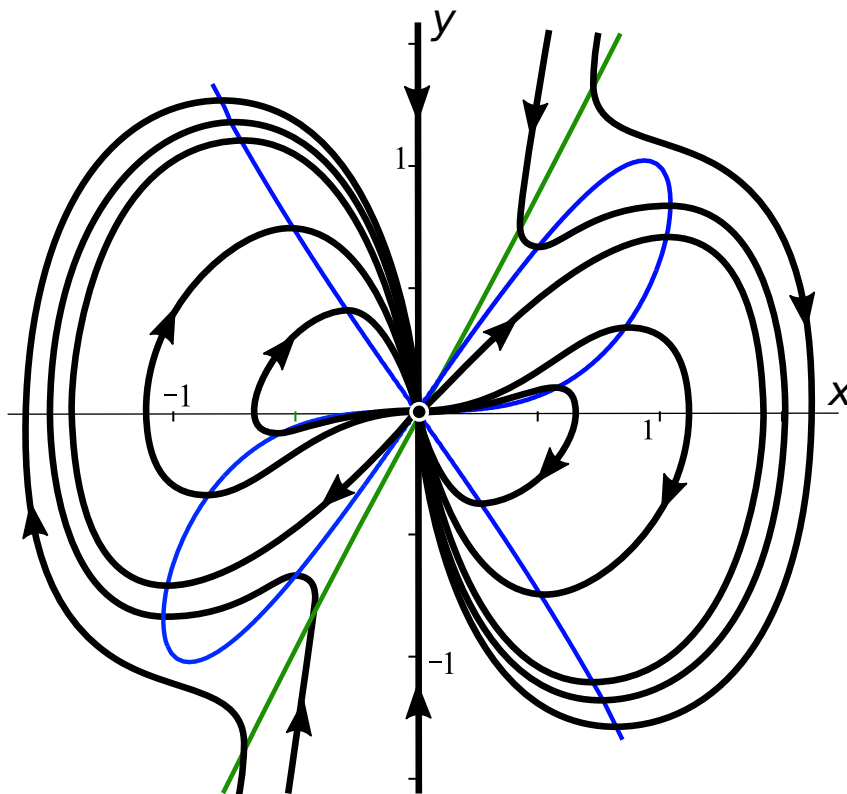


Ecuaciones diferenciales ordinarias y mapas de fases



Pepe Aranda Iriarte
pparanda@ucm.es

Índice	ii
Introducción	3
1. Ecuaciones de primer orden	5
1.1 Métodos elementales de resolución	7
1.2 Dibujo aproximado de soluciones	8
1.3 Existencia, unicidad, prolongabilidad	13
1.4 Estabilidad	18
1.5 Ecuaciones autónomas	21
2. Sistemas y ecuaciones lineales de orden 2	25
2.1 Propiedades generales	26
2.2 Soluciones de sistemas y ecuaciones lineales	28
2.3 Estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales	37
3. Técnicas básicas de mapas de fases	39
3.1 Sistemas de dos ecuaciones autónomas	40
3.2 Clasificación de puntos críticos elementales	43
3.3 Sistemas y ecuaciones exactos	50
3.4 ¿Centro o foco? Técnicas sencillas	54
3.5 Cambio de estabilidad de centros elementales	58
3.6 Funciones de Lyapunov	61
4. Puntos no elementales	63
4.1 Ejemplos con puntos no elementales	64
4.2 Puntos críticos con un único autovalor cero	66
4.3 Análisis de puntos ‘poco degenerados’	68
4.4 Centros y focos de puntos poco degenerados	75
4.5 Polinomios de grados 3 y 4 e integrales racionales	79
4.6 Ejemplos con ciclos límite	85
4.7 Volviendo a la estabilidad	87
4.8 Utilizando la poligonal de Newton	89
4.9 Análisis del infinito	93
Bibliografía	99
Problemas 1	101
Problemas 2	102
Problemas 3	103
Problemas 4	104
(aún no escrito)	

Introducción

El objetivo de este libro es dar la teoría básica de **ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDOs) y sus sistemas y avanzar algunos pasos en temas más complicados que fueron parte de mi tesis doctoral. Los **mapas de fases**, parte de esa teoría, dejaron de estar en el plan del grado en física de la UCM en que yo los explicaba. Este libro fue naciendo poco a poco unido a la dirección de trabajos de fin de grado, pues iba transcribiendo a LaTeX las técnicas más básicas de la tesis dando material para esos TFGs. Y los últimos años también incluí otros cálculos más complicados con **puntos no elementales**.

Los dos primeros capítulos provienen, esencialmente, los 'Apuntes de Ecuaciones Diferenciales I' (de su versión 09), el 3 contiene ya otras aportaciones y el 4, en su mayoría, está extraído de la tesis.

Una **ecuación diferencial** es aquella en la que hay derivadas de una función incógnita. Si tal función es de una variable la ecuación se llama **ordinaria**, único tipo que aparece en este libro. Si es de varias variables, se dice en derivadas parciales. Ejemplos de EDOs son:

- [1] $y'(t) = -ay(t)$ [ecuación que rige la desintegración radiactiva]
- [2] $y'(t) = by(t)[M - y(t)]$ [describe la evolución de una población animal]
- [3] $(1-t^2)x''(t) - 2tx'(t) + px(t) = 0$ [ecuación del Legendre]
- [4] $x''(t) + c \operatorname{sen}[x(t)] = 0$ [ecuación del péndulo]
- [5] $x^{iv}(t) + dx(t) = 0$ [ecuación de las vibraciones de una viga]

Y son ecuaciones en derivadas parciales, por ejemplo:

- [6] $u_x^2 + u_y^2 = 1$, con $u = u(x, y)$ [ecuación eikonal o de la óptica geométrica]
- [7] $u_t - k[u_{xx} + u_{yy}] = F(x, y, t)$, $u = u(x, y, t)$ [ecuación del calor en el plano]

(en las ecuaciones anteriores a, b, M, p, c, d, k son constantes y la F función conocida).

Se llama **orden** de una ecuación diferencial al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella. Así, [1], [2] y [6] son de primer orden; [3] y [5] y la EDP [7] de segundo orden, y la EDO [6] es de cuarto orden. La ecuación se dice **lineal** cuando las funciones incógnitas y sus derivadas sólo aparecen como polinomios de grado uno. Según esto, son lineales [1], [3], [5] y [7] (aunque su F sea tan complicada como se quiera) y no lo son las otras tres, [2], [4] y [6].

Solución de una ecuación de orden n es una función, n veces derivable, que al ser llevada a la EDO la convierte en una identidad. Así, $y(t) = e^{-at}$ es solución de [1] pues $y'(t) = -ae^{-at} = -ay(t)$. Más aún, lo es toda función $y(t) = Ce^{-at}$ para cualquier constante C . A esta expresión que, como veremos, recoge todas sus soluciones, se le llama **solución general**. Para precisar una **solución particular** se debe imponer además alguna **condición inicial**. Al conjunto de la EDO y el dato inicial se le llama **problema de valores iniciales**. Para [1], de primer orden, basta dar el valor de la solución en un instante t dado: por ejemplo, $y(0) = 7$ determina $y(t) = 7e^{-at}$. La solución general de una EDO de orden n contendrá n constantes arbitrarias y deberemos dar n datos iniciales (para [4], los valores de x y x' en $t=0$ o en cualquier otro $t=t_0$). [Las condiciones adicionales para aislar una solución única de una EDP son más complicadas y variadas].

Aunque sería nuestro principal deseo ante cualquier ecuación diferencial, **hallar su solución general sólo será posible en contadas ocasiones** incluso para las EDOs de primer orden. Será más difícil cuanto mayor sea su orden, más para las ecuaciones no lineales, y más aún para las EDPs. Parte de la teoría de las ecuaciones diferenciales describe los escasos métodos de resolución. Pero otra parte importante se dedica a obtener información sobre las soluciones de una ecuación **sin necesidad de resolverla**: ¿cuándo tiene un problema de valores iniciales solución única?, ¿qué aspecto tiene la gráfica de las soluciones?, ¿cómo se comportan en el infinito? ...

Pasando al detalle, el **capítulo 1** se dedica a las **ecuaciones de primer orden** $y' = f(t, y)$ (no suele escribirse la dependencia de t). Comienza describiendo los métodos elementales de integración y pasa pronto al resto de la teoría: el dibujo aproximado, la existencia y unicidad (si las funciones que aparecen en la ecuación son discontinuas o no derivables puede que no haya solución o que haya más de una satisfaciendo un dato inicial), prolongabilidad (¿en qué intervalo está definida cada solución?), estabilidad (¿se parecen entre sí las soluciones con datos iniciales próximos para t grande?). Y acaba el capítulo con la sección dedicada a la **ecuaciones autónomas**, las de la forma $y' = f(y)$, primera aproximación a los dos últimos capítulos del libro: los sistemas autónomos de segundo orden. En esta sección 1.5 ya van apareciendo varias novedades respecto los viejos apuntes de la licenciatura.

El **capítulo 2** trata las **ecuaciones de segundo orden** y los **sistemas de 2 ecuaciones de primer orden** sobre los que más información se obtiene y que más veces son resolubles, los **lineales**:

$$[e] \quad x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \quad [S] \quad \begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ y' = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{cases}$$

Primero se generalizan las definiciones y propiedades estudiadas de las ecuaciones de primer orden. Luego se ven los sistemas de 2 EDOs lineales de orden 1 y las ecuaciones lineales de orden 2 (siempre resolubles si los coeficientes son constantes, por ser calculables los autovalores de una matriz), viendo en particular su estabilidad. El capítulo es un recorte del de los apuntes de EDOs (allí se trata el más complicado caso general), que se mantiene en este libro para obtener información sobre los sistemas no lineales de los últimos dos capítulos.

El **capítulo 3** es el primero dedicado a los dibujos (llamados **mapas de fases**) de las proyecciones sobre un plano de las soluciones de los **sistemas de dos ecuaciones autónomas** [y, como un caso particular, de las ecuaciones autónomas de segundo orden]:

$$[S] \quad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad [x'' = g(x, x')] \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = g(x, v) \end{cases}$$

En estos sistemas casi nunca se podrá hallar su solución general, pero muchas propiedades de sus soluciones estarán a la vista en su mapa de fases. Tras tratar resultados generales, se clasificarán los mapas de fase cerca de los puntos proyección de sus soluciones constantes (de sus **puntos críticos**), a partir de los fáciles dibujos de los sistemas lineales. Se hace sólo en el caso sencillo de autovalores no nulos de la 'aproximación lineal', que son los llamados **puntos elementales**. Se presentarán los nodos, sillas, focos, centros... Luego se estudia un tipo concreto de sistemas (los exactos) y se inicia el análisis del único caso dudoso de la clasificación dada: la distinción entre centro y foco cuando aparecen autovalores imaginarios puros. Las dos últimas secciones de este capítulo no estaban en los apuntes de EDI. La 3.5 (los coeficientes de Lyapunov) se traslada de la tesis y la 3.6 (el método directo de Lyapunov) de apuntes de un plan anterior.

En el **capítulo 4**, contiene diversos resultados relacionados con **puntos no elementales** (puntos críticos con autovalores cero). Salvo bastantes ejemplos de 4.1, que provienen de los apuntes de EDI, la mayor parte del material es un deseo de divulgar los resultados más prácticos de mi tesis (Métodos simples para el análisis de puntos degenerados de sistemas analíticos planos). Para ello se han reescrito y simplificado diversos apartados y ejemplos de ella. Se empieza en 4.2 con el estudio de los puntos con **sólo un autovalor 0**, que pueden ser nodos, sillas o silla-nodos, y que basta para distinguirlos hallar algún término de su 'variedad centro' y llevarla a la ecuación de x' .

En 4.3 se tratan los que llamo **puntos poco degenerados**, aquellos en las que basta un único cambio de variable para descomponerlos en puntos elementales o con un autovalor cero. Esos puntos serán similares a su 'aproximación homogénea' de grado n . Para hacer su dibujo bastará entonces ver el signo de un polinomio P_{n+1} entre sus raíces, llevar estas raíces (vienen a ser sus 'vectores propios') a la ecuación de x' (sus 'autovalores') y, en el peor de los casos, calcular términos de una 'variedad centro'. Sólo deja por clasificar esta sección los posibles centros y focos, aquellos en que $P_{n+1} \equiv 0$ y los puntos para los que exista algún 'vector propio' múltiple con 'autovalor' 0.

La 4.4 se dedica a distinguir los **centros y focos** de puntos poco degenerados, aquellos para los que el P_{n+1} no tenía raíces reales. La estabilidad la dará el signo de una integral (no calculable en general) de un cociente de polinomios que se obtienen de su 'aproximación homogénea': $I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} E_{n-1}/P_{n+1} dz$.

En 4.5 se estudian en general los **polinomios** de tercer y cuarto grado y sus integrales, para abordar problemas más complicados que los de las dos secciones anteriores.

En 4.6 veremos puntos elementales y no elementales, en los que aparecen **ciclos límites** y en 4.7 volveremos a mirar la **estabilidad** usando los resultados ya vistos.

Las dos últimas secciones ya no se proponían para estudiar en ninguno de los TFGs que dirigía. En 4.8 se describirá la utilidad de la **poligonal de Newton** para el análisis de puntos no 'poco degenerados'. Con ella podremos precisar la estructura de la gran mayoría de ellos sin necesidad de hacer ningún cambio de variable, que es la técnica habitual para estudiar los puntos no elementales. Y en 4.9 nos dedicaremos al **estudio del infinto** con métodos muy parecidos a los del origen.

1. Ecuaciones de primer orden

Este capítulo está dedicado a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con la variable despejada, es decir, a las ecuaciones

$$[e] \quad y'(t) = f(t, y(t)), \text{ o como usualmente se escriben, } [e] \quad \boxed{y' = f(t, y)}$$

[utilizaremos en la teoría la notación $y(t)$, intermedia entre las más usuales $y(x)$ ó $x(t)$, pues la y siempre aparece como variable dependiente y la t como variable independiente].

Primero intentaremos resolver [e]. Esto se consigue en muy escasas ocasiones, incluso para estas ecuaciones de primer orden, las más sencillas de todas. En la sección 1.1 hallaremos la solución de los pocos tipos de **ecuaciones resolubles**: separables, lineales, exactas y otras que se pueden reducir a ellas mediante cambios de variable (homogéneas $y' = f(y/t)$, de la forma $y' = f(at + by)$, de Bernouilli, de Riccati, factores integrantes...).

Dedicaremos el resto del capítulo a obtener información sobre las soluciones de [e] sin necesidad de resolverla. Como cada una de ellas es una función $y(t)$, el conjunto de las soluciones de [e] describirá una familia de curvas en el plano ty (una para cada constante arbitraria C). En la sección 1.2 veremos como hacer un **dibujo aproximado** de estas curvas a partir del 'campo de direcciones', conjunto de segmentos con pendiente proporcionada por la $f(t, y)$. Describiremos, en varios ejemplos, cómo dibujar este campo a través de las llamadas 'isoclinas', cómo hallar posibles rectas solución y localizar los puntos de inflexión..., e introduciremos el concepto de 'curva integral'.

En la sección 1.3 veremos la teoría de existencia y unicidad. Para un problema de valores iniciales (es decir, para una ecuación y un dato inicial dados):

$$[P] \quad \boxed{\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

el **teorema de existencia y unicidad** (TEyU) asegurará que si f y la parcial f_y son continuas en un entorno del punto (t_0, y_0) habrá una única solución $y(t)$ de [P], definida al menos en un pequeño intervalo que contiene a t_0 (gráficamente, por ese punto pasará una única curva solución). Si la f no es tan regular, podría no haber solución o existir más de una. Por ejemplo, $y \equiv 0$ e $y = t^3$ son soluciones distintas de $y' = 3y^{2/3}$ que cumplen el dato inicial $y(0) = 0$ (f_y no es continua en $y = 0$). Más complicado será determinar si el máximo intervalo en que dicha solución está definida es finito o infinito (**prolongabilidad**). Es posible, incluso para ecuaciones con f suaves en todo el plano, que una solución no esté definida para todo t . Por ejemplo, la solución única de $y' = y^2$ con $y(-1) = 1$, que es $y = -1/t$, sólo está definida en $(-\infty, 0)$ [$y = -1/t$ define otra solución distinta para $(0, \infty)$].

En 1.4 veremos que si f es buena la solución de [P] se parecerá siempre, cerca de t_0 , a la de los problemas obtenidos variando un poco el dato inicial y_0 . Pero no siempre las soluciones con datos próximos siguen cerca de ella en todo (t_0, ∞) [cuando lo hacen, la solución de [P] se dirá **estable**, y **asintóticamente estable** si además la diferencia entre soluciones tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$]. Por ejemplo, las soluciones $y \equiv 0$ e $y = y_0 e^t$ de $y' = y$, con y_0 muy pequeño, que son muy próximas cerca de $t = 0$, son muy distintas para grandes valores de t . Al estudio de la estabilidad (en general complicado), en especial para las ecuaciones **lineales** (para ellas es fácil), está dedicada principalmente la sección.

La sección 1.5 estudia las llamadas **ecuaciones autónomas** $y' = f(y)$ sobre las que es posible conseguir muchísima información sin conocer su solución: haremos fácilmente su dibujo aproximado hallando sus soluciones constantes y estudiando el signo de $f(y)$, y de él se deducirán inmediatamente, por ejemplo, las propiedades asintóticas de sus soluciones (para ecuaciones no autónomas, de un dibujo no se deduce la estabilidad). La sección nos dará, también, algunas ideas que se generalizarán en el estudio de los sistemas autónomos, que es a lo que se dedica principalmente este libro. En esos capítulos finales volveremos a necesitar EDOs de primer orden calculando sus órbitas [que serán $y(x)$ y, a veces, $v(x)$].

1.1 Métodos elementales de resolución

Ecuaciones separables.

Son las que se pueden escribir en la forma [s] $y' = \frac{p(t)}{q(y)}$.

Entonces $\int q(y)dy = \int p(t)dt + C$, y si son calculables sus primitivas P y Q : $Q(y) = P(t) + C$.

Si pudiésemos despejar y de la última ecuación obtendríamos explícitamente la solución general; si no, la solución vendría dada implícitamente. Se dice que una ecuación es resoluble si se puede expresar su solución en términos de primitivas (aunque sean no calculables; según esto, una ecuación separable, siempre es resoluble). Para determinar la constante arbitraria C que aparece en la solución general necesitaríamos imponer una condición inicial.

Ej 1. $y' = ty^3 \rightarrow \int y^{-3} dy = \int t dt + C \rightarrow -\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}t^2 + C \rightarrow y = \pm(C^* - t^2)^{-1/2}$, solución general

[hemos llamado $C^* = -2C$; a partir de ahora, como se suele hacer por comodidad en la escritura, no cambiaremos el nombre de las constantes arbitrarias que vayan apareciendo: todas serán C].

Hallemos las soluciones que satisfacen dos datos iniciales distintos (hasta que tratemos existencia y unicidad, no nos preocuparemos de si las funciones obtenidas son las únicas que los cumplen):

$$y(0) = 1 \rightarrow 1 = \pm(C^*)^{-1/2} \rightarrow C^* = 1 \rightarrow y = (1 - t^2)^{-1/2}$$

pues, evidentemente, sólo nos sirve el signo + de la raíz [$y(0) = -1 \rightarrow y = -(1 - t^2)^{-1/2}$].

Observemos que esta solución sólo está definida en el intervalo $(-1, 1)$.

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 = \pm(C^*)^{-1/2} \text{ que no se satisface para ningún } C^*.$$

Pero es claro que $y \equiv 0$ satisface la ecuación y esa condición inicial. No es raro que en el proceso de cálculo desaparezca alguna solución. El TEYu será de mucha ayuda en esos casos.

Ej 2. $y' = e^{y-t^2} \rightarrow \int e^{-y} dy = \int e^{-t^2} dt + C$, $e^{-y} = C - \int e^{-t^2} dt \rightarrow y = -\ln(C - \int e^{-t^2} dt)$
(no calculable)

El símbolo \int designa cualquiera de las primitivas de la función. Para imponer datos iniciales fijamos una de ellas poniendo límites a la integral. Por ejemplo, la solución que cumple $y(0) = 7$ es:

$$y = -\ln\left(C - \int_0^t e^{-s^2} ds\right) \rightarrow 7 = -\ln(C - 0) \rightarrow y = -\ln\left(e^{-7} - \int_0^t e^{-s^2} ds\right),$$

función perfectamente definida (no sería complicado obtener alguna información sobre ella).

