 2, 4.
- lleva rectas de pendiente m a rectas que 'pasan' por el punto $(z, u) = (0, m)$: $y = mx + b \rightarrow u = bz + m$, de modo que una serie de puntos que tiende a $+\infty$ [$-\infty$] sobre la recta se convierte en otra que tiende a $(0, m)$ por la derecha [izquierda].
- lleva curvas $y = cx^s + o(x^s)$ si $x \rightarrow \infty$ a las $u = cz^{1-s} + o(z^{1-s})$ cuando $z \rightarrow 0^+$, así que, para $z \rightarrow 0^+$:

$$\text{si } s > 1, u \rightarrow \pm\infty; \quad \text{si } s = 1, u \rightarrow c; \quad \text{si } \begin{matrix} 0 < s < 1 \\ s = 0 \\ s < 0 \end{matrix}, u \rightarrow 0 \text{ con pendiente } \begin{matrix} \text{horizontal} \\ c \\ \text{vertical} \end{matrix}.$$



- las curvas que llegan a un punto $(z, u) = (0, m)$ por la derecha [izquierda] provienen de curvas del plano xy con pendiente m en $+\infty$ [$-\infty$] y serán curvas en \mathbf{Z} que llegarán al punto del infinito $r = 1, \theta = \arctan m$ [$\theta = \arctan m + \pi$] (los cortes de $y = mx$ con la circunferencia \mathbf{C}).

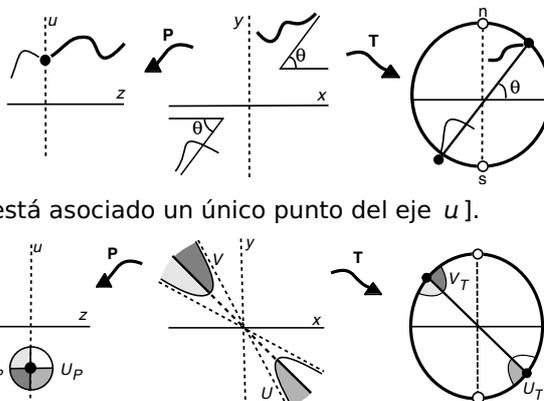
[A cada dos puntos de \mathbf{C} opuestos (salvo a n ó s) está asociado un único punto del eje u].

- un entorno circular de $(z, u) = (0, m)$ viene de dos entornos hiperbólicos de la recta $y = mx$

$$[(u - m)^2 + z^2 \leq R \Leftrightarrow R^2 x^2 - (y - mx)^2 \geq 1]$$

en el infinito y estará pues asociado a un par de semientornos de los puntos del infinito.

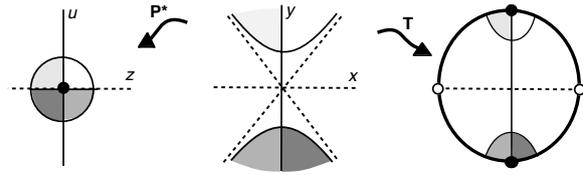
La descripción, pues, de un conjunto de curvas en U_p y V_p es una descripción de curvas de U_T y V_T , es decir, de curvas del plano "próximas en $+$ y $-$ infinito" a una determinada recta.



El cambio \mathbf{P} no informa sobre los polos norte y sur de \mathbf{Z} . Para completar la información hacemos un cambio \mathbf{P}^* , similar a \mathbf{P} , definido cambiando los papeles de x e y :

$$\mathbf{P}^*: \mathbf{R}^2 - \{y=0\} \rightarrow \mathbf{R}^2 - \{u=0\}, \quad z = \frac{x}{y}, \quad u = \frac{1}{y}.$$

$$(x, y) \rightarrow (z, u)$$



Ahora será el eje $u=0$ el asociado a la curva de puntos del infinito y un entorno del origen llevará a dos semientornos de los polos.