Hay ecuaciones que no son de la forma [s], pero que **se convierten en separables mediante un cambio de variable dependiente**. Los dos tipos fácilmente identificables son:

Ecuaciones homogéneas: $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$. Haciendo $z = \frac{y}{t}$ se llevan a separables:

$$y = tz \rightarrow y' = tz' + z = f(z), \frac{z'}{f(z)-z} = \frac{1}{t} \rightarrow \int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln|t| + C.$$

Ej 3. $y' = \frac{t^3 y + y^4}{t^4} = \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^4 \xrightarrow{z=y/t} tz' + z = z + z^4 \rightarrow z^{-3} = C - 3 \ln|t| = \frac{t^3}{y^3} \rightarrow y = \frac{t}{(C - 3 \ln|t|)^{1/3}}$.

[Son homogéneas típicas aquellas en que $f(t, y)$ es un **cociente de polinomios homogéneos del mismo grado**, de cuarto en este ejemplo].

Ecuaciones del tipo: $y' = f(at + cy)$, con a y c constantes.

$$\text{Se hace } z = at + cy \text{ y se tiene: } z' = a + cy' = a + cf(z) \rightarrow \int \frac{dz}{a + cf(z)} = t + C.$$

Ej 4. $y' = (y + 2t)^{-2} - 1$ $z = y + 2t, z' = z^{-2} + 1 \rightarrow \int \frac{z^2 dz}{1 + z^2} = z - \arctan z = t + C, y + t - \arctan(y + 2t) = C$.

No se puede despejar y . La solución con $y(0) = 1$ la da implícitamente $y + t - \arctan(y + 2t) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Ecuaciones lineales.

Son de la forma $[l] \quad y' = a(t)y + f(t)$.

Si $f(t) \equiv 0$ la ecuación se dice **homogénea**: $[h] \quad y' = a(t)y$.

La sabemos resolver (es separable): $\ln|y| = \int a(t)dt + C, |y| = e^C e^{\int a(t)dt} \rightarrow y = C e^{\int a(t)dt}$.

[Al sustituir e^C por C hemos incluido las soluciones positivas y negativas del valor absoluto y además la solución $y \equiv 0$ que nos habíamos comido al dividir por y].

Para $[l]$, ecuación **no homogénea**, hallamos su solución sustituyendo la C de la solución general de la homogénea por una función $C(t)$ (es el llamado método de variación de las constantes que se utiliza en situaciones más generales). Llevando nuestra conjetura a $[l]$:

$$y = C(t) e^{\int a(t)dt} \rightarrow C' e^{\int a} + a C e^{\int a} = a C e^{\int a} + f \\ \rightarrow C(t) = \int C'(t)dt = \int e^{-\int a(t)dt} f(t)dt + C$$

Así pues, la solución **general** de $[l]$ es: $y = C e^{\int a(t)dt} + e^{\int a(t)dt} \int e^{-\int a(t)dt} f(t) dt$.

Esta es la llamada **fórmula de variación de las constantes [fvc]**. Nos irán apareciendo en el capítulo 2 otras con el mismo nombre y aspecto similar. Aunque para resolver una ecuación lineal concreta se podría repetir el proceso de variar constantes, es conveniente memorizar esta fórmula ya que se utiliza muy a menudo.

Observemos que la solución general de una lineal no homogénea resulta ser la **suma de la solución general de la homogénea y de una solución particular de la no homogénea** (lo mismo sucederá en las lineales de mayor orden). Si de algún modo somos capaces de encontrar una solución cualquiera de $[l]$, nos ahorramos el cálculo de alguna integral.

Si en vez de su solución general lo buscamos la **solución particular de $[l]$ que satisface $y(t_0) = y_0$** (aunque podríamos hallar la solución general e imponer el dato), es inmediato comprobar que la solución de dicho problema de valores iniciales es:

$$y = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(t)dt} + e^{\int_{t_0}^t a(t)dt} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(u)du} f(s) ds$$

Si $a(t) \equiv a$, $[l]$ se llama ecuación lineal con **coeficientes constantes** y su solución general adopta la forma:

$$y = C e^{at} + e^{at} \int e^{-at} f(t) dt$$

Ej 5. $y' = -\frac{y}{t} + e^t$ con $y(1)=1$. Para aplicar la **[fvc]**, puesto que $e^{\int a}$ aparece 3 veces, empezaremos siempre calculando esta exponencial:

$$e^{\int a} = e^{-\ln t} = e^{\ln t^{-1}} = \frac{1}{t} \rightarrow y = \frac{C}{t} + \frac{1}{t} \int t e^t dt = \frac{C}{t} + e^t - \frac{e^t}{t} \xrightarrow{y(1)=1} y = \frac{1}{t} + e^t - \frac{e^t}{t}$$

O si queremos aplicar la fórmula para el problema de valores iniciales:

$$-\int_1^t \frac{dt}{t} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t} \rightarrow y = 1 \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \int_1^t s e^s ds = \frac{1}{t} + e^t - \frac{e^t}{t}$$

Ej 6. Hallemos la solución general de $y' = 2y - 6$.

Hay una solución que salta a la vista (todas las soluciones constantes lo hacen): $y_p = 3$.

Como la general de la homogénea es Ce^{2t} , la solución general buscada es $y = Ce^{2t} + 3$.

O bien, con la fórmula de variación de las constantes: $y = Ce^{2t} - e^{2t} \int 6e^{-2t} dt = Ce^{2t} + 3$.

[En el capítulo 2 describiremos cómo buscar soluciones particulares de las ecuaciones lineales de cualquier orden con coeficientes constantes tanteando con funciones adecuadas a la forma del 'término independiente' $f(t)$].

Hay otras **ecuaciones que se pueden reducir a lineales**:

Ecuación de **Bernouilli**: $y' = a(t)y + f(t)y^p$, $p \neq 1$ ($p \in \mathbf{R}$ cualquiera, entero o no; si $p=1$, es lineal homogénea).

O sea, $y^{-p}y' = a(t)y^{1-p} + f(t)$. Haciendo $z = y^{1-p}$ se convierte en

$z' = (1-p)a(t)z + (1-p)f(t)$, que es lineal y ya hemos visto cómo resolverla.

Ej 7. $y' = \frac{2y}{t} + \frac{t}{y}$ Bernouilli con $p=-1$. Mejor que recordar las expresiones de arriba escribamos:

$2yy' = \frac{4}{t}y^2 + 2t$, para que aparezcan explícitamente z y z' . Haciendo $z = y^2$:

$z' = \frac{4z}{t} + 2t$ lineal, $e^{\int a} = e^{4 \ln t} = t^4$, $z = Ct^4 + t^4 \int \frac{2dt}{t^3} = Ct^4 - t^2 \rightarrow y = \pm t \sqrt{Ct^2 - 1}$ solución general.

[También es homogénea: $\frac{z=y/t}{\rightarrow} tz' + z = 2z + \frac{1}{z} \rightarrow \int \frac{2z}{z^2+1} = \int \frac{2dt}{t} + C \rightarrow z^2 = Ct^2 - 1 = (\frac{y}{t})^2 \uparrow$].

El ejemplo 3 también era de Bernouilli: $y' = \frac{y}{t} + \frac{y^4}{t^4} \xrightarrow{z=y^3} z' = -\frac{3z}{t} - \frac{3}{t^4}$, $z = \frac{C-3 \ln|t|}{t^3} \rightarrow y = \frac{t}{(C-3 \ln|t|)^{1/3}}$.

Ecuación de **Riccati**: $y' = a(t)y + b(t)y^2 + f(t)$.

Todas las ecuaciones anteriores eran resolubles (aunque pudieran aparecer primitivas no calculables). La de Riccati no lo es en general. **Sólo se puede resolver si se conoce una solución particular y_p de la ecuación** (y eso casi nunca será posible).

En ese caso, el cambio $u = y - y_p$ la convierte en una Bernouilli con $p=2$:

$$u' = y' - y_p' = [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u + b(t)u^2 + [a(t)y_p(t) + b(t)y_p^2(t) + f(t) - y_p'(t)]$$

$$u' = [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u + b(t)u^2 \quad (\text{ya que } y_p \text{ es solución}),$$

y sabemos que esta ecuación para la u se convierte en lineal con $z = u^{-1}$.

No hay métodos sistemáticos de búsqueda de soluciones particulares de ecuaciones de Riccati. Si en la ecuación aparecen polinomios, se puede intentar tantear con polinomios; si funciones trigonométricas, podemos probar con senos y cosenos... pero lo normal es que estos tanteos no conduzcan a nada.

Ej 8. $(1+t^3)y' + 2ty^2 + t^2y + 1 = 0$.

Es de Riccati ya que hay término en y , término en y^2 y una $f(t)$. Soluciones constantes salta a la vista que no tiene. Lo siguiente que podemos tantear en este caso son las rectas más sencillas $y = At$, pues vemos que quedarán potencias t^3 y constantes:

$$y = At \rightarrow A + At^3 + 2A^2t^3 + At^3 + 1 = 0 \rightarrow \text{debe ser a la vez } A + 1 = 0 \text{ y } 2A + 2A^2 = 0.$$

Casualmente se dan ambas igualdades para $A = -1$, con lo que $y = -t$ es solución particular.

[Si en vez del último 1 de la ecuación hubiese, por ejemplo, un 2, ya no sería resoluble].

Haciendo $u = y + t$ debe desaparecer el término independiente y convertirse en Bernouilli:

$$u' = y' + 1 = -\frac{2t}{1+t^3}(u-t)^2 - \frac{t^2}{1+t^3}(u-t) - \frac{1}{1+t^3} + 1 = \frac{3t^2}{1+t^3}u - \frac{2t}{1+t^3}u^2.$$

Con $z = u^{-1}$ se llega a la lineal $z' = -\frac{3t^2}{1+t^3}z + \frac{2t}{1+t^3} \rightarrow z = \frac{C}{1+t^3} + \frac{1}{1+t^3} \int 2tdt = \frac{C+t^2}{1+t^3}$.

Y deshaciendo los cambios obtenemos la solución general: $y = \frac{1}{z} - t = \frac{1-Ct}{C+t^2}$.

Impongamos un par de datos iniciales y veamos cuántas soluciones los satisfacen:

$$y(1) = 1 \rightarrow C = 0, \quad y = \frac{1}{t^2} \quad [\text{podíamos haber impuesto } u(1) = 2 \text{ ó } z(1) = \frac{1}{2}].$$

$$y(-1) = 1 \rightarrow 1 + C = 1 + C, \quad \text{ toda solución lo cumple (ya estudiaremos existencia y unicidad).}$$

Ecuaciones exactas.

Consideremos una ecuación escrita en la forma: [e] $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$.

[e] es **exacta** si existe una función de dos variables $U(t, y)$ tal que $M = U_t, N = U_y$

[es decir, [e] lo es si existe función potencial U para el campo vectorial (M, N)].

En ese caso la solución general de [e] es $U(t, y) = C$, pues para cualquier función derivable $y(t)$ definida implícitamente por esta expresión es:

$$0 = \frac{d}{dt}U(t, y(t)) = U_t + U_y y' = M + N y' .$$

Un resultado clásico de cálculo asegura que para que U exista debe ser $M_y \equiv N_t$.

Una vez comprobado que U existe se puede hallar como en el ejemplo siguiente.

Ej 9. $y' = -\frac{3t^2 + 6ty^2}{6t^2y + 4y^3}$, o sea, $(3t^2 + 6ty^2) + (6t^2y + 4y^3)y' = 0$. Es exacta: $M_y = 12ty = N_t$.

La U debe cumplir: $U_t = 3t^2 + 6ty^2 \rightarrow U = t^3 + 3t^2y^2 + p(y)$
 $U_y = 6t^2y + 4y^3 \rightarrow U = 3t^2y^2 + y^4 + q(t) \rightarrow U = t^3 + 3t^2y^2 + y^4$.

Y la solución general en forma implícita es $t^3 + 3t^2y^2 + y^4 = C$.

Si [e] no es exacta podríamos intentar encontrar una función $g(t, y)$, **factor integrante de [e]** , tal que $gM + gNy' = 0$ **sí sea exacta**. Debería entonces cumplirse:

$$[gM]_y \equiv [gN]_t, \text{ es decir, } [\bullet] Ng_t - Mg_y = [M_y - N_t]g$$

ecuación en derivadas parciales bastante más complicada que la inicial. Encontrar la g es, pues, un problema irresoluble en general, pero posible en ciertos casos especiales. Por ejemplo, si resulta ser $[M_y - N_t]/N$ una **función que sólo depende de t** , [e] admite un factor integrante $g(t)$ que es únicamente **función de la variable t** , pues $[\bullet]$ pasa a ser una ecuación ordinaria (lineal homogénea) que sabemos resolver :

$$g'(t) = \frac{M_y - N_t}{N} g(t) \rightarrow g(t) = e^{\int [M_y - N_t]/N} \text{ (eligiendo } C=1 \text{)} .$$

Análogamente se ve que si $[M_y - N_t]/M$ es **función de y** hay factor integrante $g(y)$ que **depende de y** .

Observemos que es mucha casualidad que $[M_y - N_t]$ sea idénticamente cero, o que al dividir esa expresión por N o por M quede una función sólo de una variable; pocas ecuaciones serán, pues, exactas, o admitirán factores integrantes $g(t)$ ó $g(y)$. Podría pensarse en buscar factores integrantes de la forma, por ejemplo, $g(t+y)$ ó $g(ty)$ (se obtendrían entonces para la g ecuaciones ordinarias como antes), pero no merece la pena el esfuerzo, porque, como se ha dicho, lo normal es que una ecuación sea no resoluble.

Ej 10. $(t - t^2y)y' - y = 0$ $M = -y, N = t - t^2y, M_y - N_t = 2ty - 2 \neq 0$. No es exacta.

Sin embargo, $\frac{M_y - N_t}{N} = -\frac{2}{t} \rightarrow g(t) = e^{-2 \ln t} = \frac{1}{t^2} \rightarrow (\frac{1}{t} - y)y' - \frac{y}{t^2} = 0$ es exacta.

Siguiendo como en el ejemplo anterior se tiene la solución general: $\frac{y}{t} - \frac{1}{2}y^2 = C$.

Podemos también solucionar esta ecuación (y bastantes más) de una forma diferente: utilizando el hecho de que la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función (si ambas son no nulas). Se observa que es complicada la expresión obtenida cuando despejamos la $dy(t)/dt = y/(t - t^2y)$, pero que en cambio es integrable la ecuación que se obtiene al mirar la t como función de y :

$$\frac{d(t(y))}{dy} = \frac{t}{y} - t^2 \text{ (Bernouilli)} \xrightarrow{z=1/t} \frac{d(z(y))}{dy} = -\frac{z}{y} + 1 \rightarrow z = \frac{C}{y} + \frac{1}{y} \int y dy = \frac{C}{y} + \frac{y}{2} = \frac{1}{t} .$$

1.2 Dibujo aproximado de soluciones

Consideremos la ecuación [e] $y' = f(t, y)$.

Cada una de sus soluciones es una función $y(t)$ cuya gráfica tiene en cada uno de sus puntos $(t, y(t))$ la pendiente dada por la conocida función $f(t, y)$. Podemos asociar a cada punto (t, y) del plano un segmento de pendiente $f(t, y)$ (a este conjunto de segmentos se le llama **campo de direcciones** de [e]). Una vez dibujado dicho campo (lo que se puede hacer sin resolver la ecuación), las soluciones de [e] serán las **curvas tangentes en cada punto a los segmentos del campo de direcciones**.

Para dibujar este campo de forma organizada intentaremos trazar algunas **isoclinas**, es decir, curvas $f(t, y) = K$ en que la pendiente asignada por f es constante (si la f es complicada, también lo serán las isoclinas y no las podremos pintar), para varios valores de K . En particular intentaremos dibujar la isoclina con $K = 0$ (segmentos horizontales, posibles **máximos** y **mínimos** de las soluciones) y la de ' $K = \infty$ ' (segmentos verticales, puntos en que las $y(t)$ no serán derivables). En el peor de los casos, aunque sea imposible pintar las isoclinas, podremos ir dibujando segmentos del campo en diferentes puntos (t, y) .

Se puede dar más información sin necesidad de resolver [e]. Como zonas de **crecimiento** y **decrecimiento** [cuando $f(t, y) > 0$ y $f(t, y) < 0$]. O las curvas de puntos de **inflexión**, calculando a a partir de ecuación cuando $y'' = f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y) = 0$. Buscaremos **rectas solución** de diferentes formas. El TEyU nos dirá dónde podrán tocarse las soluciones...

Aún cuando la ecuación [e] sea resoluble, las ideas anteriores muchas veces dan más datos sobre el dibujo de sus soluciones que la expresión analítica (tal vez complicada, o definida implícitamente, o en función de primitivas,...).

Ej 1. Dibujemos aproximadamente las soluciones de $y' = t - 2y = K \rightarrow y = \frac{t}{2} - \frac{K}{2}$.

Las isoclinas son, pues, rectas de pendiente $\frac{1}{2}$, es decir, de la forma $y = \frac{t}{2} + b$.

Pintamos algunas de estas isoclinas rectas para varios K y sobre cada una dibujamos segmentos de pendiente K :

$$K = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$$

(cortan $t=0$ respectivamente en

$$y = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}).$$

[O bien tenemos esas rectas dando los valores

$$b = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}].$$

Para $K = \frac{1}{2}$, tanto la recta como los segmentos sobre ella tienen la misma pendiente y, por tanto, dicha isoclina es **recta solución** de la ecuación (pues, desde luego, es tangente al campo de direcciones en cada punto). Aunque parece que las soluciones no cambian de concavidad, hallamos:

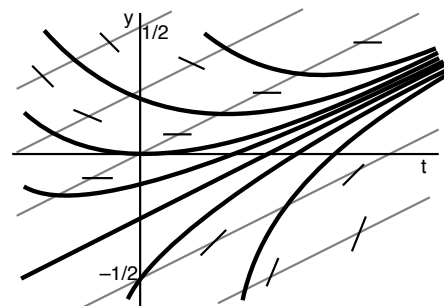
$$y'' = 1 - 2y' = 1 - 2t + 4y = 0 \rightarrow y = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}, \text{ que es la recta solución ya calculada.}$$

Si [e] tiene rectas solución, aparecerán al hacer $y'' = 0$, pues $(mt + b)'' = 0$.

Basándonos en los segmentos dibujados podemos hacernos una idea de las soluciones. Parece que todas tienden hacia la recta solución. Por ser $t - 2y$ una función tan buena, el TEyU nos asegurará que, sin embargo, dos soluciones distintas nunca llegarán a tocarse. Podemos en este caso resolver la ecuación (es lineal) y comprobar (este ejemplo no es muy práctico, más interés tiene el dibujo aproximado de ecuaciones no resolubles). Bastará sumar la solución general de la homogénea a la particular que hemos encontrado:

$$y = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2t} \text{ (a lo mismo llegaríamos con la fórmula: } y = Ce^{-2t} + e^{-2t} \int te^{2t} dt \text{).}$$

Es fácil comprobar que **las isoclinas de las ecuaciones de la forma $y' = f(at + cy)$** (la anterior es una de ellas) siempre son **rectas paralelas** (de la forma $y = -at/c + b$). En particular, esto ocurre para las ecuaciones **autónomas** $y' = f(y)$, donde son las rectas horizontales $y = b$. Veremos en 1.5 que dibujar a grandes rasgos las soluciones de las autónomas será muy fácil, pero si queremos precisar más el dibujo necesitaremos las ideas de esta sección, que son las usadas en el siguiente ejemplo:



Ej 2. $y' = y - \frac{4}{y^2}$. Las isoclinas son las rectas: $y = b \rightarrow y' = b - \frac{4}{b^2} = K$.

Si $K=0$ ($b = 4^{1/3} \equiv b^*$) tenemos una solución constante. Por encima de ella crecen ($y' > 0$) y debajo decrecen. Sobre $y=0$ ($K = \infty$) las $y(t)$ no serán soluciones (no son derivables). La concavidad la da:

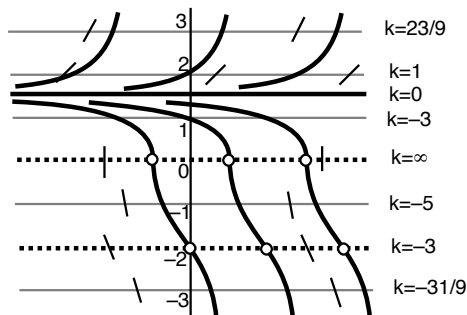
$$y'' = \left[1 + \frac{8}{y^3}\right]y' = \frac{(y^3+8)(y^3-4)}{y^3}$$

Las soluciones son \cup en las zonas del plano con $y > b^*$ ó $y \in (-2, 0)$, y son \cap si $y \in (0, b^*)$ o si $y < -2$. Además, como debía ocurrir, $y''=0$ nos da la solución $y = b^*$.