Con estas ideas vamos a obtener información sobre las órbitas de $[S]$ cerca del infinito. Los cálculos son parecidos a los de secciones previas, por lo que no daremos muchos detalles. Por ejemplo, para realizar el **análisis homogéneo** similar al de 4.3 hacemos los cambios \mathbf{P} y \mathbf{P}^* en $[S]$, dividimos por el factor común que aparece y obtenemos, respectivamente:

$$[\mathbf{P}] \begin{cases} z' = -zA^m(1, u) - \dots - z^{m-n+1}A^n(1, u) \\ u' = [B^m(1, u) - uA^m(1, u)] + \dots + z^{m-n}[B^n(1, u) - uA^n(1, u)] \end{cases}$$

$$[\mathbf{P}^*] \begin{cases} z' = [A^m(z, 1) - zB^m(z, 1)] + \dots + u^{m-n}[B^n(z, 1) - zA^n(z, 1)] \\ u' = -uB^m(z, 1) - \dots - u^{m-n+1}B^n(z, 1) \end{cases}$$

Sus puntos críticos respectivos en $z=0$ y en $u=0$ dan las únicas posibilidades de llegar a esos ejes, y englobando los resultados de ambos sistemas en una única expresión se obtiene que **las únicas posibles direcciones de llegada al infinito las dan las raíces de**

$$\otimes(x, y) \equiv xB^m(x, y) - yA^m(x, y).$$

Y argumentando como en 4.3 se obtiene este teorema muy similar al de allí:

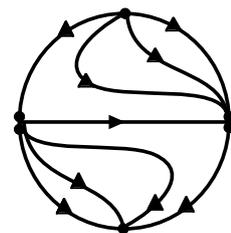
Teor 1.

Suponemos $\otimes(x, y) \neq 0$ y que $\otimes(x, y) = 0$ posee raíces reales $y = u_1x, \dots, y = u_qx$ [y quizás $x=0$]. Si para las u_i que no sean simples es $A^m(1, u_i) \neq 0$ [$B^m(0, 1) \neq 0$], existen en $[S]$ variedades $y = u_i x + o(x)$, $|x| \rightarrow \infty$ [ó $x = o(y)$, $|y| \rightarrow \infty$] que llegan al infinito con pendiente definida u_i [∞] y la estructura de las órbitas de $[S]$ cerca de la \mathbf{C} del infinito queda precisada con el signo de $\otimes(x, y)$ y el flujo sobre cada una de estas variedades, que vendrá dado por $x' = A^m(x, u_i x)$ si $A^m(1, u_i) \neq 0$, o, si es 0, se precisa con algún término más del desarrollo $y = u_i x + c_0 + c_{-1}x^{-1} + \dots$

[Con el teorema queda muchas veces determinada la estructura del infinito de $[S]$ si hay órbitas que llegan hasta \mathbf{C} . Si $\otimes(x, y)$ no tiene raíces reales (m será impar) se distingue entre las tres posibilidades cerca del infinito (que las órbitas sean cerradas, que se acerquen o que se alejen en espiral de \mathbf{C}) haciendo $\rho = 1/r$ en la expresión polar de $[S]$ y usando las técnicas de 4.4 y 4.5].

Ej 1. $\begin{cases} x' = 1 + x^2 + xy \\ y' = xy - y^2 \end{cases} \quad \otimes = -2xy^2, \quad y=0 \text{ doble} \rightarrow x' = x^2 + o(x^2),$
 $x=0 \text{ simple} \rightarrow y' = -y^2 + o(y^2).$

La estructura de las órbitas en el infinito queda fijada sólo con lo anterior: el signo de \otimes nos da la orientación de \mathbf{C} , las ecuaciones en x' e y' orientan las órbitas que llegan o salen de puntos del infinito y queda precisada la estructura local de dichos puntos [los asociados a $y=0$ son silla-nodos y los de $x=0$ son nodos]. Como además el sistema no tiene puntos críticos en \mathbf{R}^2 podemos completar el esquema de las órbitas en \mathbf{Z} .



Ej 2. $\begin{cases} x' = xy - x^3 + xy^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases}$ (ej 4. de 4.2) $\otimes = xy(x^2 - y^2) = 0, \quad y=0, \quad x=0, \quad y=\pm x.$
 $y=0 + o(x) \rightarrow x' = -x^3 + o(x^3).$

Para $x=0$ simple es $B^3(0, y) \equiv 0$. La variedad centro es $x=0 \rightarrow y' = -y$.

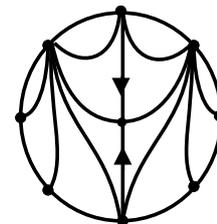
Como $A^3(x, \pm x) \equiv 0$ necesitamos más términos de los desarrollos. Se lleva a la ecuación de las órbitas: $y = c_1x + c_0 + c_{-1}x^{-1} + \dots$

$$[c_1 - c_{-1}x^{-2} + \dots][c_1x^2 - x^3 + c_1^2x^3 + 2c_0c_1x^2 + \dots] = x^2 - c_1x + \dots$$

Igualando las potencias de mayor orden: $x^3 \rightarrow c_1(c_1^2 - 2) = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_1 = \pm 1.$
 $x^2 \rightarrow c_1^2(1 + 2c_0) = 1, \quad c_0 \text{ imposible}, \quad c_0 = 0.$

La variedad asociada a $y=0$ no era centro y podía no admitir desarrollo pero el punto elemental estaba ya analizado. Para las otras dos tenemos: $y = \pm x + O(1/x) \rightarrow x' = \pm x^2 + O(x).$

Con esta información y la obtenida en 4.2 completamos el dibujo de las órbitas en \mathbf{Z} .



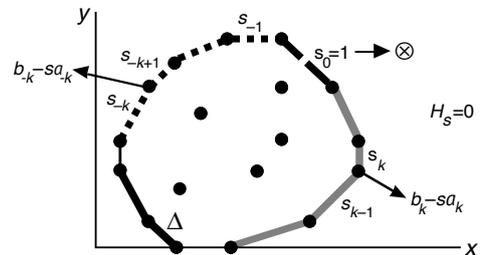
No es mucho más complicado el estudio, utilizando la **poligonal de Newton exterior**, de algunos casos no recogidos en el teorema 1: si hay $y=0$ múltiples con $A^m(1,0)=a_{m0}=0$ o bien $x=0$ múltiples con $B^m(0,1)=b_{0m}=0$.

[Y, aun siendo más largo, si la múltiple fuese $y=uix$, el cambio $x=x, w=y-uix$ llevaría el problema al primero de los anteriores, aunque (aquí y en el origen) puede ser preferible 'separar' (si se puede) variedades llevando series a la ecuación de las órbitas].

Para ello basta construir la poligonal asociada a la conocida $H_s(x,y)=xg(x,y)-syf(x,y)=0$ que rodea ahora por fuera al resto de puntos del sistema:

Como sabemos, la parte inferior izquierda informa de la estructura del origen (y su parte con $s=1$ da Δ).

Estudiando cómo los cambios \mathbf{P} y \mathbf{P}^* transforman la poligonal (que se convierte en otras analizables con lo visto en 4.8) se comprueba que $s_0=1$ da ahora \otimes , la parte derecha informa de las órbitas que llegan al infinito con pendiente horizontal y la izquierda superior sobre las que llegan con pendiente vertical.

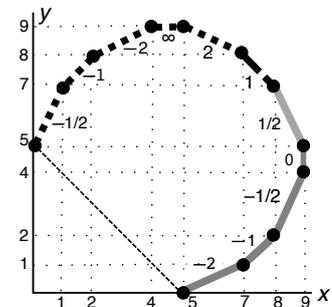


Un segmento de pendiente $-1/s_k$ de la parte derecha dado por un $P_k(x,y)=xP_{kg}-s_kyP_{kf}$, con raíz simple $y=mx^{s_k}$ [o múltiple con $P_k(1,m)\neq 0$] da lugar a una variedad que alcanza el infinito con tangente horizontal: $y=mx^{s_k}+o(x^{s_k})$.

Análogamente, si $y=mx^{s-k}$ es raíz simple o con $P_{-kf}\neq 0$ de un $P_{-k}=0$ existe variedad que se acerca al infinito (con tangente vertical) $y=mx^{s-k}+o(x^{s-k})$.

Como en el análisis del origen, el conocimiento de las variedades orientadas más el signo de \otimes basta en muchas ocasiones para precisar la estructura del infinito. Y como allí, se complican las cosas si el cociente de los coeficientes asociados a un punto común a dos segmentos sucesivos de la poligonal derecha cumple $b_k/a_k \in [s_k, s_{k-1}]$. Y en la parte izquierda los problemas aparecen cuando $b_{-k}/a_{-k} \in [s_{-k+1}, s_{-k}]$, entendiéndose este orden:

$$-2 \leq -1 \leq -\frac{1}{2} \leq 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \leq 2 \leq \pm\infty \leq -2 \leq -1 \leq -\frac{1}{2}.$$



[Observemos que, a diferencia del origen, puede haber problemas aunque a . o b . sean 0].