La solución es también calculable (ecuación separable):

$$\int \frac{3y^2 dy}{y^3-4} = 3t+C \rightarrow y = [4+Ce^{3t}]^{1/3}$$

Esto aporta poco al dibujo aproximado, pero da datos que no se deducen de él: las soluciones con $y > b^*$ están definidas $\forall t$, las soluciones tienden hacia b^* si $t \rightarrow -\infty, \dots$



Ej 3. $y' = \frac{2t-y}{t-y} = K \rightarrow y = \frac{2-K}{1-K}t$. Son rectas pasando por el origen.

Las isoclinas de cualquier ecuación homogénea $y' = f(\frac{y}{t})$ son las rectas $y = mt$, pues $f(t, mt) = f(m) = K$.

Pintamos diferentes isoclinas para varios K :

$$K=0 \rightarrow y=2t; K=1 \rightarrow t=0; K=-1 \rightarrow y=\frac{3}{2}t; \dots$$

O bien, al ser las isoclinas $y = mt$, mejor dibujamos la recta de pendiente m que queramos y sobre ella segmentos de pendiente

$$K = \frac{2-m}{1-m}: m=0 \rightarrow K=2; m=1 \rightarrow K=\infty; m=-1 \rightarrow K=\frac{3}{2}; \dots$$

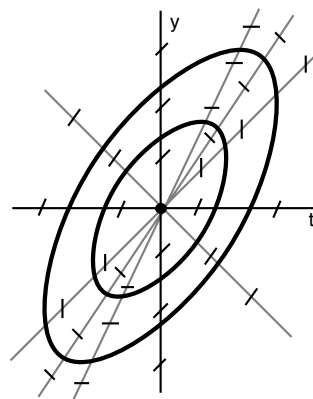
Como no parece haber inflexión, no hallamos y'' .

Las curvas tangentes al campo parecen ser cerradas. Resolvemos la ecuación para salir de dudas.

Homogénea $y' = \frac{2-(y/t)}{1-(y/t)}$ o exacta $(2t-y) + (y-t)y' = 0$. Por ambos caminos se tiene $y^2 - 2ty + 2t^2 = C$.

Las soluciones son **elipses**. Con más rigor, cada C da **dos soluciones** distintas en $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$:

$$y = t + \sqrt{C-t^2}, y = t - \sqrt{C-t^2} \text{ funciones definidas en } [-\sqrt{C}, \sqrt{C}] \text{ y no derivables en } \pm\sqrt{C}.$$



Ampliando el concepto de solución, se llama **curva integral** de [e] a una curva tangente en cada punto al campo de direcciones, aunque no venga dada por una única función $y(t)$ o tenga tangente vertical en algún punto (como esas elipses). De forma más precisa, si

$$[e^*] \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(t,y)}$$

es la ecuación obtenida mirando la t como función de y , **una curva integral de [e] será una curva continua formada por soluciones $y(t)$ de [e], por soluciones $t(y)$ de [e*] o por ambas**. Como la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada es claro que [e] y [e*] tienen las mismas curvas integrales, aunque puede haber soluciones de una que no lo sean de la otra. Las elipses del ejemplo son funciones derivables $t(y)$ (soluciones, por tanto de [e*]) cerca de la isoclina $y = t$ de pendiente ∞ ; cerca de $y = 2t$, donde hay buenas soluciones $y(t)$, no se puede poner la t como función derivable de y .

Ej 4. $y' = \frac{2t^2-y^2}{ty}$ Es homogénea también, con $K = \frac{2-m^2}{m}$.

Una recta con $K = f(m) = m$ será solución, Aquí lo son $y = \pm x$.

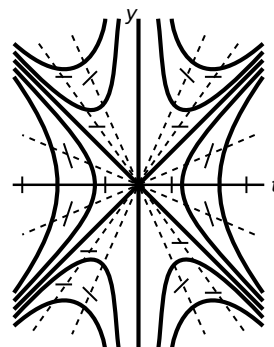
Más pendientes: $K=0 \rightarrow y = \pm\sqrt{2}t$. $m = \pm 2 \rightarrow K = \mp 1$, $m = \pm \frac{1}{2} \rightarrow K = \pm \frac{7}{2}$.

Además la pendiente es vertical si $y=0$ o si $t=0$ (curva integral).

$$y'' = \frac{2(y^2-t^2)(y^2+2yt^2)}{t^2y^3} = 0 \text{ sólo nos da, otra vez, las rectas solución.}$$

Resolviendo (homogénea o Bernouilli) se tiene su solución $y^2 = t^2 + \frac{C}{t^2}$.

Observemos que hay 2 soluciones distintas (y 3 curvas integrales) que pasan por el origen. Por cada punto del resto del eje t no pasa ninguna solución, aunque sí una única curva integral.



Ej 5. $y' = y^2 - t = K \rightarrow$ Las isoclinas son parábolas: $t = y^2 - K$. Dibujamos algunas.

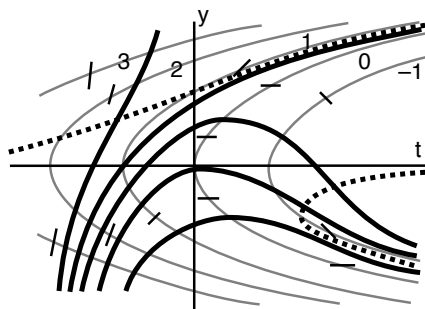
La de $K=0$ da los máximos de las soluciones (como $y' > 0$ si $t < y^2$ e $y' < 0$ si $t > y^2$ las soluciones crecen a su izquierda y decrecen a su derecha). Hallando y'' :

$$y'' = 2yy' - 1 = 2y^3 - 2ty - 1 = 0 \rightarrow t = y^2 - \frac{1}{2y}$$

se tiene la curva de puntos de inflexión (trazada a puntos).

Cumple que $t \rightarrow \pm\infty$ cuando $y \rightarrow 0^\mp$, se acerca a $t = y^2$ si $y \rightarrow \pm\infty$, y su mínimo local para la t se puede calcular.

Con estos datos dibujamos las soluciones aproximadas de esta ecuación no resoluble elementalmente.

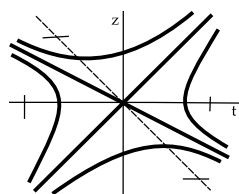
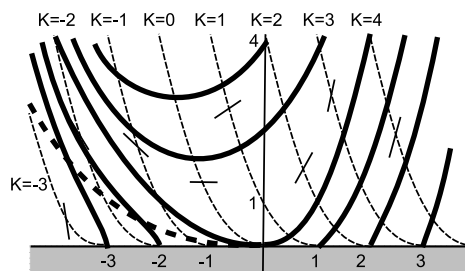


Ej 6. $y' = \sqrt{y} + t = K \rightarrow$ Isoclinas: $t = K - \sqrt{y}$ [o rama decreciente de $y = (t - K)^2$].

Ecuación definida sólo si $y \geq 0$. Las soluciones crecen si $t \geq -\sqrt{y}$ y decrecen en el resto del semiplano.

$$y'' = \frac{\sqrt{y} + t}{2\sqrt{y}} + 1 \rightarrow t = -3\sqrt{y} \text{ inflexión.}$$

La ecuación no es de ninguno de los tipos resolubles vistos en la sección anterior, pero hacemos $z = \sqrt{y}$ a ver qué pasa (en general los 'cambios ingeniosos' no suelen llevar a nada, pero aquí sí):



$$z = \sqrt{y} \rightarrow z' = \frac{z+t}{2z} \text{ (ecuación homogénea)} \xrightarrow{u=z/t} (u-1)^2(2u+1) = \frac{C}{t^3}$$

$$\rightarrow (z-t)^2(2z+t) = C = (t - \sqrt{y})^2(t + 2\sqrt{y}) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{y} \\ t = -2\sqrt{y} \end{cases}$$

$$\text{De aquí sale una solución que pasa por } (0, 0): y = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ t^2/4, & t \leq 0 \end{cases}$$

Los dibujos aproximados de ecuaciones homogéneas son sencillos:

$$f(t, mt) = \frac{m+1}{2m} \rightarrow m = -1 \text{ horizontal, } m = 0 \text{ vertical, } \frac{m+1}{2m} = m \rightarrow m = 1, -\frac{1}{2} \text{ soluciones.}$$

Como la y es el cuadrado de la z , el dibujo de la izquierda corrobora el dibujo de arriba.

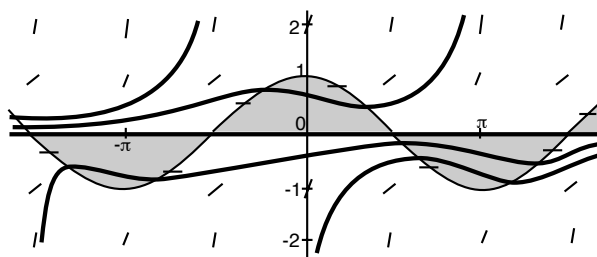
En el último ejemplo las isoclinas van a ser complicadas (lo que ocurre en general), y tendremos que dibujar segmentos en diferentes puntos del plano a partir de la $f(t, y)$ organizándonos de otra forma:

Ej 7. $y' = y^2 - (\cos t)y$.

La única isocлина sencilla es la de $K=0$ que da la solución $y=0$ y la curva $y = \cos t$.

Las soluciones decrecen si $y(y - \cos t) < 0$, o sea, en las zonas grises (es $y' > 0$ fuera).

De $y'' = 0$ se obtiene una curva difícil de dibujar (y , claro, la recta solución $y=0$).



Parece adecuado dibujar segmentos sobre las rectas $t = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$:

$$f\left(\frac{[2k-1]\pi}{2}, y\right) = y^2; \quad f(2k\pi, y) = y^2 - y; \quad f([2k-1]\pi, y) = y^2 + y.$$

Con todo lo anterior podemos ya esquematizar las soluciones.

La ecuación es de Bernouilli y resoluble:

$$y = z^{-1} \rightarrow z' = (\cos t)z - 1, \quad z = e^{\int \cos t dt} \left(C - \int e^{-\int \cos t dt} dt \right), \quad y = \frac{e^{-\int \cos t dt}}{C - \int e^{-\int \cos t dt} dt},$$

pero, por ser la primitiva no calculable, es complicado obtener información sobre el dibujo de las soluciones a partir de la solución, aunque sí podemos deducir para cualquier C , por estar el numerador acotado y ser el denominador una impropia divergente, que $y \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Seguiremos haciendo dibujos aproximados en secciones posteriores.

1.3 Existencia, unicidad, prolongabilidad

Consideremos el problema de valores iniciales [P] $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Supondremos la f definida en un determinado subconjunto $D \subset \mathbf{R}^2$ y que $(t_0, y_0) \in D$.

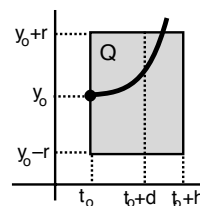
Precisamos con detalle la definición imprecisa de solución utilizada hasta ahora:

Una **solución** de [P] es una función $y(t)$ **derivable en un intervalo** $I \ni t_0$ tal que $y(t_0) = y_0$ y tal que para todo $t \in I$ se cumple que $(t, y(t)) \in D$ e $y'(t) = f(t, y(t))$.

Nuestro objetivo es estudiar en qué condiciones hay una única solución de [P]. El siguiente teorema (de **existencia y unicidad**, cuyas hipótesis serán, casi siempre, comprobables a simple vista y cuya demostración se puede ver en los libros de EDOs o en los apuntes [Ae]) nos lo precisa para casi todas las ecuaciones que consideremos y para casi todos los datos iniciales que impongamos:

Teor 1. Sean f y f_y continuas en $Q = [t_0, t_0+h] \times [y_0-r, y_0+r]$. Entonces el problema [P] posee una única solución definida al menos en un intervalo $I = [t_0, t_0+d]$ con $d \leq h$.

(Lo mismo sucede para la izquierda de t_0 , sustituyendo $[t_0, t_0+h]$ y $[t_0, t_0+d]$ por $[t_0-h, t_0]$ y $[t_0-d, t_0]$).



El teorema asegura que existe solución única definida al menos en un intervalo (lo que se llama **solución local**) aunque este intervalo podría ser pequeño (aún menor que la base $[t_0, t_0+h]$ del Q en el que es continua f). Al final de la sección nos preocuparemos de cuál es el intervalo máximo de definición de las soluciones. Uniendo los resultados a izquierda y derecha, podemos abreviar el teorema y escribir el resultado que aplicaremos en la práctica casi todas las veces:

TEyU. f y f_y continuas en un entorno de $(t_0, y_0) \Rightarrow$ [P] posee solución única definida al menos en un intervalo que contiene a t_0 .

Mucho más larga es la demostración (y exige resultados más avanzados de matemáticas) del teorema siguiente (de **existencia**), que asegura que si a f se le exige sólo la continuidad se garantiza que hay solución aunque puede fallar la unicidad:

TE. f continua en un entorno de $(t_0, y_0) \Rightarrow$ tiene [P] al menos una solución definida en un entorno de t_0 .

Veamos varios ejemplos que ilustren lo que dicen (y lo que no dicen) los teoremas anteriores:

Ej 1. $\begin{cases} y' = \text{sen}(t - \ln[y^2 + e^t]) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ El problema tiene solución única (que no sabremos calcular) para cualquier t_0 y cualquier y_0 por ser f y f_y continuas en un entorno de (t_0, y_0) (claramente son continuas en todo \mathbf{R}^2).

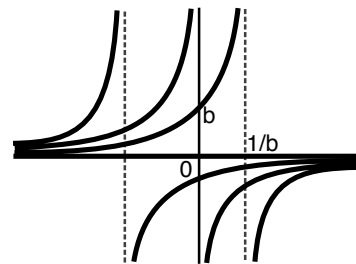
Ej 2. $\begin{cases} y' = \frac{y^2-1}{t} \\ y(1) = -1 \end{cases}$ tiene solución única local, al ser f, f_y continuas en un entorno de $(1, -1)$. Resolvemos e imponemos el dato para ver cuál es. Es separable (o Riccati):

$$\int \frac{2dy}{y^2-1} = \ln \frac{y-1}{y+1} = 2 \ln t + C \rightarrow \frac{y-1}{y+1} = Ct^2 \rightarrow y = \frac{1+Ct^2}{1-Ct^2} \xrightarrow{y(1)=-1} -1 + C = 1 + C.$$

¡Ningún C lo satisface! Pero seguro que hay una según el TEyU (sin él pensaríamos que no). Se ve que $y \equiv -1$ es la solución perdida en el cálculo. Observemos que esta solución cumple $y(0) = -1$, a pesar de ser f discontinua en $(0, -1)$ [en rigor, $y \equiv -1$ no es solución en $t=0$ pues f no existe ahí, pero podríamos definir $f(0, y) = 0$]. Los teoremas son sólo **condiciones suficientes**: puede ser f muy mala y haber solución, e incluso ser única. Podemos observar también que todas las soluciones (excepto $y \equiv -1$) cumplen $y(0) = 1$.

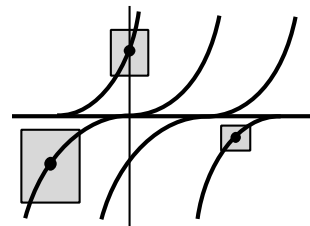
Ej 3. $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = b \end{cases}$ tiene solución única local que es $y = \frac{b}{1-bt}$ ($y = \frac{1}{C-t}$ + dato inicial).

El $Q = [0, h] \times [b-r, b+r]$ del teorema 1 es lo gordo que queramos [f y f_y son continuas en todo \mathbf{R}^2]. Pero el d resultante, para $b > 0$, puede ser muy pequeño [por grande que sea h], pues la solución está sólo definida en $(-\infty, \frac{1}{b})$ [la expresión es válida $\forall t \neq \frac{1}{b}$, pero para $t > \frac{1}{b}$ define otra solución distinta, definida en $(\frac{1}{b}, \infty)$]. Si nos fijamos en los $b < 0$ tenemos algo totalmente similar: las soluciones sólo llegan a la izquierda hasta la asíntota de $\frac{1}{b}$. Sólo si $b=0$ se tiene una solución definida $\forall t$: la $y \equiv 0$. Recordemos que el teorema solamente garantiza solución única **local**.



Ej 4. $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $f = 3y^{2/3}$ continua en todo $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ existe solución $\forall (t_0, y_0)$ por el TE.
 $f_y = 2y^{-1/3}$ continua en $\mathbf{R}^2 - \{y=0\} \Rightarrow$ la solución es única si $y_0 \neq 0$.

Cuando $y_0 = 0$, al no estar definida f_y , **puede** fallar la unicidad. Resolviendo e imponiendo $y(t_0) = 0$ obtenemos $y = (t - t_0)^3$. Como puede haberla (sin el teorema no se nos ocurriría), buscamos otra solución con ese dato y la hallamos sin dificultad: $y \equiv 0$ también lo cumple (a las soluciones formadas por puntos en los que no hay unicidad (como esta $y \equiv 0$) se les suele llamar singulares y no suelen estar recogidas por las soluciones generales).



Ej 5. $\begin{cases} y' = 3\sqrt{t}y^2 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ (f no existe si $t < 0$). f y $f_y = 6\sqrt{t}y$ continuas en $\{t \geq 0\}$.

Existe solución única $\forall t_0 \geq 0$. Para $t_0 > 0$ esto se deduce del TEyU (pues f y f_y son continuas en todo un entorno de (t_0, y_0)), pero para los puntos de la recta $t = 0$ hay que utilizar el teorema 1, pues sólo son continuas en un **entorno a la derecha** de los puntos $(0, y_0)$. La ecuación es resoluble (separable) y se puede ver cuáles son estas soluciones:

$$-\frac{1}{y} = 2t^{3/2} + C \rightarrow y = \frac{1}{C - 2t^{3/2}}, y(0) = y_0 \rightarrow y = \frac{y_0}{1 - 2y_0 t^{3/2}}$$

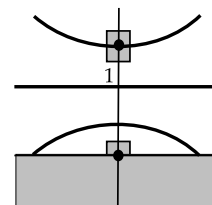
[Que conste que los TEyU no exigen nada a la f_t (aquí es discontinua en $t=0$ pero no importa)]. [Observemos que, como en el Ej 3, aunque son continuas f y f_y en todo el semiplano $\{t \geq 0\}$, las soluciones no están definidas en todo $[0, \infty)$, pues sólo llegan (salvo la $y \equiv 0$) hasta la asíntota vertical de $t = 1/(2y_0)^{2/3}$].

Ej 6. $\begin{cases} y' = t(\sqrt{y}-1) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ f es continua en $\{y \geq 0\}$ y $f_y = \frac{t}{2\sqrt{y}}$ en $\{y > 0\}$; f no existe en $\{y < 0\}$.

Para $y_0 > 0$ el TEyU asegura solución única, pero para $y_0 = 0$ no dice nada. El TE tampoco nos informa sobre si al menos existe solución aunque no sea única en $(0, 0)$, pues exige que f sea continua en **todo un entorno** del punto. No basta que f sea continua en el punto, o que lo sea (como sucede aquí) en un rectángulo por encima del punto (sí basta que lo sea en el entorno a la derecha o la izquierda del teorema 1, pero no es el caso). Para ver qué ocurre en $(0, 0)$ es suficiente, en este ejemplo, analizar el signo de la y' :

- $y' = 0 \rightarrow y = 1$ (recta solución)
- $y' > 0$ (crece) en $(0, \infty) \times (1, \infty)$ o en $(-\infty, 0) \times (0, 1)$
- $y' < 0$ (decrece) en $(0, \infty) \times (0, 1)$ o en $(-\infty, 0) \times (1, \infty)$

Por $(0, 0)$, por tanto, no puede pasar ninguna solución.
 ($y \equiv 0$ aquí no satisface, claramente, la ecuación).



Comprobemos una vez más lo mentirosas que pueden ser las soluciones generales y los errores que se cometen si uno se fía de ellas.

La ecuación es separable. Integrándola se obtiene: $\sqrt{y} + \log|\sqrt{y}-1| = \frac{1}{4}t^2 + C$

Parecería que no hay solución con $y(0) = 1$ (es la única $y \equiv 1$ perdida) y que con $y(0) = 0 \rightarrow C = 0$ hay una única solución (y acabamos de ver que no existe; la expresión de la solución con $C = 0$ se satisfará sólo si $y = t = 0$).