Si b_{\bullet}/a_{\bullet} pertenece al intervalo abierto aparecen como en el origen infinitas variedades de la forma $y=O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ (asociadas a nodos) que llegan al infinito. Cuando $b_{\bullet}/a_{\bullet}=s_{\bullet}$ ó $s_{\bullet-1}$ (ó $s_{\bullet+1}$ a la izquierda) deberemos orientar además otra circunferencia con el signo de P_{\bullet} .

Resumamos lo anterior (más detalles en la tesis) en un teorema similar a de la sección 4.8:

Si $y=m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}$, $x \geq 0$, es raíz real simple de $P_{\bullet}=0$ o múltiple con $P_{\bullet f}(1, m_{\bullet\bullet}) \neq 0$, existe en $[S]$ variedad de la forma $y=m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}+o(x^{s_{\bullet}})$, con $x \rightarrow \infty$ (para s_k) o con $x \rightarrow 0$ (para s_{-k}). Análogo resultado se tiene cambiando x por $[-x]$.

Teor 2. Si ningún $P_{\bullet} \equiv 0$ y cada raíz de $P_{\bullet}=0$ (con $m_{\bullet\bullet} \neq 0$) es simple o con $P_{\bullet f}(1, m_{\bullet\bullet}) \neq 0$ la estructura de las órbitas de $[S]$ en el infinito queda determinada por

- el flujo para $|x|$ o $|y|$ grande sobre cada variedad
- el signo de \otimes y el signo de los P_{\bullet} para los que sea $\frac{b_{\bullet}}{a_{\bullet}}=s_{\bullet}$ ó $s_{\bullet \pm 1}$ ($\bullet < > 0$).

Como en el origen, para determinar el flujo sobre las variedades $y=m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}$ basta hallar $P_{\bullet f}(x, m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}})$ (o el $P_{\bullet g}$ correspondiente) si no se anula; si se anula y la raíz es simple la variedad será esencialmente centro y se podrán calcular más términos de su desarrollo.

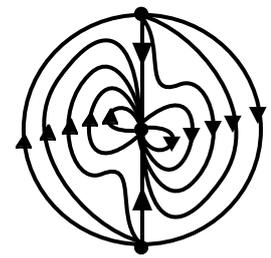
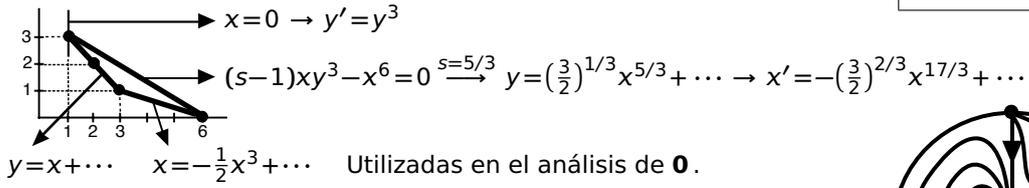
La forma de las órbitas entre dos variedades consecutivas, se deduce del signo de \otimes (sin olvidar las posibles variedades $y=O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ asociadas a nodos descritas y el cambio de flujos 'verticales' que acarrearán), si $b_{\bullet}/a_{\bullet} \neq s_{\bullet}$ ó $s_{\bullet \pm 1}$ (si no, habrá que fijar también el signo de P_{\bullet}).

Sólo quedan por analizar con este teorema los casos análogos a los citados en la sección anterior 4.8: si existen $m_{\bullet\bullet}$ múltiples con $P_{\bullet f}=0$, si algún $P_{\bullet} \equiv 0$ y si no hay variedades que lleguen al infinito con pendiente definida.

Este caso (como se puede leer en la tesis) se podría reducir a las situaciones de los teoremas 4.4 y 4.5 en el caso de que la poligonal exterior se redujese a un único segmento apoyado en los ejes. No sabemos como distinguir el centro o foco del infinito si no es esa la situación.

Ej 3. Volvemos por última vez a nuestro atractor inestable mirando su infinito:

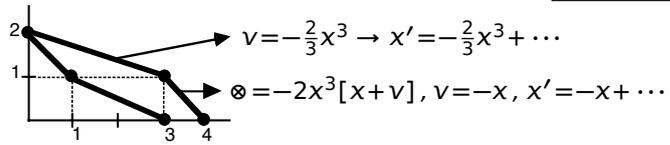
$$\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$$



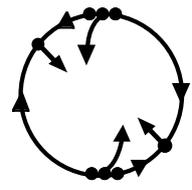
Llevando estas variedades a **Z** completamos el análisis del infinito y, con lo visto ya en tres secciones anteriores, completamos el retrato de fases global de la figura. En este dibujo se observa más claramente que el origen es un **atractor inestable**: todas las soluciones tienden hacia él cuando $t \rightarrow \infty$, pero $x=y=0$ no es una solución estable.

Ej 4. $x'' + (2x^2 - 3)x' - x^2 + 2x^3 = 0$, es decir,

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = 3v + x^2 - 2x^3 - 2x^2v \end{cases}$$



El infinito es repulsor.



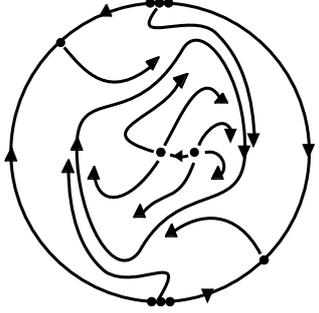
Sus puntos críticos finitos son $(0, 0)$ [un silla nodo, con variedad centro $y = -x^2/3$ y el otro $\lambda = 3$] y el $(1/2, 0)$ [nodo inestable de autovalores $\lambda_1 \approx 2.28$ y $\lambda_2 \approx 0.22$].

Comprobemos que existe (al menos) un ciclo límite (la ecuación es similar a la de Van del Pol).

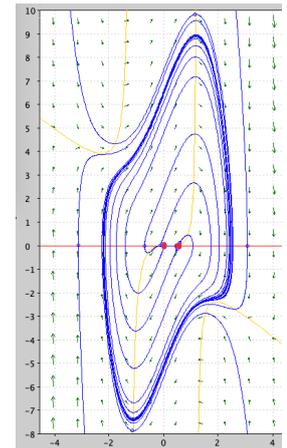
La energía total del sistema sin rozamientos es: $U(x, y) = \frac{v^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$.

Y su derivada a lo largo de las soluciones del sistema: $\dot{U} = v^2(3 - 2x^2)$.

Como $\dot{U} > 0$ si $|x| < \sqrt{3/2}$, y, por ejemplo, $U = 1/6$ está contenida en la banda (pues corta $v=0$ en $x=1$ y en otro punto entre -1 y $-1/2$), esa curva cerrada es cruzada por las órbitas del sistema de dentro hacia fuera. Las órbitas no pueden irse al infinito, ni hacia ninguno de los dos puntos críticos finitos y deben aproximarse a un ciclo límite.



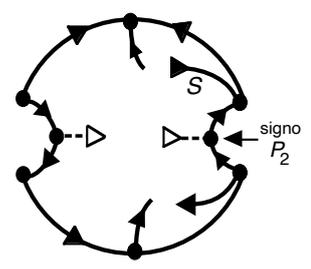
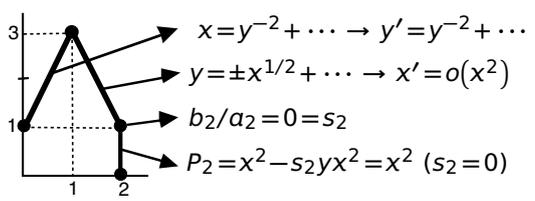
A la izquierda se presenta un esquema de las órbitas en **Z** y a la derecha el dibujo elaborado a partir de las soluciones numéricas del pplane que muestra el único ciclo.



Ej 5. $\begin{cases} x' = 1 + x^2 - xy^2 \\ y' = x \end{cases}$

$$\otimes = xy^3$$

$$A^3(x, 0), B^3(0, y) \equiv 0$$

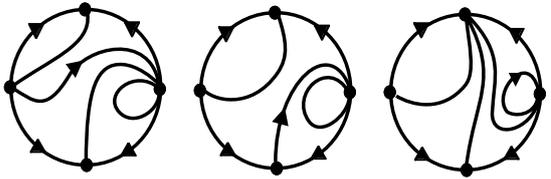


En el ejemplo 'se va' un término de la poligonal (lo que suele suceder si algún s_i es 0 ó ∞ , como en este caso con un segmento vertical) y es necesario considerar, además del de \otimes el signo de algún P_i .