Veamos qué conclusiones se pueden sacar de aplicar los TEyU a la

$$\text{'ecuación equivalente'} \quad [e^*] \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(t,y)}.$$

Las **curvas integrales** eran soluciones tanto de [e] $y' = f(t, y)$, como de [e*]. El TEyU habla de existencia y unicidad de **soluciones**. Si por un punto pasa una única solución $y(t)$ de [e] evidentemente pasa también una única curva integral. Pero por un (t_0, y_0) tal que en un entorno suyo f ó $\partial f/\partial y$ no sean continuas pero tal que $1/f$ y $\partial(1/f)/\partial t$ sí lo sean pasará una única solución $t(y)$ de [e*] y, por tanto, una única curva integral (que en muchas ocasiones no será solución de [e]). **Sólo puede pasar más de una curva integral por los puntos en que falle el TEyU tanto para [e] como para [e*]** (y en esos puntos no se sabe).

En algunas ocasiones, **el análisis de [e*], informa también sobre la existencia o no de soluciones de nuestra ecuación inicial [e]**, utilizando argumentos como los de los siguientes ejemplos.

Ej 7. [e] $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2+y^2}$ cuya equivalente es [e*] $\frac{dt}{dy} = t^2+y^2$ (ni una ni otra son resolubles).

El TEyU asegura que hay única solución $y(t)$ de [e] con $y(t_0)=y_0 \quad \forall (t_0, y_0) \neq (0, 0)$. Por $(0, 0)$, al no tener problemas de unicidad la equivalente, pasa una **única curva integral**.

Como la solución $t(y)$ de [e*] que pasa por $(0, 0)$ es creciente y su pendiente $t'(0)=0$ esta curva integral será de hecho también una función $y(t)$ pero con derivada ∞ (no es derivable en $t=0$). Concluimos que [e] **no tiene solución con el dato** $y(0)=0$.

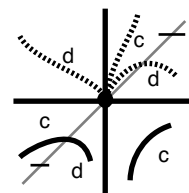
Ej 8. Sea [e] $\frac{dy}{dt} = \frac{y(y-t)}{t}$ \rightarrow [e*] $\frac{dt}{dy} = \frac{t}{y(y-t)}$. Su solución es (Bernouilli): $y = \frac{e^t}{C - \int t^{-1} e^t dt}$.

El TEyU dice que hay **única solución** $y(t)$ de [e] con $y(t_0)=y_0$ para todo $t_0 \neq 0$ y todo y_0 , pero no precisa si hay ninguna, una, varias o infinitas satisfaciendo $y(0)=y_0$.

Por su parte [e*] tiene única solución $t(y)$ con $t(y_0)=t_0$ si $y_0 \neq 0$ y si $y_0 = 0$. En particular hay única $t(y)$ con $t(y_0)=0, y_0 \neq 0$. Por tanto, **por cada punto, salvo tal vez por $(0, 0)$, pasa una única curva integral**.

Por $(0, 0)$ pasan al menos 2: $y=0$ y $t=0$ (soluciones a ojo de [e] y de [e*]).

Como por $(0, y_0), y_0 \neq 0$, sólo pasa la curva $t=0$ (que no es solución de [e]) **no hay solución $y(t)$ por esos puntos**.



Pero los teoremas no aclaran qué sucede en $(0, 0)$. Necesitamos más información. La solución e isoclinas son complicadas. Pero basta analizar crecimiento y decrecimiento para garantizar que **pasan infinitas curvas por $(0, 0)$** [las trazadas a puntos], pero no podemos decir si son soluciones (podrían tener ahí pendiente infinita).

[De la solución se deduce (es difícil) que $y' \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow 0$, y así la única solución $y(t)$ por el origen es $y \equiv 0$, a pesar de no ser la f ni continua (no estar definida) en ese punto].

Ej 9. Sea [e] $\frac{dy}{dt} = e^{y^{1/3}}$. $f_y = \frac{1}{3}y^{-2/3}e^{y^{1/3}}$. Para su equivalente [e*] $\frac{dt}{dy} = e^{-y^{1/3}}$ es $(\frac{1}{f})_t = 0$.

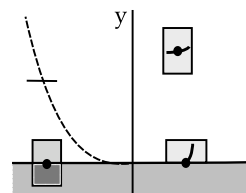
[e] tiene solución en todo \mathbf{R}^2 , única en $\mathbf{R}^2 - \{y=0\}$. Como hay solución única $t(y)$ en todo \mathbf{R}^2 , en $y=0$ la solución es también única. A diferencia del ejemplo 4, aunque fallaba el TEyU (no el de existencia) en $y=0$, hay solución única ahí. Y a diferencia de los ejemplos anteriores el considerar la [e*] nos ha dado unicidad y no inexistencia.

Ej 10. Estudiemos la unicidad de los siete ejemplos dibujados aproximadamente en 1.2.

1, 5 y 7, no presentan problemas: solución $y(t)$ única para cualquier $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

No hay solución $y(t)$ para 2 por $(t_0, 0)$, para 3 por $(t_0, t_0), t_0 \neq 0$ y para 4 por $(t_0, 0), t_0 \neq 0$, por razones como las del ejemplo 7: por esos puntos pasa una única curva integral de pendiente vertical. Para 3, por $(0, 0)$, donde ni f ni $1/f$ eran continuas, no pasa ninguna curva integral y, en cambio, para 4 pasan 3.

Para 6 hay problemas en $(t_0, 0)$ (no podemos aplicar ni el TE), pero [e*] tiene solución única $t(y)$ a la derecha (encima) de cada $(t_0, 0), t_0 \neq 0$ (con pendiente $\neq 0$) y, por tanto, hay solución única $y(t)$ (a la derecha o izquierda) de ellos. De $(0, 0)$ los TEyU no informan, pero del dibujo y solución de $z(t)$ se puede concluir que la única solución que pasa por el origen es la allí calculada.



Para acabar con la existencia y unicidad, damos un teorema más fuerte que el 1, pues exige menos a la función f para obtener los mismos resultados de unicidad. Debemos definir este nuevo concepto:

Diremos que una $f(t, y)$ es **lipschitziana respecto de la y** en $D \subset \mathbf{R}^2$ si existe L (constante de Lipschitz) tal que $|f(t, y) - f(t, y^*)| \leq L|y - y^*|$ para todo $(t, y), (t, y^*) \in D$.

Pedir que una f sea lipschitziana es pedir algo menos que pedir que f y f_y sean continuas:

f y f_y continuas en $Q \subset \mathbf{R}^2$ compacto $\Rightarrow f$ lipschitziana respecto de la y en Q

Sean $(t, y), (t, y^*) \in Q$. Aplicando el teorema del valor medio a f , vista como función de y se tiene que $\exists c \in (y, y^*)$ con: $f(t, y) - f(t, y^*) = f_y(t, c)[y - y^*] \leq L|y - y^*|$, donde L es el valor máximo de $|f_y|$ en Q , que existe por ser función continua en el compacto Q .

[\Leftarrow **no es cierta** (aunque casi todas las f lipschitzianas que aparezcan tengan f_y continua):

$f(t, y) = |y|$ es lipschitziana en \mathbf{R}^2 pues $||y| - |y^*|| \leq |y - y^*| \forall (t, y), (t, y^*) \in \mathbf{R}^2$ ($L=1$), pero no existe f_y cuando $y=0$].

El teorema prometido (que es el que se suele demostrar en los libros de EDOs) es este:

Teor 1*. f continua y lipschitziana respecto de la y en $Q = [t_0, t_0+h] \times [y_0-r, y_0+r] \Rightarrow$ [P] posee solución única definida al menos en $I = [t_0, t_0+d]$, con $d = \min\{h, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\}$, siendo M el máximo de $|f(t, y)|$ en Q y L la constante de Lipschitz.

[Probado este teorema queda probado el 1 pues sus hipótesis implican las del 1*. Es aplicable en algunos (pocos) casos en que el 1 no funciona].

Ej 11. $y' = |t^2 - 7y|$ f continua en todo $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ existe solución para cualquier dato inicial.

f_y es continua si $7y \neq t^2$. El teorema 1 asegura la unicidad $\forall (t_0, y_0)$ con $7y_0 \neq t_0^2$.

Para funciones definidas a trozos (como el valor absoluto) el teorema adecuado es el 1* y no el 1.

Veamos que f es lipschitziana:

$$|f(t, y) - f(t, y^*)| = ||t^2 - 7y| - |t^2 - 7y^*|| \leq |(t^2 - 7y) - (t^2 - 7y^*)| = 7|y - y^*| \quad \forall (t, y), (t, y^*) \in \mathbf{R}^2$$

Por tanto también hay solución única si $7y_0 = t_0^2$, y eso no nos lo decía el teorema 1.

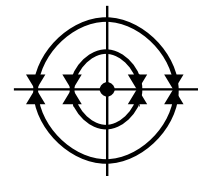
EStudiamos ahora la **prolongabilidad** de las soluciones de [P]. Supongamos que f y f_y son continuas en $D \subset \mathbf{R}^2$ y que (t_0, y_0) es interior a D . Entonces, por el TEYU, hay una única solución local $y(t)$ definida al menos en $[t_0 - d, t_0 + d]$. Pero, ¿hasta dónde se puede prolongar?, es decir, **¿cuál es el máximo intervalo I en el que está definida?** Sobre todo queremos saber si $y(t)$ llega hacia la derecha hasta $+\infty$ y si lo hace hacia la izquierda hasta $-\infty$ (en otras palabras, si está definida en $[t_0, \infty)$ y en $(-\infty, t_0]$).

Aunque sea $D = \mathbf{R}^2$ esto puede no suceder como vimos en el ejemplo 3. La solución de $y' = y^2$ con $y(0) = b$, sólo podía si $b > 0$ prolongarse (hacia la derecha) al intervalo $[0, 1/b)$, pues en $t = 1/b$ tenía una asíntota. Si $b < 0$, aunque llegaba hasta ∞ no llegaba a $-\infty$.

Otra forma en que una solución $y(t)$ está definida sólo en un intervalo finito viene ilustrada por:

$$y' = -\frac{t}{y}, \text{ de curvas integrales: } t^2 + y^2 = C,$$

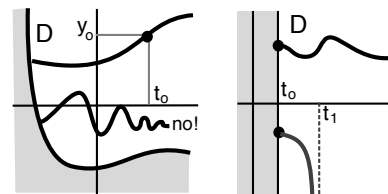
y con problemas de existencia y unicidad en $y=0$ que es justo donde van a morir cada una de las semicircunferencias solución.



El siguiente teorema, que no demostramos, resume las ideas de los dos ejemplos.

Teor 2. Si f y f_y son continuas en D la gráfica de la solución $y(t)$ de [P] no se para en el interior de D . En particular, cuando D es el semiplano $\{t \geq t_0\}$ o bien $y(t)$ está definida en todo $[t_0, \infty)$ o bien existe $t_1 > t_0$ tal que $|y(t)| \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow t_1$.

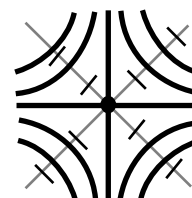
(resultado enteramente análogo a la izquierda de t_0)



La gráfica no para en un punto interior ya que, por el TEyU, existiría una solución local partiendo de dicho punto. Podríamos describir el teorema con otras palabras: la gráfica de las soluciones tienden hacia la frontera de D , entendiendo que si D es no acotado 'el infinito' pertenece a dicha frontera. El problema práctico (complicado en general) es distinguir entre las posibilidades que ofrece el teorema 2 si la ecuación no es resoluble (que, como sabemos, es lo normal). Demos alguna idea con ejemplos:

Ej 12. $\begin{cases} y' = -\frac{y^3}{t^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ Es fácil hallar su solución $t^{-2} + y^{-2} = C$, pero veamos qué podemos decir si nos basamos sólo en dibujos aproximados (que en muchas ocasiones será lo único que tendremos). Las isoclinas de esta homogénea son rectas.

Los TEyU aseguran solución única en $\mathbf{R}^2 - \{t=0\}$ y curva integral única para $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$. El crecimiento-decrecimiento prueba que por el origen sólo pasan las curvas integrales $y=0$ y $t=0$. Como la solución por $(1, 1)$ decrece para $t \geq 1$ y no puede tocar (por unicidad) la solución $y=0$, no puede irse a $\pm\infty$ en tiempo finito y según el Teor2 está definida $\forall t \geq 1$. Por la izquierda no puede tocar $t=0$, con lo que debe tener una asíntota en un $t_1 \in (0, 1)$. Necesitamos la solución $y = t/[2t^2 - 1]^{1/2}$ para ver que exactamente la tiene en $t_1 = 1/\sqrt{2}$.



Ej 13. $\begin{cases} y' = \text{sen}(t+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ La ecuación no es resoluble. f y f_y son continuas en \mathbf{R}^2 .

Hay dos posibilidades, que la solución única llegue a $\pm\infty$ o que tenga una asíntota (que 'explote'). Si $y(t)$ explota, tanto ella como sus pendientes han de tender a ∞ . Como es $|y'| \leq 1$, la solución está definida $\forall t$.

Identifiquemos **dos problemas cuya prolongabilidad se reconoce a simple vista:**

[PI] $\begin{cases} y' = a(t)y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, a y f **continuas en un intervalo** $I \ni t_0$
(I finito o infinito, cerrado o abierto).

Como tanto el segundo miembro de la ecuación lineal como su derivada con respecto a y son continuas en un entorno del punto (t_0, y_0) , [PI] tiene solución única. Además, como vimos en la sección 1.1, esta solución viene dada por exponenciales e integrales de las funciones a y f , con lo que se tiene que:

La solución única de [PI] está definida (al menos) para todo t de I .

$\begin{cases} y' = ay^n, a \neq 0, n > 1 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ Su solución es: $y = \frac{y_0}{[1 - a(n-1)y_0^{n-1}(t-t_0)]^{1/(n-1)}}$.

El denominador se anula cuando $t = t_0 + [a(n-1)y_0^{n-1}]^{-1}$. Por tanto, salvo $y \equiv 0$, **todas sus soluciones tienen una asíntota**. Para saber si la asíntota está a la derecha o izquierda de t_0 basta con mirar el crecimiento y decrecimiento, o sea, el signo de ay^n .

1.4 Estabilidad

En lenguaje usual la posición de equilibrio de un objeto o la trayectoria de un móvil se dice estable si un pequeño cambio de sus condiciones iniciales modifica poco su evolución desde ese instante. El concepto matemático de estabilidad da rigor a esta idea. Definamos estabilidad para ecuaciones de primer orden (volveremos a tratarla en capítulos posteriores).

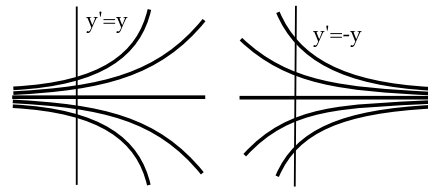
Supongamos que [P] $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ tiene solución única $y(t)$ definida en $[t_0, \infty)$.

¿Se parecerán a ella $\forall t \geq t_0$ las soluciones $y^*(t)$ de datos iniciales similares? Hemos visto ya casos en que no sucedía. Por ejemplo, la solución de $y' = y^2$ con $y(0) = 0$ (la constante $y(t) \equiv 0$) está definida $\forall t \geq 0$ y sin embargo la correspondiente a un dato inicial próximo $y(0) = y_0^*$ (que era $y = y_0^* / [1 - ty_0^*]$) ni siquiera llega hasta ∞ cuando $y_0^* > 0$, pues tiene una asíntota en $t = 1/y_0^*$. Y aunque todas las soluciones estén definidas en $[t_0, \infty)$ pueden ser para t grande muy diferentes entre sí. Así, las de:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0^* \end{cases} \text{ que son } y \equiv 0 \text{ e } y^* = e^t y_0^*$$

son muy diferentes para grandes t , pues y^* tiende a $+\infty$ o $-\infty$ (según el signo de y_0^*).

En cambio, las de $y' = -y$, que con esos datos son $y \equiv 0$ e $y^* = e^{-t} y_0^*$, cumplen $y^* \rightarrow y$ si $t \rightarrow \infty$.



Si [P] tiene solución única $y(t)$ definida en $[t_0, \infty)$ se dice que $y(t)$ es **estable** si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que toda solución $y^*(t)$ con $|y_0 - y_0^*| < \delta$ satisface:

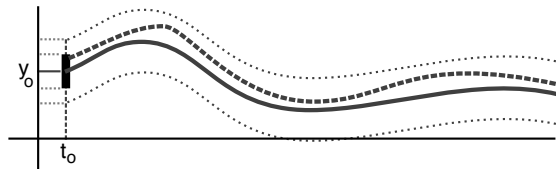
- 1] $y^*(t)$ existe y está definida en $[t_0, \infty)$,
- 2] $|y(t) - y^*(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Decimos que $y(t)$ es **asintóticamente estable** si además $y^*(t)$ satisface:

- 3] $|y(t) - y^*(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Una solución que no es estable se dice **inestable**.

Gráficamente, y es estable si para cualquier banda de altura 2ϵ en torno a ella existe un segmento de altura 2δ en torno a y_0 tal que las soluciones que parten de él permanecen para todo $t \geq t_0$ dentro de la banda.

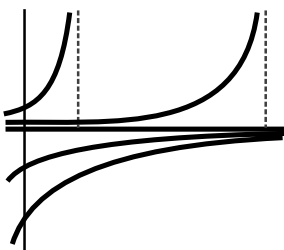


Para las ecuaciones de primer orden se puede probar que:

- 1] y 3] \Rightarrow 2]** (falso en sistemas y ecuaciones de orden n).

Así pues, para ver que la solución de una EDO de primer orden es asintóticamente estable basta comprobar que toda solución que parte cerca de ella llega hasta ∞ y que la diferencia entre ambas tiende a 0 en el infinito, con lo que podemos evitar las acotaciones de **2]** que son siempre mucho más complicadas.

Ej 1. Analicemos la estabilidad de las soluciones de la conocida ecuación $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.



Como las soluciones con $y_0 > 0$ explotan no tiene sentido hablar de su estabilidad. La $y = 0$ es claramente inestable pues las que parten cerca de ella por arriba ni siquiera están definidas $\forall t \geq 0$ (las que parten por debajo sí se parecen a ella, pero esto debe suceder para toda solución que parta cerca). Cualquier solución con $y_0 < 0$ (definida $\forall t \geq 0$) es AE: si $|y_0 - y_0^*|$ es pequeño y^* llega hasta ∞ y además:

$$|y - y^*| = \left| \frac{y_0}{1 - ty_0} - \frac{y_0^*}{1 - ty_0^*} \right| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

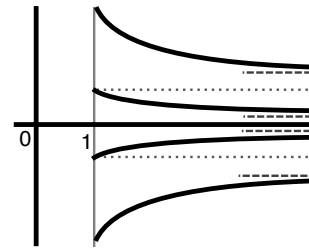
Ej 2. $\begin{cases} y' = -y^3/t^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ En 1.3 la dibujamos y resolvimos: $t^{-2} + y^{-2} = C$. La solución que cumple $y(1) = b$ es $y_b = bt [b^2(t^2 - 1) + t^2]^{-1/2}$.

Estamos analizando $y \equiv 0$. Todas las y_b están definidas $\forall b$ si $t \geq 1$, pero $y_b \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} b[b^2 + 1]^{-1/2} \neq 0$. Por tanto no es AE.

Estable sí lo es:

$\forall \epsilon$ tomando $\delta = \epsilon$ se tiene que si $|b| < \delta$ es $|y_b| \leq |b| < \epsilon \forall t \geq 1$.

(La estabilidad se puede probar sin hallar y_b : como las soluciones decrecen en el primer cuadrante y crecen en el cuarto, a partir de $t = 1$ se mueven entre las rectas $y = 0$ e $y = b$, luego llegan hasta ∞ y es estable $y \equiv 0$).



El estudio de la estabilidad es, en general, bastante difícil. Como se pueden resolver muy pocas ecuaciones no será posible normalmente usar las soluciones. Pero en otros casos se podrán obtener conclusiones estudiando la propia ecuación. Veamos resultados en ese sentido para las **ecuaciones lineales**:

Sea [PI] $\begin{cases} y' = a(t)y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, con a y f continuas en $[t_0, \infty)$.

Sabemos que para todo y_0 , [PI] tiene solución única definida para todo $t \geq t_0$, de expresión conocida. La diferencia entre dos soluciones cualesquiera es

$$|y(t) - y^*(t)| = |y_0 - y_0^*| e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \text{ y por tanto:}$$

Teor 1.