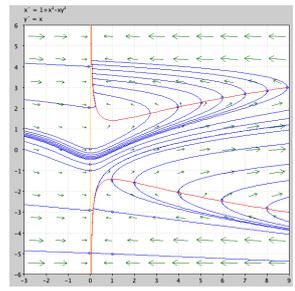
Necesitamos más términos de las variedades $O(x^{1/2})$ para precisar el flujo sobre ellas.

Probando series obtenemos: $y = x^{1/2} - 1 + \dots \rightarrow x' = x^{3/2} + o(x^{3/2})$.

Queda fijada la estructura del infinito. Como no hay puntos críticos finitos tenemos, en principio, tres posibilidades para el mapa global, dependiendo de cuál sea el origen de la separatriz S .



El dibujo aproximado del pplane indica que puede ser el primer caso.



Acabamos el libro con un ejemplo que usa técnicas de varias secciones. Empezamos clasificando un sistema homogéneo cúbico dependiente de un parámetro r y lo perturbamos después con un $-4y^5$.

Ej 6. [H] $\begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases}$

Con la notación de 4.5: $P_4(z, r) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + rz + 4$.
 $U = 28$, $V = 2(r-4)(9r-22)$, $D_4 = (284 + 27r)(8-r)(4-r)^2$.

P_4 tiene pues 4 raíces complejas si $r_n \equiv -\frac{287}{27} < r < 8$ y 2 reales y 2 complejas para los demás r .

Una condición necesaria para ser centro la proporcionaba $I_0 = -(8+r)(4+r)(4-r)(8-r)$.

Con más precisión, lo dice el signo de $N_2(Y, r) = 4(Y+5)(Y-3r+5)$ en Y_3 , menor raíz del polinomio:

$Q(Y, r) = Y^3 - 3(73-6r)Y - 27r^2 + 90r + 758$, factorizable en los tres casos sugeridos por el I_0 :

$Q(Y, -8) = (Y-5)(Y^2 - 5Y - 338)$, $Q(Y, -4) = (Y+17)(Y^2 - 17Y - 2)$, $Q(Y, 4) = (Y+14)(Y-7)^2$.

[H] será **centro** para $r = -4$, **focoE** si $r_n < r < -4$ y **focol** si $-4 < r < 8$.

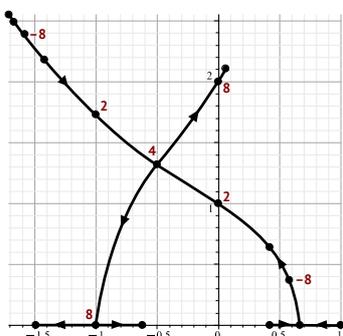
Con el dibujo de la derecha de $Q=0$ y de $N_2=0$ se reafirma lo anterior.

Y no hemos necesitado evaluar las integrales $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z^2 + 2z + r}{P_4(z, r)} dz$.

Sabemos factorizar el P_4 en muchas ocasiones. O pedirlo a Maple, que también sabe hallar raíces numéricas. Por ejemplo cuando $D_4 = 0$:

$(z - \frac{2}{3})^2(z^2 + \frac{10}{3}z + 9)$, $(z^2 + z + 2)^2$, $(z^2 + 4)(z + 1)^2$ [$r_n, 4, 8$].

[Abajo se muestra la evolución de los autovalores con r]:



Vemos ahora los casos con raíces **reales**, asociados al 'autovalor' $\lambda = -z^2(z+1)$.

Si $r = r_n$, el $z_d = \frac{2}{3}$ está asociado a $\lambda = -\frac{20}{27}$.

Si $r = 8$, el $z_d = -1$ doble tiene además $\lambda = 0$ y habrá una recta de puntos críticos.

Dividiendo por el factor común $x+y$ queda:

$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = 4x^3 + 4xy + y^2 \end{cases}$, $P_3 = (z^2 + 4)(z + 1)$, $z = -1 \rightarrow \lambda = -1$.

Si $r < r_n$, las dos z_1, z_2 son positivas y serán sus $\lambda < 0$.

Si $r > 8$, son $z_1 < -1 < z_2 < 0$ y así serán $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.



[Una forma corta de comprobar los dos últimos casos es mirar los cortes de $z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 4$ y $-rz$].

Aunque no la hemos necesitado para concluir nuestro análisis, veamos que nos informaría la 'ecuación de autovalores' de 4.5, que para este ejemplo sí calculamos completa:

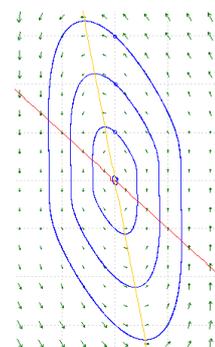
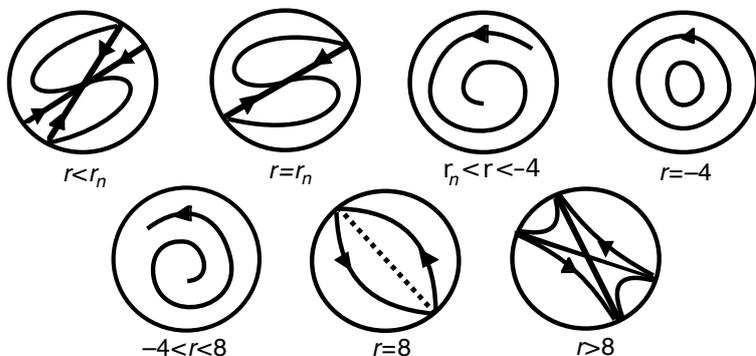
$Q_4(\lambda) = \lambda^4 + (16-3r)\lambda^3 + (3r^2-21r+56)\lambda^2 + (8-r)(r^2+4r-24)\lambda + 16(8-r) = 0$.

Se deduce inmediatamente la presencia del único $\lambda = 0$ (y que es doble) para $r = 8$. También es claro que si $r > 8$, por ser $s_\lambda < 0$ hay necesariamente algún $\lambda > 0$ y el origen es inestable.

No es nada fácil, en general, probar con el Q_4 una EA (tampoco habla de lo que pasa si no hay z reales). Pero aquí, aunque no informe del intervalo $(r_n, 8)$, sí podemos comprobar que si $r < r_n$ sus dos raíces λ son negativas. Basta ver que todos los coeficientes son positivos (para unos es obvio y el r_λ lo es a la izquierda de -8). La ley de Descartes de los signos impide que haya positivas.

Su discriminante $D_\lambda = (284+27r)(8-r)(4-r)^2(r^3+44r^2-256r-256)^2$ vuelve a darnos los r que vienen de z dobles de arriba y otros que no nos aportan información útil por estar asociados a z complejos.

Hemos concluido el análisis de [H] cuyo mapa, por ser homogéneo, es global:



El centro con pplane si $r = -4$:

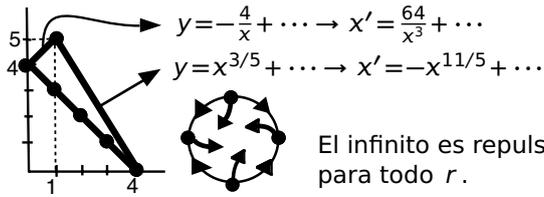
Como sabemos, si perturbamos [H] con términos de mayor orden la estructura del origen se mantiene, excepto si $r = -4$ y $r = 8$, en que hay que seguir calculando. Lo mismo sucede con el infinito si añadimos términos de grado 2 o menor. Se ve que el origen, único punto crítico finito, es asintóticamente estable para $r < -4$ (o sea, el infinito repele si $r < -4$).

El término que añadimos va a tender a inestabilizar el infinito como veremos con su análisis:

$$[P] \begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 - 4y^5 \end{cases}$$

$$\otimes = -4xy^5. \quad x=0 \rightarrow y' = -4y^5 + \dots$$

Para $y=0$ necesitamos la poligonal.



El infinito es repulsor para todo r .

$(\pm \frac{1}{2}\sqrt{r-8}, \mp \frac{1}{2}\sqrt{r-8})$ son nuevos puntos críticos que se suman al origen para $r > 8$. Ambos son focos estables si $8 < r < \frac{17}{2}$ y nodos estables si $r \geq \frac{17}{2}$ [$\lambda^2 + (r-8)^2\lambda + \frac{1}{8}(r-8)^3 = 0$].

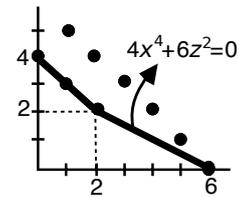
Vamos ya con los casos dudosos. Si $r = -4$ el empuje del infinito hará que el centro pase a ser foco estable (de lenta aproximación al origen). Se comprobará numéricamente (en la tesis, con más teoría, se da una prueba analítica). Entonces para todo $r \leq -4$ el origen será globalmente asintóticamente estable (atraerá a toda órbita). Además esperamos que si $r \in (-4, 8)$, el foco inestable, único punto crítico que sabemos que se conserva, hará que aparezca un ciclo límite.