La solución de [PI] es estable si y sólo si $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$ está acotada.
Es asintóticamente estable si y solo si $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Por tanto, **la estabilidad no depende de y_0 ni de $f(t)$** [ni de t_0 si a y f son continuas a partir de ese punto]. Para una lineal (no para otros tipos) tiene pues sentido hablar de la **estabilidad de la ecuación** pues o todas las soluciones son estables, o todas son asintóticamente estables, o todas son inestables. Esto era esperable pues las soluciones son suma de una solución particular más la general de la homogénea y es ésta la que nos dice si todas las soluciones se acercan o no a una dada. De hecho tenemos que una ecuación lineal es estable [asintóticamente estable] si y sólo si lo es la solución $y \equiv 0$ de la homogénea.

En particular, para las ecuaciones de **coeficientes constantes**, se deduce inmediatamente del teorema:

$y' = ay + f(t)$ es **AE**, **EnoA** o **I**, según sea, respectivamente, $a < 0$, $a = 0$ ó $a > 0$.

(pues e^{at} tiende a 0, está acotada o no está acotada en cada caso).

Ej 3. $y' = -\frac{y}{t} + \cos[\ln(1+t^2)]$ Para $t > 0$ es $e^{-\int dt/t} = \frac{1}{t}$ acotada y además $\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Por tanto, la solución que satisface cualquier dato inicial $y(t_0) = y_0$ con $t_0 > 0$ es asintóticamente estable. (Si $t_0 < 0$ las soluciones $y = C/t + y_p$ sólo llegan hasta $t = 0$; el teorema se ha enunciado para el caso en que los coeficientes son continuos a partir de t_0).

Ej 4. $y' = \frac{y}{1+t^2}$ Todas sus soluciones son EnoA: $e^{\int a} = e^{\arctan t}$ es acotada, pero $\not\rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$.

(Si no hay discontinuidades de a o f ni nos preocuparemos del t_0 , pues es claro que el límite de la exponencial no depende de cual sea el límite inferior de la integral).

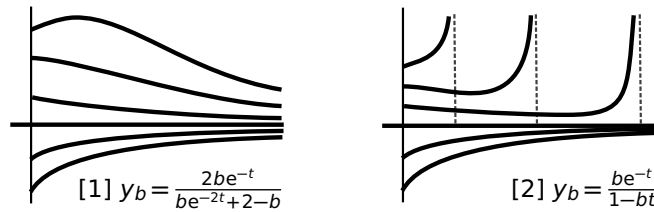
Ej 5. Estudiemos la estabilidad de la solución de $\begin{cases} y' = t - 2y \\ y(1/2) = 0 \end{cases}$ (ecuación resuelta y dibujada en 1.2).

Por ser lineal con coeficientes constantes, basta mirar el -2 para concluir que todas las soluciones (y esa en concreto) son AE. La solución con ese dato inicial es $y = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$ (que aunque $\rightarrow \infty$ es AE).

Podría pensarse que para una ecuación no lineal del tipo $y' = a(t)y + b(t)y^2 + c(t)y^3 + \dots$ la estabilidad de su solución $y=0$ coincidirá con la de su 'aproximación lineal': $y' = a(t)y$. Un teorema de 1.5 probará esta idea para las autónomas. Pero el siguiente ejemplo prueba que la conjetura, en general, es falsa:

Ej 6. Para las dos ecuaciones de Bernoulli: [1] $y' = -y + e^{-t}y^2$ y [2] $y' = -y + e^t y^2$,

la parte lineal de ambas ($y' = -y$) es AE. Sus dibujos y soluciones y_b con $y(0) = b$ son:



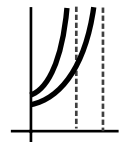
Ambas $y_b \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Aunque para [1] y_b está definida en $[0, \infty)$ si b cercano a 0, pero no para [2] (tiene una asíntota en $t = \frac{1}{b}$). Por tanto $y \equiv 0$ es solución AE de [1] e I de [2].

Para acabar introducimos el concepto de **dependencia continua** (de datos y parámetros).

Supongamos que el problema [P] $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ describe un sistema físico.

Midiendo experimentalmente el dato inicial y_0 cometeremos errores. Nuestra ecuación no sería útil para describir el sistema si a valores iniciales y_0^* parecidos no correspondiesen soluciones semejantes. Por suerte, se puede demostrar que si f es buena hay siempre **dependencia continua de datos iniciales**, es decir, que la solución es función continua de y_0 . Antes de precisarlo veamos un ejemplo:

Ej 7. Sea $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = b \end{cases}$ Su solución es, como sabemos, $y(t, b) = \frac{b}{1 - bt}$. [La podemos ver como función de t y además de b].



Sea, por ejemplo, $b > 0$. Mirando sólo la solución para $t \geq 0$ vemos que está definida hasta $t_1 = b^{-1}$. Para b^* próximos la solución tendrá un intervalo de definición similar. En un intervalo en el que estén definidas todas estas $y(t, b)$ cercanas (en que el denominador no se anule) es claro que $y(t, b)$ es continua en ambas variables.

Sean f, f_y continuas en un entorno de (t_0, y_0) . Sabemos que entonces la solución de [P] $y(t, y_0)$ está definida al menos en un intervalo $I = [t_0, t_0 + d]$. En estas condiciones se tiene:

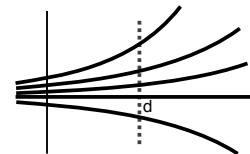
Teor 2. Si $|y_0 - y_0^*|$ es suficientemente pequeño, $y(t, y_0^*)$ está también definida en ese mismo I y además si $y_0^* \rightarrow y_0$ se cumple que $y(t, y_0^*) \rightarrow y(t, y_0)$ para todo $t \in I$.

Se puede escribir esto de otra forma para compararlo con la estabilidad:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |y_0 - y_0^*| < \delta \text{ entonces } |y(t) - y^*(t)| < \epsilon \text{ para todo } t \in [t_0, t_0 + d].$$

Así que, en intervalos finitos, las soluciones (inestables incluidas) de toda ecuación siguen lo próximas que queramos si partimos suficientemente cerca. La distinción entre estables e inestables aparece al considerar intervalos infinitos. Comprobemos que se cumple la afirmación con $\epsilon - \delta$ de arriba para una de las soluciones inestables vistas:

Las soluciones $y \equiv 0$ de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ e $y^* = e^t y_0^*$ de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0^* \end{cases}$, en cualquier intervalo finito $[0, d]$ satisfacen $|y^* - y| = e^t |y_0^*| \leq e^d |y_0^*| < \epsilon$ si $|y_0^* - 0| < \delta = e^{-d} \epsilon \forall t \in [0, d]$.



En nuestro sistema físico podría aparecer también un parámetro a : [P $_a$] $\begin{cases} y' = f(t, y, a) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Para que la ecuación sea útil a valores de a próximos deben corresponder soluciones similares. Se demuestra que si $f(t, y, a)$ es buena la solución es también función continua de a (es decir, hay **dependencia continua de parámetros**). Veamos un ejemplo para corroborarlo:

Ej 8. $\begin{cases} y' = at^{-1}y - 1 \\ y(1) = 0 \end{cases} \rightarrow y(t, a) = t^a \int_1^t s^{-a} ds = \begin{cases} (t - t^a)/(1 - a) \text{ si } a \neq 1 \\ t \ln t \text{ si } a = 1 \end{cases}$

f buena cerca de $(1, 0) \Rightarrow$ dependencia continua de a . Aunque no lo parezca es $y(t, a)$ también continua para $a=1$: si $a \rightarrow 1$ la expresión de arriba tiende a $t \ln t$ (L'Hôpital).

1.5 Ecuaciones autónomas

Son ecuaciones en las que la variable independiente no aparece explícitamente:

$$[a] \quad y' = f(y) .$$

Suponemos que f' es **continua en todo \mathbf{R}** con lo que, según el TEyU hay solución única para cualquier condición inicial.

Como [a] es de variables separables, es inmediato hallar su solución implícita:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = t + C \quad (\text{aunque la primitiva puede ser no calculable o muy complicada, y aun siendo integrable, no podremos, en general, despejar } y).$$

Pero muchas características importantes de las soluciones se pueden deducir fácilmente del estudio de la propia f . En particular, **será muy fácil hacer dibujos aproximados y precisar la estabilidad de sus soluciones**, gracias a los siguientes teoremas:

Teor 1. $y(t)$ solución de [a] $\Rightarrow y(t+C)$ es también solución de [a].

Sea $z(t) = y(t+C)$; entonces $z'(t) = y'(t+C) = f(y(t+C)) = f(z(t))$.

Teor 2. Si $a \in \mathbf{R}$ es tal que $f(a) = 0 \Rightarrow y(t) \equiv a$ es solución de [a].

(A estas soluciones constantes se les llama también soluciones de equilibrio).

La prueba es realmente trivial: $y'(t) = 0 = f(a) = f(y(t))$.

Teor 3. Cada solución de [a] o es constante, o es estrictamente creciente, o es estrictamente decreciente.

Sea y solución. Si existe un t_0 para el que $y'(t_0) = 0 \Rightarrow f(y(t_0)) = 0 \Rightarrow y(t) \equiv y(t_0)$ es solución (teorema 2), única que pasa por ese punto. Ninguna solución puede tener ni máximos ni mínimos si no es constante.

Teor 4. Toda solución acotada a la derecha de un t_0 tiende hacia una solución de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$ [si lo está a la izquierda lo hace cuando $t \rightarrow -\infty$].

Probémoslo si $t \rightarrow \infty$ (análogo para la izquierda). Si $y(t)$ es constante, es evidente. Sea $y(t)$ monótona y acotada para $t \geq t_0$ (por el teorema de prolongabilidad $y(t)$ está definida en $[t_0, \infty)$ pues no puede irse a infinito en tiempo finito). Un resultado elemental de cálculo asegura que $y(t)$ tiende hacia un límite a si $t \rightarrow \infty$.

Probemos que $f(a) = 0$. Como f es continua, $y'(t) = f(y(t))$ también tiene límite si $t \rightarrow \infty$ y ese límite es $f(a)$. Aplicando el teorema del valor medio a $y(t)$ en $[t, t+1]$ tenemos que existe un $c \in (t, t+1)$ tal que $y'(c) = y(t+1) - y(t)$. Por tanto:

$$f(a) = \lim_{c \rightarrow \infty} y'(c) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t+1) - y(t)] = a - a = 0.$$

Teor 5. Si $f(y)/g(y) \rightarrow \text{cte} > 0$ cuando $y \rightarrow \infty$ las soluciones no acotadas de $y' = f(y)$ tienen asíntotas si sólo si las tienen las de $y' = g(y)$.

En particular, explotan todas las soluciones no acotadas de $y' = P(y)$, si P es un polinomio de grado mayor que 1.

Como la solución de [a] es $t+C = \int^y \frac{ds}{f(s)}$, decir que $y \rightarrow \pm\infty$ para t finito equivale a decir que $\int^{\pm\infty} \frac{ds}{f(s)}$ es una integral impropia convergente y esta lo es (por el criterio de comparación por paso al límite de las impropias) cuando lo es la integral de $\frac{1}{g}$.

El caso particular es consecuencia de que explotan todas las soluciones no nulas de $y' = ay^n$, $n > 1$ (lo vimos al final de 1.3).

[Si f no es C^1 , y no hay existencia y unicidad en todo el plano, también pueden fallar algunas de las propiedades que hemos demostrado basándonos en ese hecho].

Ej 1. $y' = y^3 - y^2$ Como $y^2(y-1)=0 \rightarrow y=0, y=1$, estas son las soluciones constantes.

Como $y^2(y-1) > 0$ si $y > 1$ e $y^2(y-1) < 0$ si $y < 0$ ó si $y \in (0,1)$, sabemos qué soluciones crecen o decrecen y las soluciones de equilibrio a las que tienden (sin llegar a tocarlas por la unicidad). La y de las soluciones por encima de $y = 1$ llega hasta ∞ pues si estuviese $y(t)$ acotada debería tender hacia una solución constante y no la hay (según el teorema 5 lo hace en tiempo finito).

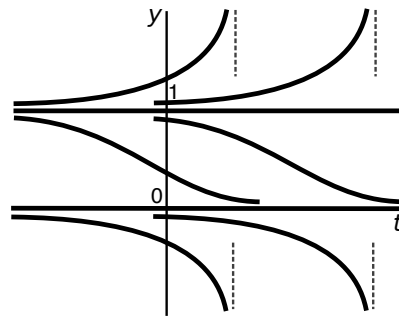
Tampoco están acotadas las de $y < 0$ (también explotan).

Sabiendo además que las trasladadas a derecha e izquierda de una solución lo son también, completamos el dibujo.

[Podríamos además pintar algunas isoclinas (rectas $y=b$) y la recta de puntos de inflexión:

$$y'' = (y^3 - y^2)(3y^2 - 2y) = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3} \text{ y las rectas solución.}$$

[No es útil para el dibujo integrar y hallar la complicada solución: $\int \frac{dy}{y^3 - y^2} = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| + \frac{1}{y} = t + C$].



De hecho (y esto nos sirve de anticipo de lo que haremos en los capítulos 3 y 4 para los sistemas autónomos) la información esencial del dibujo aproximado de arriba se puede esquematizar en un sencillo dibujo como el de la derecha. En él se observan los 'puntos críticos' (proyecciones sobre $t=0$ de las soluciones constantes), y las flechas nos dicen hacia qué puntos tienden las demás o si se van a infinito. Claro que no se ve si las no acotadas son prolongables o no, ni en qué instantes t estamos en cada punto del eje y , pero sí es obvia la estabilidad de las soluciones constantes.



El estudio de la **estabilidad** de una ecuación no lineal cualquiera (incluso de primer orden) es difícil en general, pero en las autónomas, gracias a los teoremas vistos, casi siempre es trivial: **el dibujo basta para precisar la estabilidad.**

Para el ejemplo 1 es inmediato ver que $y=0$ es inestable, pues las soluciones cercanas de abajo se van a $-\infty$ (no se necesita siquiera su prolongabilidad). $y=1$ también es: las de arriba van a $+\infty$ y las de abajo a $y=0$. Cualquier solución entre 0 y 1 es AE: las soluciones cercanas están definidas $\forall t$ y la diferencia entre ellas tiende a 0 si $t \rightarrow \infty$ pues todas ellas tienden a la misma solución de equilibrio, según asegura el teorema 4.

Este teorema 4 no es cierto para ecuaciones no autónomas (por eso se complica la estabilidad) y puede haber soluciones que se acerquen a una solución constante y no tiendan a ella, u otras que se alejen de ella, pero siguiendo cerca (como muestran los ejemplos 2 y 4 de la sección 1.4).

Probemos un **criterio de estabilidad de soluciones constantes** que, aquí no dice nada nuevo, pero es la versión sencilla del que veremos al estudiar los sistemas autónomos:

Teor 6. Sea $f(a)=0$. Si $f'(a) < 0$, $y(t) \equiv a$ es asintóticamente estable.
Si $f'(a) > 0$, $y(t) \equiv a$ es inestable.

Si $f'(a) < 0$, f decrece en a , luego $f(y)$, cerca de a , pasa al aumentar y de ser positivo a negativo y las soluciones pasan de ser crecientes a decrecientes, lo que unido al teorema 4 nos da la estabilidad asintótica. Si $f'(a) > 0$ pasan de ser decrecientes a ser crecientes; las primeras se van a $-\infty$ o hacia otra solución constante y las segundas a ∞ o hacia otra constante; hay inestabilidad.

Este es uno de los casos en que sí hereda una ecuación no lineal la estabilidad de su aproximación lineal. En efecto, desarrollando por Taylor la $f(y)$ en torno a $y=a$ tenemos:

$$y' = f'(a)(y-a) + o(|y-a|), \text{ es decir } z' = f'(a)z + o(|z|), \text{ si } z = y-a,$$

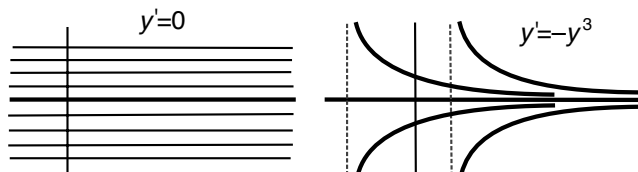
y el signo de $f'(a)$, como sabemos, da la estabilidad de la lineal $z' = f'(a)z$.

No se deduce nada sobre la no lineal si la lineal es simplemente estable, es decir, si $f'(a) = 0$. Entonces la solución constante puede ser estable o asintóticamente estable como sucede con las soluciones $y=0$ de $y'=0$ y de $y'=-y^3$:

O ser inestable, como la solución $y=0$ del ejemplo 1. Para él es:

$$f'(y) = 3y^2 - 2y, f'(0) = 0.$$

El teorema sí prueba la inestabilidad de la otra solución constante: $f'(1) = 1 > 0$.



Ahora consideramos una ecuación autónoma con un parámetro a .

Ej 2. $y' = ay - y^3$ Analicemos su estabilidad.

Si $a \leq 0$ sólo existe la solución constante $y=0$.

Si $a > 0$ aparecen además otras dos: $y = \pm\sqrt{a}$.

Viendo el signo de $y(a-y^2)$ se obtienen los dibujos.

Para $a \leq 0$ es $y=0$ asintóticamente estable (todas lo son).

Para $a > 0$ pasa la $y=0$ a ser inestable e $y = \pm\sqrt{a}$ son AE (de hecho todas son AE menos la $y=0$).

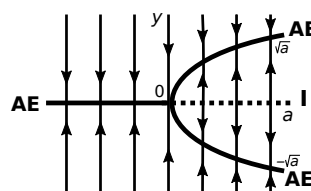
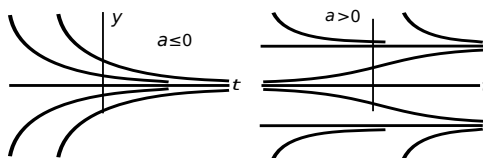
Está claro todo en el 'diagrama de bifurcación' de la derecha. Se observan en él los puntos críticos y el sentido de las flechas nos indica su estabilidad.

[En la teoría de ecuaciones diferenciales se dice que hay una bifurcación si para un valor de un parámetro cambian esencialmente las soluciones como ha ocurrido aquí para $a=0$].

Resolviendo la ecuación se llegaría a este comportamiento asintótico con mucho más trabajo:

$$-\frac{2}{y^3}y' = -\frac{2a}{y^2} + 2 \xrightarrow{z=y^{-2}} z' = -2az + 2, z = Ce^{-2at} + \frac{1}{a}. y = \frac{\pm\sqrt{-a}}{\sqrt{Ce^{-2at}-1}}, a < 0. y = \frac{\pm\sqrt{a}}{\sqrt{Ce^{-2at}+1}}, a > 0.$$

$$\text{Y para } a=0 \rightarrow \int \frac{-2dy}{y^3} = 2t + C, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2t+C}}.$$



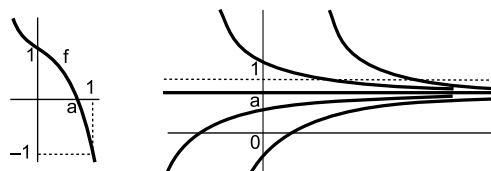
No siempre se podrán calcular las soluciones constantes. De hecho esto es lo excepcional. Para obtener ceros de funciones habitualmente hay que acabar utilizando el ordenador.

Ej 3. $y' = 1 - y - y^3$ Estudiemos su estabilidad.

$$f(y) = 1 - y - y^3 = 0 \text{ sin soluciones enteras.}$$

Pero $f'(y) = -1 - 3y^2 < 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$.

\Rightarrow existe un único $a \in (0, 1)$ con $f(a) = 0$.



Como por debajo de $y \equiv a$ las soluciones crecen y por encima decrecen y la ecuación es autónoma, todas las soluciones son AE. [Y todas explotan para un t negativo finito].

No siempre una autónoma tiene soluciones constantes. Hay veces que conviene aplicar el teorema 6. Y la estabilidad de las soluciones no acotadas no es tan trivial como la del resto.

Ej 4. $y' = e^{-y} - b$ Empecemos con la estabilidad de sus soluciones constantes.

$$e^{-y} - b = 0 \rightarrow y \equiv -\ln b, \text{ si } b > 0. \text{ Si } b \leq 0, \text{ no hay.}$$

$$f'(-\ln b) = -e^{-\ln b} = b > 0 \Rightarrow \text{para cada } b > 0 \text{ hay 1 solución constante AE.}$$

Nos dice lo mismo el signo de f antes y después de la solución constante: por debajo de $y \equiv -\ln b$ las soluciones crecen y por encima decrecen.

Estudiemos, ahora, para $b=0$, la estabilidad de la solución con $y(0)=0$.

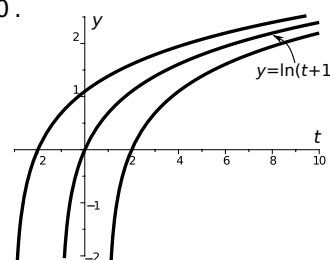
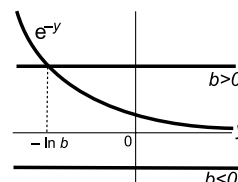
La solución general de $y' = e^{-y}$, $e^y y' = 1$, es $e^y = t + C$, $y = \ln(t + C)$.

La que cumple $y(0)=0$ es $y = \ln(t+1)$, claramente definida si $t \geq 0$.

Las de $y(0)=y_0$, que son $y = \ln(t + e^{y_0})$, también lo están.

[Lo podíamos decir sin resolver la ecuación: como todas las soluciones son crecientes no pueden irse a $-\infty$; como en $y > 0$ es $y' < 1$, no pueden irse a $+\infty$ en tiempo finito, porque sus pendientes están acotadas].

$$\text{Y como } |\ln(t+1) - \ln(t+C)| = \left| \ln \frac{t+1}{t+C} \right| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} |\ln 1| = 0, \text{ es AE.}$$



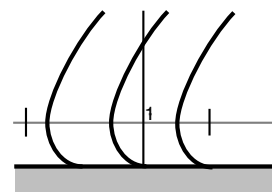
Si $f(y)$ no es tan regular como hemos supuesto al principio de la sección hay propiedades prometidas por los teoremas que pueden no cumplirse.

Ej 5. $y' = \frac{2\sqrt{y}}{y-1}$ Ecuación definida sólo si $y \geq 0$, con solución única en $y > 1$ e $y \in (0, 1)$, y problemas de unicidad en $y=0$ y en $y=1$.

$y=0$ es la única solución constante. Las soluciones son crecientes en $y > 1$ y decrecientes en $y \in (0, 1)$. Por cada punto de $y=1$ pasa una única curva integral de pendiente vertical (y ninguna solución).

Completamos el dibujo resolviendo la ecuación:

$$t = \int \frac{y-1}{2\sqrt{y}} dy + C = \frac{1}{3} \sqrt{y} (y-3) + C.$$

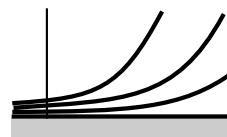


Hay soluciones no estrictamente monótonas (primero decrecen y luego son constantes) y otras acotadas a la izquierda que mueren en $y=1$ y que no tienden hacia ninguna solución constante.

Veamos para acabar varias autónomas que describen modelos de crecimiento de una población animal (en ellas $y(t)$ representa la población que hay en el instante t y a, b, M son constantes positivas). La más sencilla (también lineal) viene de suponer la velocidad de crecimiento de la población proporcional al número de animales existentes, o sea,

$$[1] \quad y' = ay, \quad y(t_0) = y_0 \rightarrow y = y_0 e^{a(t-t_0)}.$$

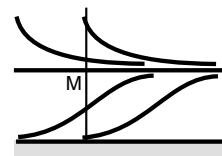
Dibujamos sus soluciones sólo donde tienen sentido (en $y \geq 0$):



En [1] está implícita la suposición de que hay alimentos y espacio vital ilimitados. Si hay una población máxima M que admite el ecosistema, describirá mejor la evolución la llamada

$$\text{ecuación logística: } [2] \quad y' = by(M-y)$$

de soluciones fáciles de pintar. La solución $y \equiv M$ es AE y hacia ella tienden todas las demás positivas para cualquier dato inicial: pasado el tiempo habrá en el ecosistema una población M . Para conocer la población en un instante t hay que hallar la solución con $y(t_0) = y_0$:



$$y = My_0 [y_0 + (M - y_0)e^{-bM(t-t_0)}]^{-1} \quad (\text{la ecuación es separable o Bernoulli})$$

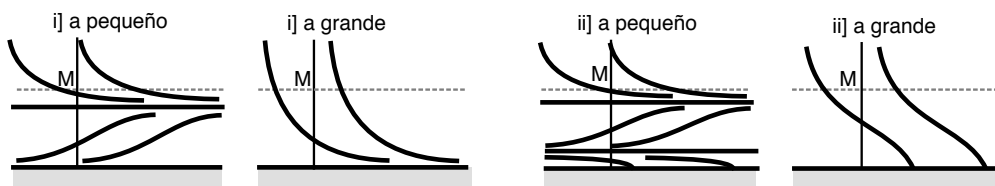
función que tiene el comportamiento asintótico previsto con las técnicas de autónomas.

Imaginemos ahora que [2] rige la población de truchas en un lago y que alguien pesca truchas: i) a un ritmo proporcional al número de ellas existente, ii) a ritmo constante (independiente de las que haya). Las técnicas de autónomas nos permiten predecir con facilidad el número de truchas que habrá en el estanque para grandes valores de t . Las ecuaciones que rigen la evolución de y en ambos casos son:

$$[2i] \quad y' = by(M-y) - ay \quad \text{y} \quad [2ii] \quad y' = by(M-y) - a$$

Las soluciones de equilibrio son para [2i] $y=0$ e $y=M-\frac{a}{b}$ y para [2ii] $y = \frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{a}{b}}$.

Si a es grande (pescador muy hábil) la segunda solución constante de [2i] pasa a ser negativa y las dos de [2ii] se convierten en complejas. Viendo el signo de y' se tiene:



Si el pescador es poco hábil el número de truchas se estabiliza en torno a un valor algo inferior al tope logístico M (salvo en ii) si inicialmente son muy pocas). Si es hábil las truchas siempre se extinguen (en tiempo finito en el caso ii).

2. Sistemas y ecuaciones lineales de orden 2

Si ya se podían resolver muy pocas ecuaciones de primer orden, menos aún se pueden resolver sistemas de tales ecuaciones o ecuaciones de orden $n > 1$. Salvo escasas excepciones, sólo en el caso lineal se puede caracterizar la estructura de las soluciones y casi sólo si los coeficientes son constantes se pueden hallar explícitamente tales soluciones mediante métodos elementales. Como el objetivo principal de este libro son los sistemas autónomos en el plano, nos limitaremos aquí a dar la teoría para el caso $n=2$.

En la sección 2.1 enunciaremos las **propiedades básicas** (similares a las de ecuaciones de primer orden) de los sistemas de 2 ecuaciones (lineales o no) y ecuaciones de orden 2, que veremos que se pueden considerar como un caso particular de sistemas. No daremos demostraciones (basta casi sustituir los valores absolutos del caso $n=1$ por normas). En la solución general de un sistema o ecuación de orden 2 aparecen 2 constantes arbitrarias (así lo sugieren los ejemplos más sencillos de sistema: $x'=0$, $y'=0$, y de ecuación: $x''=0$). El problema de valores iniciales consistirá en hallar la solución que cumpla 2 condiciones en un instante $t=t_0$ (si los datos se dan en t distintos, el 'problema de contorno' tiene otras propiedades que se suelen estudiar en los cursos de EDPs). Será fácil ver cuando este problema tiene solución única local. También daremos un resultado de prolongabilidad y la definición de estabilidad. No generalizaremos, sin embargo, el dibujo aproximado, porque no se puede: las soluciones de un sistema son curvas en el espacio (a partir del capítulo 3, para sistemas autónomos de segundo orden, sí nos preocuparemos del dibujo de las proyecciones de las soluciones sobre el plano $t=0$).

La 2.2 trata ya en el caso **lineal**:

$$[S] \begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ y' = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{cases}$$

Tendremos una **fórmula de variación de las constantes** que nos dará las soluciones de [S] si somos capaces de hallar lo que se llama una **matriz fundamental $W(t)$** (formada por soluciones del sistema homogéneo). Esta matriz sólo sabremos calcularla (utilizando resultados de álgebra) en el caso de que las funciones a , b , c y d sean constantes (entonces $W(t)$ será la exponencial de una matriz). De lo anterior deduciremos resultados para las **ecuaciones de segundo orden**:

$$[e] x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$$

Resolver [e] será especialmente sencillo para a y b **constantes**. La solución de la homogénea la darán las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, y para la no homogénea tendremos, además de una fórmula de variación de constantes, el método de coeficientes indeterminados (aplicable a ecuaciones de primer orden o de orden mayor que 2). Si $a(t)$ y $b(t)$ son **variables**, veremos los pocos casos (ecuaciones de Euler $t^2x'' + atx' + bx = h(t)$, si $b(t) \equiv 0$ y si somos capaces de calcular una solución de la homogénea) en que aún se puede hallar su solución a través de integraciones (en el resto de los casos para resolver [e] se deben utilizar series de potencias).

En 2.3 analizaremos la **estabilidad** de sistemas y ecuaciones lineales de orden 2, que se podrá precisar fácilmente en el caso de coeficientes constantes: bastará casi siempre con conocer el signo de la parte real de los autovalores.

2.1 Propiedades generales

Un **sistema de 2 ecuaciones de primer orden** es: [S] $\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$

Sus **soluciones** son parejas de funciones $x(t), y(t)$, definidas y derivables dos veces en un intervalo común I , que convierten cada ecuación de [S] en una identidad. Llamaremos [P] al **problema de valores iniciales** formado por [S] y las condiciones iniciales:

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$$

Utilizando notación vectorial: [P] $\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Las soluciones $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ se pueden ver entonces como funciones vectoriales de I en \mathbf{R}^2 .

Llamaremos $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norma euclídea) y será $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$ el entorno o bola de centro \mathbf{a} y radio r (círculo sin borde).

Los **TEyU** y **prolongabilidad** son muy parecidos a los de $n=1$:

Teor 1. $f, g, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ continuas en $[t_0 - h, t_0 + h] \times B(\mathbf{x}_0, r) \Rightarrow$
[P] tiene solución única definida al menos en un entorno de t_0 .

(Y si sólo f y g son continuas existe solución, aunque podría no ser única).

Teor 2. Si $f, g, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ son continuas en $[t_0, \infty) \times \mathbf{R}^2$ o bien existe t_1 tal que $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t_1$ o bien la solución $\mathbf{x}(t)$ de [P] está definida $\forall t \geq t_0$.

(Y si son continuas en un $D \subset \mathbf{R}^3$ las soluciones llegan hasta la frontera de D).

También hay dependencia continua de parámetros y datos iniciales y las definiciones de **estabilidad** son como las de primer orden, sustituyendo los valores absolutos por normas:

Una solución $\mathbf{x}(t)$ definida en $[t_0, \infty)$ es **estable** si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que toda $\mathbf{x}^*(t)$ con $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| < \delta$ existe, está definida en $[t_0, \infty)$ y verifica $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon \forall t \geq t_0$.
Si además $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ se dice que $\mathbf{x}(t)$ es **asintóticamente estable**.

[Pero para un sistema podrá ocurrir que $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ y sin embargo que no consigamos hacer que $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\|$ sea menor que cualquier ε prefijado].

Consideremos ahora la **ecuación de segundo orden**: [e] $x'' = g(t, x, x')$.

Sus **soluciones** son funciones $x(t)$ **derivables dos veces** en un intervalo I que llevadas a [e] la convierten en una identidad. Llamamos [Pe] al **problema de valores iniciales** consistente en hallar la solución de [e] que satisface las dos condiciones:

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0.$$

Toda ecuación se puede convertir en un sistema (sistema equivalente), haciendo:

$x' = y \rightarrow$ [Se] $\begin{cases} x' = y \\ y' = g(t, x, y) \end{cases}$. Llamando $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$, es claro que

x es solución de [e] si y sólo si \mathbf{x} lo es de [Se]. Si además $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, x es solución de [Pe].

Gracias a esto, de cualquier resultado para sistemas se deducen consecuencias inmediatas para ecuaciones (aunque éstas tendrán formas de resolverse más directas). Por ejemplo, los teoremas 1 y 2 se pueden aplicar a ecuaciones. Veamos la forma que adopta el **TEyU**:

Teor 3. $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial x'}$ continuas en un entorno de $(t_0, x_0, x'_0) \Rightarrow$
 [Pe] tiene solución única definida al menos en un entorno de t_0 .

Por último, se dice que $x(t)$ es **solución estable o asintóticamente estable de [Pe] si lo es la solución $x(t)$ del sistema equivalente** (y por lo tanto se han de parecer tanto $x(t)$ y $x^*(t)$ como las derivadas de las dos soluciones).

Ej 1. $\begin{cases} x' = 3tx^{1/3} + \ln y \\ y' = xy - t^3 \end{cases}$ Posee solución con $x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0$ si $y_0 > 0$. Única si $x_0 \neq 0$.

No sabemos, ni sabremos, hallar su solución general, ni ver qué soluciones están definidas $\forall t$, ni precisar su estabilidad (aunque se podrían hallar los valores aproximados para unos datos iniciales concretos por métodos numéricos). Es trivial comprobar que una solución del sistema es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\text{única con } x(1)=y(1)=1, \text{ aunque tal vez haya más con } x(0)=0, y(0)=1].$$

Ej 2. $\begin{cases} x' = 1-x \\ y' = -y^3 \end{cases}$ Sistema fácilmente resoluble, pues cada ecuación (resoluble) depende de una variable. [También se podrían ya abordar los sistemas 'desacoplados' del tipo $x' = f(t,x), y' = g(t,x,y)$, hallando la x y llevándola a la otra ecuación].

Hallando las soluciones de la lineal y la separable (ambas autónomas) se obtiene: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 + Ce^{-t} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2t+K}} \end{pmatrix}$.

Como $f, g \in C^1$ en \mathbf{R}^2 existe solución única para cualquier pareja de datos $x(t_0)=a, y(t_0)=b$.

Sin mirar la solución sabíamos que cualquier $x(t)$ está definida $\forall t$ y que cada $y(t)$ no trivial explota para un $t_1 < t_0$ (por la potencia $-y^3$).

Estudiamos la estabilidad de la solución que satisface $x(0)=1, y(0)=0 \rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ [perdida en el cálculo].

Las soluciones próximas con $x(0)=a, y(0)=b$ son $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(a-1)e^{-t}}{a} \\ \frac{1}{\sqrt{2a^2t+1}} \end{pmatrix}$ [definidas $\forall t \geq 0$, claro].

Es claro que $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{(a-1)e^{-t}}{a} \\ \frac{1}{\sqrt{2a^2t+1}} \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{0}$, pero esto no basta en sistemas para ser AE.

Habría que encontrar además un δ tal que se cumpliese $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| \leq \varepsilon$ cuando $\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} < \delta$.

[ES posible encontrarlo, aunque es complicado hacerlo. Pero en el capítulo 3 veremos formas fáciles de precisar la estabilidad de las soluciones constantes de un sistema autónomo].

Ej 3. $t^2x'' - 2tx' + 2x = 0$. Posee solución única con $x(t_0)=a, x'(t_0)=b$ si $t_0 \neq 0$.

En la próxima sección veremos que su solución general es: $x = c_1t + c_2t^2$.

La única solución que satisface $x(1)=a, x'(1)=b$ es $x = (2a-b)t + (b-a)t^2$ (que, como debía, es función continua de los datos iniciales). Las infinitas soluciones $x = c_2t^2$ satisfacen $x(0)=0, x'(0)=0$, pero no hay ninguna satisfaciendo $x(0)=1, x'(0)=0$.

La solución con $x(1)=x'(1)=1$ (o sea, $x=t$) es inestable pues para el sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2t^{-2}x + 2t^{-1}y \end{cases} \text{ es inestable } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ pues } \left\| \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (2a-b)t + (b-a)t^2 \\ (2a-b) + 2(b-a)t \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty,$$

para infinitos a y b tan cercanos como queramos a 1.

(Escribir las soluciones del sistema equivalente a partir de las de la ecuación es muy sencillo: basta formar un vector cuyo primer elemento sea la solución de la ecuación y el segundo su derivada. Y si resolvemos una ecuación a partir del equivalente (poco útil como se ha dicho) lo que obtendremos es un vector en el que el segundo elemento es la derivada del de arriba, que es la solución de la ecuación).

2.2 Soluciones de sistemas y ecuaciones lineales

Sea $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ y' = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{cases}$. O en forma vectorial:

$$[S] \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \text{con } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Suponemos a, b, c, d, f, g funciones de \mathbf{R} en \mathbf{R} **continuas** (o sea, la matriz $\mathbf{A}(t)$ y la función vectorial $\mathbf{f}(t)$ lo son) en un intervalo I (finito o infinito, abierto o cerrado) y sea $t_0 \in I$. El teorema de existencia y unicidad asegura que entonces una única solución de [S] cumple cualquier par de datos iniciales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$. Como ocurría en las lineales de primer orden, se puede probar que **la solución única está definida** $\forall t \in I$.

Consideremos primero el **sistema homogéneo**: [Sh] $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$.

Una matriz $\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$ cuyas columnas $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son soluciones de [Sh] y tal que el determinante $|\mathbf{W}|(t_0) \neq 0$ se llama **matriz fundamental** de [Sh].

Este teorema dice que [Sh] está resuelto conocida una $\mathbf{W}(t)$ (pero no nos dice cómo hallarla):

Teor 1. El conjunto V de soluciones de [Sh] es un espacio vectorial de dimensión 2. Una base de V es el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, soluciones que constituyen una matriz fundamental $\mathbf{W}(t)$. Por tanto, la solución general de [Sh] es:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}, \quad \text{con } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ arbitrario.}$$

Es fácil probar que cualquier combinación lineal de soluciones de [Sh] es también solución.

Probemos que son base de V las soluciones $\mathbf{e}_1(t)$ y $\mathbf{e}_2(t)$ de valores iniciales $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

Son linealmente independientes:

$$c_1\mathbf{e}_1(t) + c_2\mathbf{e}_2(t) \equiv \mathbf{0} \Rightarrow c_1\mathbf{e}_1(t_0) + c_2\mathbf{e}_2(t_0) = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Toda solución $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ se puede escribir como combinación lineal de ellas:

$$\mathbf{z}(t) = x(t_0)\mathbf{e}_1(t) + y(t_0)\mathbf{e}_2(t) \text{ es solución con } \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \underset{\text{unicidad}}{\Rightarrow} \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{z}(t) \quad \forall t \in I.$$

Si \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son soluciones satisfaciendo $|\mathbf{W}|(t_0) \neq 0$ son linealmente independientes:

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{W}(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Un sistema tiene infinitas matrices fundamentales $\mathbf{W}(t)$. A partir de cualquiera podríamos calcular la solución de [Sh] con el dato $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ simplemente resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\mathbf{W}(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}_0$, que tiene solución única por ser $|\mathbf{W}|(t_0) \neq 0$. Pero lo podemos hacer directamente si tenemos la llamada 'matriz fundamental canónica':

Se llama $\mathbf{W}_c(t)$, **matriz fundamental canónica en t_0** , a la que satisface $\mathbf{W}_c(t_0) = \mathbf{I}$. Dada una $\mathbf{W}(t)$, a partir de ella se puede hallar la canónica, pues $\mathbf{W}_c(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0)$. La solución \mathbf{x} de [Sh] que cumple $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ es: $\mathbf{x} = \mathbf{W}_c(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$.

Es claro que $\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0)$ es la matriz unidad \mathbf{I} en $t = t_0$ y además el producto de $\mathbf{W}(t)$ por la derecha por cualquier matriz constante no singular sigue siendo fundamental (sus columnas serán combinaciones lineales de soluciones y son, pues, soluciones, y su determinante sigue siendo no nulo). Que la última expresión satisface $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ es evidente.

[Para casi ningún sistema es posible dar una $\mathbf{W}(t)$ (ni, por tanto, sus soluciones). Cuando \mathbf{A} sea constante, pronto veremos cómo calcular una, precisamente la canónica). Esto es ya mucho más complicado que en las lineales de primer orden, donde la 'matriz fundamental' era simplemente el escalar $e^{\int a}$, expresable siempre en términos de primitivas, y si a constante la 'matriz' es e^{at}].

Consideremos ahora el **sistema no homogéneo**: [S] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}$.