Para $r=8$ el sistema se puede escribir $\begin{cases} x' = -(y+x)y^2 \\ y' = (y+x)(y+2x)^2 - 4y^5 \end{cases}$,

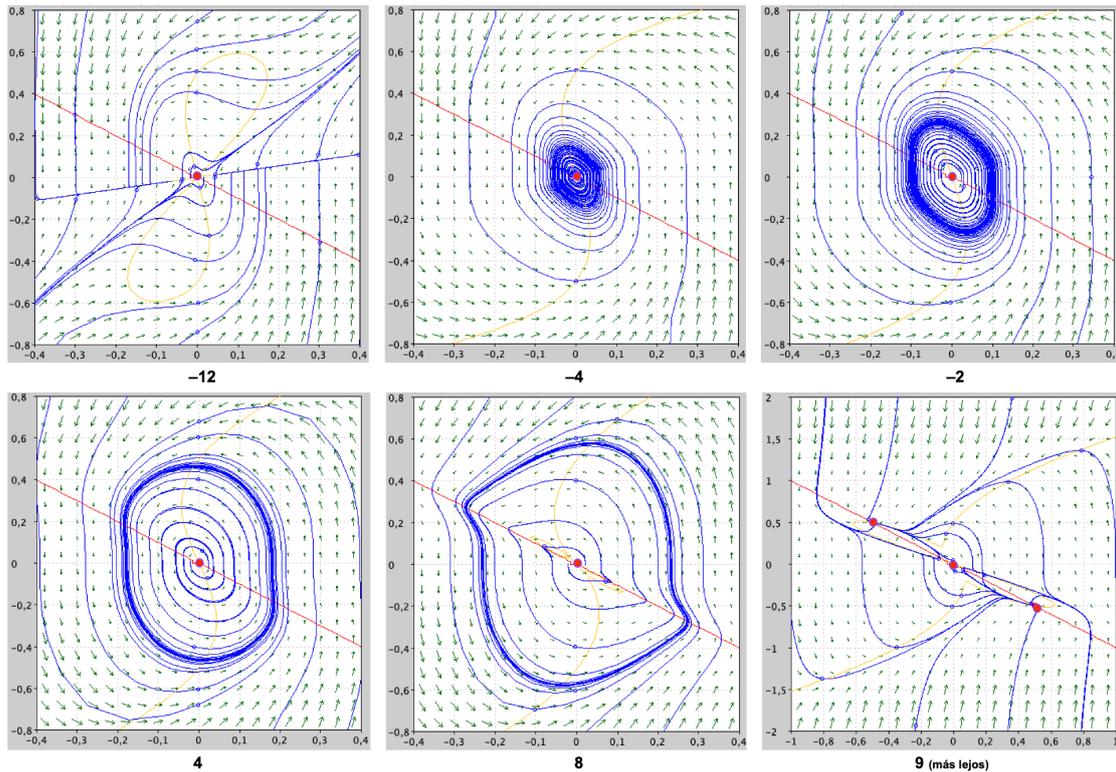
que haciendo $z=y+x$, para llevar el problema a $y=0$, pasa a ser:

$$\begin{cases} x' = -z(z-x)^2 \\ y' = 4xz^2 - 4(z-x)^5 \end{cases} \rightarrow \Delta = z^2[4x^2 + (z-x)^2].$$

El origen será un centro o un foco de los complicados. Como es foco inestable si $-4 < r < 8$, es de esperar que lo siga siendo para $r=8$.



Pasamos a presentar los dibujos de mapas de fases del pplane de [P] para diversos valores de r (las escalas no son las mismas en ambos ejes):



Si $r = -12$ hay nodo estable, en -4 se ve el foco estable previsto, $r = -2, 4, 8$ poseen ciclos límite y para $r = 9$ se observan los dos nodos estables, se mantiene la silla del [H] y ya no existen ciclos.

La integración numérica no deja claro si pudiera aparecer algún otro ciclo límite para valores de r algo superiores a 8.

A la derecha se muestra el dibujo para 8.1, donde quizás haya uno inestable que rodea la silla y los dos focos estables.