Teor 2.

a] Si \mathbf{x}_p es cualquier solución de [S] y $\mathbf{W}(t)$ es una matriz fundamental de [Sh], la solución general de [S] viene dada por $\mathbf{x} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p$.

b] Una solución particular de [S] es $\mathbf{x}_p = \mathbf{W}(t) \int \mathbf{W}^{-1}(t) \mathbf{f}(t) dt$.

c] Si $\mathbf{W}_c(t)$ es la canónica en t_0 la solución de [S] con $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ es

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_c(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{W}_c(t) \int_{t_0}^t \mathbf{W}_c^{-1}(s) \mathbf{f}(s) ds \quad [\text{fvc}]$$

[Como para $n=1$, las fórmulas de b) y c) se llaman de **variación de las constantes**].

a] Sea \mathbf{x} solución de [S]. Entonces $[\mathbf{x} - \mathbf{x}_p]' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_p - \mathbf{f} = \mathbf{A}[\mathbf{x} - \mathbf{x}_p] \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_p = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}$ para algún \mathbf{c} , pues satisface [Sh]. Así pues, toda solución se puede escribir así.

b] Veamos primero que \mathbf{W}^{-1} existe, es decir, que la $\mathbf{W}(t)$ es no singular $\forall t \in I$:
Si para algún $s \in I$ fuera $|\mathbf{W}(s)| = 0$ existirían b_1, b_2 no los dos nulos cumpliendo que $b_1\mathbf{x}_1(s) + b_2\mathbf{x}_2(s) = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{x}_1(t) + b_2\mathbf{x}_2(t)$ sería solución con $\mathbf{x}(s) = \mathbf{0}$. Por unicidad sería $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ y también $|\mathbf{W}(t)| = 0$ para todo $t \in I$, en concreto para t_0 .

Y como matrices y vectores se derivan como las funciones de una variable:

$$\mathbf{x}'_p = \mathbf{W}' \int \mathbf{W}^{-1}(t) \mathbf{f}(t) dt + \mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{f} ,$$

pues $\mathbf{W}' = \mathbf{A}\mathbf{W}$ por ser solución cada columna.

c] Por a) y b) es solución de [S]. Y además cumple el dato: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{W}_c(t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{I}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$.

Resumiendo, **hallada una $\mathbf{W}(t)$ queda resuelto el sistema homogéneo y el no homogéneo** (y el problema de valores iniciales). Pero sólo tendremos un método para calcular la $\mathbf{W}(t)$ en caso de que la matriz \mathbf{A} sea **constante**. Para ese cálculo utilizaremos definiciones y resultados algebraicos cuya demostración se puede encontrar en los libros de álgebra.

Sistemas lineales de coeficientes constantes

[C] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}$ y [Ch] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matriz constante.

La **exponencial** de una matriz \mathbf{B} se define: $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \dots$, serie convergente para cualquier \mathbf{B} (sus elementos son series numéricas convergentes).
Se tiene que $e^{\mathbf{B}}$ es no singular, que su inversa es $e^{-\mathbf{B}}$ y que $e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}}$ si $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$.

La exponencial de una matriz no se calcula directamente, sino a partir de su **forma J de Jordan** (la forma más sencilla en que se puede escribir la matriz haciendo cambios de base). Aunque en general sea complicado hallar la \mathbf{J} asociada a una \mathbf{A} , en nuestro caso $n=2$ es fácil dar tanto \mathbf{J} como la matriz \mathbf{P} del cambio de base:

Sea \mathbf{A} una matriz 2x2 y sean λ_1, λ_2 sus autovalores [raíces de $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$].
Entonces hay una matriz no singular \mathbf{P} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ donde:

a] Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son vectores propios asociados [o sea, $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$], son $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)$, matriz cuyas columnas son \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 .

b] Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y sólo existe un vector propio \mathbf{v} linealmente independiente asociado son $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $\mathbf{P} = (\mathbf{w} \mathbf{v})$, \mathbf{w} cualquier vector con $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

c] Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a λ , entonces \mathbf{A} es ya diagonal.

[Los autovalores de una \mathbf{A} real pueden ser reales o complejos conjugados.
En este último caso la \mathbf{J} y la \mathbf{P} serán complejas, pero $\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ será real].

Teor 3. $\mathbf{W}_c(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ es la matriz fundamental canónica en t_0 de [Ch].

En efecto, $\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \mathbf{A} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t}$, admitiendo que se puede

derivar la serie término a término y eligiendo $t_0=0$ por comodidad en la escritura. Es, pues, $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ matriz fundamental pues cada una de sus columnas cumple también [Ch]. Como $e^{\mathbf{A}(t_0-t_0)} = \mathbf{I}$, es la canónica.

Hemos reducido el problema de resolver [C] al de hallar la exponencial de $\mathbf{A}t$ (del producto del escalar t por la matriz \mathbf{A}). Usando la \mathbf{J} asociada a la \mathbf{A} es fácilmente calculable, pues $e^{\mathbf{A}t}$ está relacionada con $e^{\mathbf{J}t}$ de la misma forma que la \mathbf{A} con la \mathbf{J} :

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{P}^{-1}, \text{ ya que}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P} \mathbf{J}^k \mathbf{P}^{-1} t^k}{k!} = \mathbf{P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{J}^k t^k}{k!} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{P}^{-1}, \text{ pues } \mathbf{A}^k = \mathbf{P} \mathbf{J}^k \mathbf{P}^{-1} \dots \mathbf{P} \mathbf{J}^k \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{J}^k \mathbf{P}^{-1}.$$

Y $e^{\mathbf{J}t}$ es fácil de hallar en las dos posibles situaciones que ofrece Jordan para $n=2$:

$$\mathbf{a}] \text{ Si } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ es } e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \quad \mathbf{b}] \text{ Si } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ es } e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

$$\mathbf{a}] \text{ Utilizando la definición: } e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 t^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 t^2 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b}] \text{ Como } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D} + \mathbf{N}, \quad e^{\mathbf{J}t} = e^{\mathbf{D}t} e^{\mathbf{N}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

De lo anterior y de la [fvc] del teorema 2 deducimos la **fórmula de variación de las constantes** para la solución de [C] que satisface el dato inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}(t-t_0)} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{P} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{J}(t-s)} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}(s) ds$$

donde todas las matrices son calculables (hallada la $e^{\mathbf{J}t}$, basta cambiar t por $t-t_0$ o por $t-s$ para tener las otras). Insistimos en que los autovalores λ y las matrices \mathbf{P} , \mathbf{P}^{-1} y $e^{\mathbf{J}t}$ pueden ser complejos, pero si \mathbf{A} es real han de ser $e^{\mathbf{A}t}$ y la solución \mathbf{x} también reales.

Para hacer los cálculos de esta fórmula es aconsejable efectuar las operaciones de derecha a izquierda, de forma que sólo haya que multiplicar matrices por vectores (y no matrices por matrices lo que es mucho más largo y mayor fuente de errores).

Si lo que necesitamos es simplemente la **solución general** nos podríamos ahorrar algunos cálculos (por ejemplo de matrices inversas), pues no necesitamos la canónica.

Por ejemplo, $\mathbf{W}(t) = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t}$ es matriz fundamental de [Ch] (es producto por la derecha de la matriz canónica por la \mathbf{P} no singular) y de ello deducimos que:

$$\text{La solución general del sistema homogéneo [Ch] es } \mathbf{x} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{c}, \text{ con } \mathbf{c} \text{ arbitrario.}$$

En el caso de que \mathbf{A} sea diagonalizable tenemos una solución general aún más explícita:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t} \mathbf{c} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.$$

Expresión inadecuada si los λ son complejos, pues queda \mathbf{x} expresada en términos complejos (en ese caso a veces será mejor seguir otros caminos que describiremos).

Lleguemos esta solución general de una forma directa, que puede dar idea de cómo utilizar matrices incluso para \mathbf{A} no diagonalizables y sin conocer la forma de Jordan. Comprobemos primero que:

$$\lambda \text{ autovalor de } \mathbf{A}, \text{ y } \mathbf{v} \text{ vector propio asociado } \Rightarrow \mathbf{x} = e^{\lambda t} \mathbf{v} \text{ es solución de [Ch].}$$

Esto es cierto, ya que $\mathbf{x}' = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A} e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ y se cumple que $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}$.

Si hay 2 vectores propios linealmente independientes, habrá 2 soluciones de esa forma, que formarán una matriz fundamental $\mathbf{W}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \quad e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2)$, pues $|\mathbf{W}|(t) \neq 0$ por ser los \mathbf{v}_k independientes.

Basta entonces escribir $\mathbf{x} = \mathbf{W}(t) \mathbf{c}$ para obtener el resultado de arriba.

Ej 1. Resolvamos $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y + e^t \\ \text{con } x(0)=0, y(0)=1 \end{cases}$, es decir, $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[Sabemos que dicha solución es única y que está definida para todo $t \in \mathbf{R}$].

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = 1. \text{ Por tanto, } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

[Hallar la inversa de una matriz 2x2 es casi inmediato: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{P}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
se cambian a y d de sitio, b y c de signo y se divide por el determinante].

$$\text{Por tanto: } \mathbf{x}(t) = \frac{1}{4} \mathbf{P} \mathbf{e}^{\mathbf{J}t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \mathbf{P} \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{J}(t-s)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^s \end{pmatrix} ds$$

$$= \frac{1}{4} \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \mathbf{P} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{5(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ -e^s \end{pmatrix} ds = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} \\ -e^t \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \int_0^t e^{5t-4s} ds \\ -\int_0^t e^{5t-4s} ds \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{5t} - e^t \\ 3e^{5t} + e^t \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} [e^{5t} - e^t] \\ -\frac{1}{4} [e^{5t} - e^t] \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5e^{5t} - 5e^t - 4te^t \\ 15e^{5t} + e^t + 4te^t \end{pmatrix}$$

Si queremos la **solución general**, los cálculos son algo más cortos. La solución general de la homogénea \mathbf{x}_h se escribe rápidamente una vez hallados los autovalores y vectores propios:

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} = \mathbf{P}\mathbf{e}^{\mathbf{J}t}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^t \\ 3e^{5t} & -e^t \end{pmatrix} \mathbf{c} = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [= c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2].$$

Para la solución particular de la no homogénea y la **[fvc]** sí se necesita hallar alguna inversa:

$$\mathbf{W}^{-1}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-5t} & e^{-5t} \\ 3e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_p = \mathbf{W}(t) \int \mathbf{W}^{-1}(t) \mathbf{f}(t) dt = \frac{1}{16} \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} -e^{-4t} \\ -4t \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -e^{-4t} - 4te^{-4t} \\ -3e^{-4t} + 4te^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Tanteando con los términos con e^t de la \mathbf{x}_p y la constante c_2 , podemos poner esta solución general del sistema algo más corta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^t \begin{pmatrix} -t \\ t-1 \end{pmatrix}$$

Ej 2. Hallemos la solución general de $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ y la que cumple $x(0)=y(0)=2$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^2 + \lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0 \text{ y } \lambda_2 = -1 \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Por tanto, } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{P}| = 1 \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema homogéneo siempre es fácil: $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 e^{-t} \mathbf{v}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Para una particular podemos usar que una $\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ 1 & 2e^{-t} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{W}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}$.

Y, con la **[fvc]** se tiene: $\mathbf{x}_p = \mathbf{W} \int \mathbf{W}^{-1} \mathbf{f} dt = \mathbf{W}(t) \int \begin{pmatrix} 2 \\ -e^t \end{pmatrix} dt = \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} 2t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 2t-2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

¿Habrá formas de calcular las \mathbf{x}_p tanteando? Algo diremos en el próximo problema.

La solución general del sistema es, pues: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^{-t} + 2t + 1 \\ c_1 + 2c_2 e^{-t} + 2t \end{pmatrix}$ [cambiando algo la c_1].

Imponiendo los datos llegamos a la solución: $\frac{c_1 + c_2 + 1 = 2}{c_1 + 2c_2 = 2} \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 1. \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 2t + 1 \\ e^{-t} + 2t \end{pmatrix}$.

Volvamos a usar la fórmula de la página anterior para obtener este resultado:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{e}^{\mathbf{J}t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P} \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{J}(t-s)} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} ds = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{P} \int_0^t \begin{pmatrix} 2 \\ -e^{s-t} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{P} \begin{pmatrix} 2t \\ e^{-t} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 2t + 1 \\ e^{-t} + 2t \end{pmatrix}.$$

Ej 3. Resolvemos $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y \end{cases}$ con $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm i \rightarrow$$

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{t+it} & 0 \\ 0 & e^{t-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t [\cos t + i \sin t] & 0 \\ 0 & e^t [\cos t - i \sin t] \end{pmatrix}.$$

[Recordemos que $e^{a \pm ib} = e^a [\cos b \pm i \sin b]$ y que, por tanto, $e^{ib} + e^{-ib} = 2 \cos b$, $e^{ib} - e^{-ib} = 2i \sin b$].

$$(\mathbf{A} - [1 \pm i] \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\text{comprobamos: } \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2i^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}].$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \frac{1}{2} \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \frac{1}{2} e^t \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{it} \\ e^{-it} \end{pmatrix} + \mathbf{P} \int_0^t \begin{pmatrix} -ie^{(1+i)(t-s)} \\ ie^{(1-i)(t-s)} \end{pmatrix} ds \\ & \left[-i \int_0^t e^{(1+i)(t-s)} ds = \frac{i}{1+i} [e^{(1+i)(t-s)}]_0^t = \frac{i(1-i)}{1+1} [1 - e^{(1+i)t}] \text{ y análoga la otra} \right] \\ &= e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \begin{pmatrix} [1+i][1 - e^{(1+i)t}] \\ [1-i][1 - e^{(1-i)t}] \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 + [i-1]e^{(1+i)t} + [i-1]e^{(1-i)t} \\ 2 - [1+i]e^{(1+i)t} - [1-i]e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + e^t [\cos t + \sin t] \\ 1 + e^t [-\cos t + \sin t] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t - 1 \\ e^t \sin t + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Está claro que trabajar con autovalores complejos complica mucho los cálculos. Por suerte conoceremos otros caminos para resolver estos sistemas: pronto veremos como convertirlos en ecuaciones de segundo orden (mucho más manejables).

Para este sistema concreto con $\mathbf{f}(t)$ **constante** (que son los que pueden aparecer en el capítulo 3) podíamos haber atajado buscando una solución del sistema no homogéneo que fuese también constante (no siempre existirá, pues debe ser el determinante $|\mathbf{A}| \neq 0$, o lo que es lo mismo, no ser $\lambda = 0$ autovalor, por eso no hay soluciones constantes en el ejemplo 2). Basta resolver el sistema

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \text{ para obtenerla: } x = -1, y = 1 \rightarrow \mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nos falta ya sólo sumar a \mathbf{x}_p la solución general del sistema homogéneo $c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_+ + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_-$ e imponer los datos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 i e^{t+it} - c_2 i e^{t-it} - 1 \\ c_1 e^{t+it} + c_2 e^{t-it} + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d.i.} \begin{cases} c_1 i - c_2 i = 1 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = \frac{1}{2i}, c_2 = -\frac{1}{2i} \rightarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^t [e^{it} + e^{-it}] - 1 \\ \frac{1}{2i} e^t [e^{it} - e^{-it}] + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t - 1 \\ e^t \sin t + 1 \end{pmatrix}$$

Si sólo queremos la solución general en términos de funciones reales podemos hallar \mathbf{P}^{-1} y calcular hasta el final la matriz canónica:

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t+it} & 0 \\ 0 & e^{t-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[Con esta matriz fundamental real podríamos hallar una \mathbf{x}_p (y no sólo en este caso de \mathbf{f} constante) realizando integraciones de funciones reales. Pero esto tampoco ahorra tiempo porque, por ejemplo, es más rápido hallar una primitiva de $e^{(1+i)t}$ que de $e^t \cos t$ (hay que utilizar dos veces partes para volver a encontrar la integral inicial)].

La teoría de los sistemas generales de orden n es la misma que la nuestra de orden 2, pero en la práctica pocos son resolubles, por la sencilla razón de que sus autovalores casi nunca son calculables. Y además se complica bastante la teoría de Jordan.

Dejemos los sistemas y pasemos a estudiar las ecuaciones lineales de orden dos que, como vimos en 2.1, se pueden mirar como un caso particular de ellos. Será cuestión de ir viendo la forma que adoptan los resultados vistos para el 'sistema equivalente' a una ecuación. Este no es el camino más corto para tratarlas. De hecho, sus teoremas se pueden probar sin usar matrices y normalmente los libros de ecuaciones diferenciales las estudian primero.

Ecuaciones lineales de segundo orden

Consideremos [e] $x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$, con a , b y f continuas en I .

Sabemos que hay solución única definida en todo el intervalo I para cada par de datos iniciales $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$ si $t_0 \in I$. Haciendo $x' = y$ se tiene el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -b(t)x - a(t)y + f(t) \end{cases}, \text{ cuyas soluciones serán funciones vectoriales } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}.$$

El sistema está resuelto conociendo una matriz fundamental $\mathbf{W}(t)$. Para ello basta dar **dos soluciones** x_1 y x_2 **de la ecuación homogénea** asociada a [e] (pues la fila inferior de la matriz serán sus derivadas x'_1 y x'_2) tales que sea no nulo en algún $s \in I$ el llamado

$$\text{determinante wronskiano de } x_1 \text{ y } x_2: |\mathbf{W}|(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}.$$

La solución general de [e] será entonces la primera componente del vector:

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{c} + \mathbf{W}(t) \int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt, \text{ y como } \mathbf{W}^{-1}(t) = \frac{1}{|\mathbf{W}|(t)} \begin{pmatrix} x'_2(t) & -x_2(t) \\ -x'_1(t) & x_1(t) \end{pmatrix},$$

unas pocas operaciones nos permiten concluir de los teoremas para sistemas que:

- Teor 4.**
- a]** Sean x_1 y x_2 soluciones de la homogénea tales que $|\mathbf{W}|(s) \neq 0$ para algún $s \in I$. Entonces la solución general de la homogénea es $x_h = c_1 x_1 + c_2 x_2$.
 - b]** Si x_p es una solución de [e] su solución general es: $x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_p$.
 - c]** Una solución particular de [e] es: $x_p = x_2 \int \frac{x_1 f}{|\mathbf{w}|} dt - x_1 \int \frac{x_2 f}{|\mathbf{w}|} dt$.
- Fórmula de variación de las constantes [fvc].**

La expresión de las dos soluciones en términos de funciones elementales se podrá dar sólo en los pocos casos que describiremos (si no, se debe resolver la ecuación por medio de series).

Resolvamos la **ecuación con coeficientes constantes**: [c] $x'' + ax' + bx = f(t)$.

Llamemos [ch] a la **ecuación homogénea** ($f \equiv 0$). La matriz del sistema asociado:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \text{ tiene por } \text{ecuación característica } P(\lambda) \equiv \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Como los elementos del vector real $\mathbf{P}e^{Jt}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}$, solución general del sistema homogéneo, están formados por combinaciones lineales arbitrarias de los elementos de la matriz e^{Jt} , la **solución general de [ch]** es, según sean las raíces de $P(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reales, } x &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \\ \text{Si } \lambda \text{ doble (real), } x &= (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}. \\ \text{Si } \lambda = p \pm qi, x &= (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt) e^{pt}. \end{aligned}$$

$$\text{pues } e^{Jt} \text{ es: } \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \text{ ó } \begin{pmatrix} e^{pt}[\cos qt + i \sin qt] & 0 \\ 0 & e^{pt}[\cos qt - i \sin qt] \end{pmatrix}$$

[Se puede dar la solución sin usar el sistema equivalente: probando en [ch] soluciones del tipo $x = e^{\lambda t}$ se deduce que λ debe satisfacer la ecuación característica $P(\lambda) = 0$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbf{R}$ es claro que el $|\mathbf{W}|$ de $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ es no nulo. Si λ doble, se comprueba que $te^{\lambda t}$ también es solución y que es $\neq 0$ el $|\mathbf{W}|$ de ambas. Y si $\lambda \in \mathbf{C}$ se utiliza que parte real e imaginaria de una solución compleja también lo son].

Para calcular una solución particular de la no homogénea [c] disponemos siempre de la fórmula de **variación de las constantes**, pero en muchas ocasiones será preferible utilizar el método de los **coeficientes indeterminados** que pronto describiremos.

Ej 4. $x'' + 4x' + 3x = 0$, $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = -1, -3 \rightarrow x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$.

$x'' + 4x' + 4x = 0$, $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -2$ doble $\rightarrow x = (c_1 + c_2 x) e^{-2t}$.

$x'' + 4x' + 5y = 0$, $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -2 \pm i \rightarrow x = (c_1 \cos t + c_2 \sin t) e^{-2t}$.

Ej 5. $x'' - 2x' + x = 6te^t, x(1)=x'(1)=0$ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ doble $\rightarrow x_h = (c_1 + c_2t)e^t$.

$$|W|(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t} \rightarrow x_p = 6te^t \int \frac{e^t te^t}{e^{2t}} dt - 6e^t \int \frac{te^t te^t}{e^{2t}} dt = t^3 e^t \rightarrow x = (c_1 + c_2t)e^t + t^3 e^t.$$

De los datos iniciales: $\left. \begin{matrix} x(1) = [c_1 + c_2 + 1]e^0 = 0 \\ x'(1) = [c_1 + 2c_2 + 4]e^0 = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow x = (2 - 3t + t^3)e^t$, solución buscada.

Hallemos la x_p de otro modo, introduciendo los **coeficientes indeterminados**. La idea es probar una x_p 'similar' a $f(t)$. Una buena candidata a x_p es un polinomio multiplicado por e^t pues sus derivadas son del mismo tipo. En principio pensaríamos en $x_p = e^t[At+B]$, pero al figurar ya e^t y te^t en x_h , habrá que incluir otras potencias de t . El siguiente teorema precisará la candidata $x_p = t^2 e^t[At+B]$, con A y B adecuados. Para fijarlos llevamos a la ecuación x_p y sus derivadas:

$$x'_p = e^t[At^3 + (B+3A)t^2 + 2Bt] \text{ y } x''_p = e^t[At^3 + (B+6A)t^2 + (4B+6A)t + 2B]$$

obteniendo $[6At+2B]e^t = 6te^t \Rightarrow B=0, A=1$. Así hallamos de nuevo la $x_p = t^3 e^t$. Aquí parece más largo este camino que la [fvc], pero en muchos otros ahorra el cálculo de largas primitivas.

Aunque sea **muy mal camino**, repasemos las matrices resolviendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y + 6te^t \end{cases}, \text{ o sea, } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6te^t \end{pmatrix}, \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \lambda = 1 \text{ doble} \rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^t$$

[nunca la matriz de un sistema proveniente de una ecuación es diagonal].

El único (salvo producto por un escalar) vector \mathbf{v} asociado al $\lambda = 1$ doble es $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Escogemos \mathbf{w} tal que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{v}$, por ejemplo $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \int_1^t e^{t-s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6se^s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t^3 - 3t + 2 \\ t^3 + 3t^2 - 3t - 1 \end{pmatrix} e^t \quad \begin{matrix} \text{[su } x \text{ es la de antes} \\ \text{y su } y \text{ es la } x' \end{matrix}$$

Cuando $f(t)$ está formada por polinomios, exponenciales, senos y cosenos se puede usar el **método de los coeficientes indeterminados** (del tanteo organizado). Se lleva a [c] una x_p similar a $f(t)$ con constantes arbitrarias que se precisan resolviendo sistemas lineales:

a] Si $f(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$, con p_k polinomio de grado k , y λ no es autovalor de [ch] existe una solución particular de [c] de la forma $x_p = e^{\lambda t} P_k(t)$, donde P_k es otro polinomio de grado k cuyos coeficientes se precisan llevando x_p a [c]. Si λ es autovalor de multiplicidad r , $x_p = t^r e^{\lambda t} P_k(t)$.

Teor 5.

b] Si $f(t) = e^{pt} [p_j(t) \cos qt + q_k(t) \sin qt]$, p_j y q_k de grados j y k , y $p \pm iq$ no es autovalor hay $x_p = e^{pt} [P_m(t) \cos qt + Q_m(t) \sin qt]$, con P_m y Q_m de grado $m = \max\{j, k\}$. Si $p \pm iq$ es autovalor hay $x_p = t e^{pt} [P_m(t) \cos qt + Q_m(t) \sin qt]$.

c] Si $f(t) = f_1(t) + \dots + f_m(t)$ y $L[x_i] = f_i(t) \Rightarrow L[x_1 + \dots + x_m] = f(t)$.

[En particular, si $\lambda = 0$, o sea, si $f(t)$ es un polinomio, bastará probar según **a]** un polinomio adecuado, y desde luego entendemos una constante como un polinomio de grado 0].

Ej 6. Hallemos x_p de $x'' + x = f(t)$ para varias $f(t)$. Su solución será $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + x_p$.

Si $f(t) = 2e^t$, existe $x_p = Ae^t = x'_p = x''_p \rightarrow 2Ae^t = 2e^t \rightarrow A=1, x_p = e^t$. Mucho más largo con la [fvc]:

$$|W|(t) = 1 \rightarrow x_p = \sin t \int 2e^t \cos t dt - \cos t \int 2e^t \sin t dt = \dots = se^t [c+s] - ce^t [s-c] = \frac{1}{2} [s^2 + c^2] e^t = e^t.$$

Si $f(t) = t^3$, hay $x_p = At^3 + Bt^2 + Ct + D$ (polinomio de grado 3 pues $\lambda = 0$ no es autovalor)

$$\rightarrow 6At + 2B + At^3 + Bt^2 + Ct + D = t^3 \rightarrow A=1, B=0, C=-6A=-6, D=-2B=0, x_p = t^3 - 6t.$$

Si $f(t) = e^t \cos t$, hay $x_p = e^t (A \cos t + B \sin t)$ [hay $\lambda = \pm i$, no $1 \pm i$, y debe estar $\sin t$]

$$\rightarrow (A+2B) \cos t + (B-2A) \sin t = \cos t \rightarrow \begin{cases} A+2B=1 \\ B-2A=0 \end{cases} \rightarrow x_p = e^t \left(\frac{1}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t \right).$$

Si $f(t) = \sin t$, como $\pm i$ es autovalor (es decir, como [ch] ya tiene soluciones de esa forma):

$$x_p = t(A \cos t + B \sin t) \rightarrow 2B \cos t - 2A \sin t = \sin t \rightarrow x_p = -\frac{t}{2} \cos t.$$

Si $f(t) = \cos^2 t$, aparentemente no podemos utilizar coeficientes indeterminados, pero como

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \rightarrow \text{existe } x_p = A + B \cos 2t + C \sin 2t \rightarrow x_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2t.$$

Si $f(t) = \tan t$, necesitamos la fórmula de variación de las constantes:

$$x_p = \sin t \int \sin t dt - \cos t \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = -sc + sc - c \int \frac{dt}{c} \stackrel{u=s}{=} \int \frac{du}{1-u^2} = \dots = -\cos t \ln \frac{1+\sin t}{\cos t}.$$

Aunque es perder el tiempo pasar de ecuaciones a sistemas, en cambio, **sí es práctico convertir un sistema dado en una ecuación de mayor orden** (sobre todo si los autovalores son complejos).

Ej 3*. Volvamos a resolver el ejemplo 3:
$$\begin{cases} x' = x - y + 2 & x(0) = 0 \\ y' = x + y & y(0) = 1 \end{cases}$$

Despejemos la x de la segunda ecuación (más corta que la otra): $x = y' - y$.

Sustituyendo en la primera: $y'' - y' = y' - y - y + 2$, $y'' - 2y' + 2y = 2$.

La solución general de la homogénea la da la ecuación característica (la misma que la de la matriz) y la solución particular aquí salta a la vista $y_p = 1$ (con la fórmula de variación de las constantes sería largo y el método de coeficientes indeterminados sugiere probar una constante). Así pues:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm i \rightarrow y = (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)e^t + 1$$

Con los datos iniciales: $y(0) = 1$, $y'(0) = x(0) + y(0) = 1$, obtenemos la y de antes: $y = e^t \operatorname{sen} t + 1$.

Y simplemente sustituyendo esta y obtenemos la x : $x = y' - y = e^t \cos t - 1$.

Ej 2*. Y ahora el ejemplo 2:
$$\begin{cases} x' = x - y + 1 & x(0) = 2 \\ y' = 2x - 2y & y(0) = 2 \end{cases}$$
 Llevando $x = y + \frac{1}{2}y'$ a la primera:

$$y' + \frac{1}{2}y'' = y + \frac{1}{2}y' - y + 1, \quad y'' + y' = 2.$$

$\lambda = 0, -1$ dan las soluciones de la homogénea. Y para la y_p , por ser $\lambda = 0$ autovalor, probamos:

$$y_p = At \rightarrow A = 2, \quad y_p = 2t \text{ [o a ojo]}. \text{ La solución general es } y = c_1 + c_2 e^{-t} + 2t.$$

De los datos $y(0) = 2$, $y'(0) = 4 - 4 = 0$ obtenemos $c_2 = 2$, $c_1 = 0$, $y = 2e^{-t} + 2t$.

Y, por tanto, $x = 2e^{-2t} + 2t + \frac{1}{2}(-2e^{-t} + 2) = e^{-2t} + 2t + 1$, como con las matrices.

Consideremos para acabar otros tres casos de ecuaciones lineales de segundo orden [e], ahora con **coeficientes variables**, que son resolubles por métodos elementales.

i) Ecuaciones de Euler: [u] $t^2 x'' + atx' + bx = h(t)$, $t > 0$.

Haciendo el cambio de variable independiente $t = e^s$: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dx}{ds}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2} \left[\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \right]$,

[u] se convierte en la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + (a-1) \frac{dx}{ds} + bx = h(e^s), \text{ de ecuación característica } Q(\lambda) \equiv \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0.$$

Como conocemos las soluciones de la homogénea para la segunda ecuación, deshaciendo el cambio ($s = \ln t$), tenemos la solución general de una ecuación de **Euler homogénea**:

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reales, } x &= c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2} \\ \text{Si } \lambda \text{ doble (real), } x &= (c_1 + c_2 \ln t) t^\lambda \\ \text{Si } \lambda = p \pm qi, x &= [c_1 \cos(q \ln t) + c_2 \operatorname{sen}(q \ln t)] t^p \end{aligned}$$

[Observemos que la 'ecuación característica' de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma t^λ].

Para hallar la x_p de la no homogénea dispondremos siempre de la **fórmula de variación de las constantes con $f(t) = h(t)/t^2$** (y para la ecuación de coeficientes constantes en s del método de **coeficientes indeterminados, si $h(e^s)$ es del tipo adecuado**).

Ej 7. Resolvamos $t^2 x'' + tx' - x = t$ La 'ecuación característica' es $\lambda^2 + (1-1)\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 1$
 \rightarrow la homogénea tiene por solución general $x_h = c_1 t + c_2 t^{-1}$ (que es válida en este caso $\forall t \neq 0$).

$$|W|(t) = \begin{vmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2} \end{vmatrix} = -2t^{-1} \text{ y } f(t) = t^{-1} \rightarrow x_p = t^{-1} \int \frac{t^{-1} dt}{-2t^{-1}} - t \int \frac{t^{-1} t^{-1} dt}{-2t^{-1}} = \frac{t}{2} \ln t - \frac{t}{4}$$

\rightarrow la solución general de la no homogénea es $x = c_1 t + c_2 t^{-1} + \frac{t}{2} \ln t$ (englobado el $\frac{t}{4}$ en $c_1 t$).

La x_p se podría calcular utilizando coeficientes indeterminados en la ecuación $x'' - x = e^s$ a la que conduce el cambio $t = e^s$. La x_p que deberíamos probar en la ecuación en s es $x_p = A e^s$ (por ser $\lambda = 1$ autovalor), o lo que es lo mismo, podríamos probar $x_p = A t \ln t$ en la de Euler inicial. Haciéndolo llegamos a la misma solución general:

$$x_p' = A(\ln t + 1), \quad x_p'' = \frac{A}{t} \rightarrow 2At = 1, \quad A = \frac{1}{2} \text{ como antes.}$$

ii) Si en la ecuación [e] es $b(t) \equiv 0$: $x'' + a(t)x' = f(t)$,

el cambio $x' = y$ convierte dicha ecuación en una lineal de primer orden en y , resoluble con la fórmula del capítulo 1. Integrando y obtendremos la x .

Observemos que el cambio anterior reduce también una ecuación **no lineal** en la que no aparece la x en una de primer orden, tal vez resoluble: $x'' = g(t, x') \rightarrow y' = g(t, y)$; este es uno de los pocos casos de ecuaciones no lineales que se pueden resolver elementalmente).

Ej 8. Calculemos la solución general de $tx'' - 2x' = t \cos t$.

$$x' = y \rightarrow y' = \frac{2y}{t} + \cos t \rightarrow y = Ct^2 + t^2 \int \frac{\cos t}{t^2} dt \rightarrow x = K + Ct^3 + \int [t^2 \int \frac{\cos t}{t^2} dt] dt$$

(primitivas que no son calculables elementalmente).

Es también de Euler ($a = -2$, $b = 0$, $h(t) = t^2 \cos t$) y se puede resolver como el ejemplo 7:

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, 3 \rightarrow x_h = c_1 + c_2 t^3, \text{ solución de la homogénea. } |W|(t) = 3t^2 \rightarrow$$

$$x = c_1 + c_2 t^3 + t^3 \int \frac{\cos t}{3t^2} dt - \int \frac{\cos t}{3t} dt, \text{ que debe poderse hacer coincidir con la de antes.}$$

iii) Si conocemos una solución x_1 de la homogénea $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, el cambio $x = x_1 \int u dt$ lleva la ecuación [e] a lineal de primer orden en u .

[No son, por tanto, necesarias las dos soluciones que exigía el teorema 4; basta sólo hallar una; el problema es que en pocas ocasiones podremos encontrar esa solución: a veces a simple vista, a veces tanteando, a veces aparece al resolverla por series].

En efecto, llevando x , $x' = x_1' \int u dt + x_1 u$, $x'' = x_1'' \int u dt + 2x_1' u + x_1 u'$ a [e]:

$$x_1 u' + (2x_1' + ax_1)u + (x_1'' + ax_1' + bx_1) \int u dt = f(t) \rightarrow u' = -(2x_1' x_1^{-1} + a)u + f(t) x_1^{-1}$$

pues x_1 satisface la homogénea. El conocimiento de la x_1 permite hallar también (sin necesidad de hacer el cambio) una **segunda solución** x_2 de la homogénea, pues integrando la ecuación en u con $f(t) = 0$:

$$u = e^{-\int a dt} x_1^{-2} \rightarrow x_2 = x_1 \int \frac{e^{-\int a dt}}{x_1^2} dt .$$

[El a , desde luego, es el de la ecuación escrita en la forma de arriba $x'' + a(t)x' + \dots$. Se usa bastantes veces esta fórmula resolviendo por series ecuaciones homogéneas].

Ej 9. Resolvamos $t^3 x'' - tx' + x = 1$. $x_1 = t$ es solución de la homogénea.

[Las únicas soluciones de la homogénea que pueden saltar a la vista son las rectas $x = t + b$ (pues entonces el término con x'' no aparece y basta mirar los otros dos)].

Para resolver la ecuación dada podemos ahora seguir dos caminos diferentes:

1) Efectuar explícitamente el cambio $x = t \int u$, $x' = \int u + tu$, $x'' = 2u + tu'$, para convertir la ecuación inicial en la lineal de primer orden no homogénea:

$$t^4 u' + (2t^3 - t^2)u = 1 \rightarrow u' = (t^{-2} - 2t^{-1})u + t^{-4} .$$

Resolver esta lineal: $u = c_2 t^{-2} e^{-1/t} + t^{-2} e^{-1/t} \int t^{-2} e^{1/t} dt = c_2 t^{-2} e^{-1/t} - t^{-2}$.

Y deshacer el cambio: $x = t(c_1 + c_2 \int t^{-2} e^{-1/t} dt - \int t^{-2} dt) = c_1 t + c_2 t e^{-1/t} + 1$.

[No olvidemos la constante de integración; deben aparecer 2 constantes arbitrarias].

2) Hallar otra solución de la homogénea con la fórmula: $x_2 = t \int \frac{e^{-\int -t^{-2} dt}}{t^2} dt = t e^{-1/t}$

y calcular una x_p de la no homogénea con la fórmula de variación de constantes:

$$|W|(t) = e^{-1/t} \rightarrow x_p = t e^{-1/t} \int t^{-2} e^{1/t} dt - t \int t^{-2} dt = t + 1 \rightarrow x = c_1 t + c_2 t e^{-1/t} + 1$$

[Todo el trabajo con la no homogénea ha sido absolutamente inútil y perfectamente podíamos habérnoslo ahorrado, porque la $x_p = 1$ se veía también a simple vista].

2.3 Estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales

Para $y' = a(t)y + f(t)$ la estabilidad la ecuación la daba la $e^{\int a}$, es decir, la 'matriz fundamental'. En general sucede lo mismo, pero pocas veces tendremos una $\mathbf{W}(t)$.

Estudiemos primero la estabilidad de las soluciones del sistema lineal general

$$[S] \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad , \text{ con } \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{f} \text{ continuas en } I = [t_0, \infty)$$

con lo que todas las soluciones de [S] están definidas $\forall t \geq t_0$.

Definimos en 2.1 la norma de un vector, pero no la de una matriz. En los libros de análisis matemático se ve que hay varias posibles. Nosotros elegimos, por ejemplo:

$\|\mathbf{W}(t)\|$, **norma** de $\mathbf{W}(t)$, será la suma de los valores absolutos de sus elementos.

[Hay otras normas, como el supremo de los valores absolutos de los elementos (el determinante $|\mathbf{W}(t)|$ no es una norma). Se prueba que todas ellas son 'equivalentes', es decir, que si una es grande o muy pequeña, las otras también lo son].

Si $\mathbf{W}(t)$ es cualquier matriz fundamental y $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}^*(t)$ son dos soluciones de [S] usando la fórmula de variación de las constantes, y el hecho de que en los libros de análisis se ve que la norma de un producto de matrices es menor que una constante por el producto de las normas de ambas, deducimos:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = \|\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t)[\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)]\| \leq K\|\mathbf{W}(t)\|\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\|.$$

Como $\mathbf{x}(t)$ es estable (AE), si esta norma es pequeña (tiende a 0) para $t \geq t_0$ (para $t \rightarrow \infty$), si $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\|$ es suficientemente pequeña, concluimos:

Teor 1. Todas las soluciones de [S] serán estables, asintóticamente estables o inestables dependiendo de que, respectivamente, la $\|\mathbf{W}(t)\|$ esté acotada, tienda a 0 cuando $t \rightarrow \infty$ o no esté acotada.

Esto significa que a partir de t_0 todos los elementos de $\mathbf{W}(t)$ están acotados, que todos tienden a 0 o que al menos uno de sus elementos no está acotado.

Como ocurría para $n=1$ se puede hablar de la **estabilidad del sistema** [S] pues todas sus soluciones tienen la misma estabilidad [que no depende de la $\mathbf{f}(t)$].

Ej 1. $t^3x'' - tx' + x = 1$ (ej. 9 de 2.2). Una $\mathbf{W}(t)$ es $\begin{pmatrix} t & te^{-1/t} \\ 1 & (1+t^{-1})e^{-1/t} \end{pmatrix}$, pues era $x_h = c_1t + c_2e^{-1/t}$.

Como $\|\mathbf{W}(t)\|$ es no acotada (2 de los elementos de $\mathbf{W}(t)$ no lo están), la ecuación es inestable.

Ej 2. $t^2x'' + 4tx' + 2x = t^4$ $\lambda(\lambda-1) + 4\lambda + 2 = 0$, $x_h = c_1t^{-1} + c_2t^{-2} \rightarrow \mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & t^{-2} \\ -t^{-2} & -2t^{-3} \end{pmatrix}$.

Como $\|\mathbf{W}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, todas las soluciones para $t > 0$ son AE [la $x_p = \frac{1}{30}t^4$ no influye nada].

Para **coeficientes constantes** [C] $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ hay un resultado mucho más directo:

Teor 2. Si los dos autovalores λ de \mathbf{A} tienen $\text{Re}\lambda < 0$, el sistema [C] es AE.
Si los autovalores de \mathbf{A} tienen $\text{Re}\lambda \leq 0$ y \mathbf{A} es diagonalizable [C] es estable.
Si existe algún λ con $\text{Re}\lambda > 0$ o si es $\lambda = 0$ doble y \mathbf{A} no diagonal, [C] es I.

[Los elementos de $\mathbf{W}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ son exponenciales $e^{\lambda t}$ tal vez multiplicadas por t , si \mathbf{J} no diagonal. Si $\text{Re}\lambda < 0$ cada elemento, y por tanto $\|\mathbf{W}(t)\|$, tiende a 0 si $t \rightarrow \infty$. Si hay λ con $\text{Re}\lambda = 0$ y \mathbf{A} es diagonal hay términos que son constantes, senos o cosenos y permanecen acotados sin tender a 0. Si hay algún λ con $\text{Re}\lambda > 0$ o si los términos que vienen de $\lambda = 0$ contienen una t , habrá algún término de la exponencial no acotado y la norma de $\mathbf{W}(t)$ tampoco lo estará].

Así pues, la $\text{Re}\lambda$ precisa la estabilidad de un sistema de coeficientes constantes (y de una ecuación, que era estable si lo era su sistema equivalente). Sólo si hay $\lambda = 0$ doble hay que mirar si $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$ o no para distinguir entre estabilidad no asintótica e inestabilidad. Y esto ni siquiera será necesario en las ecuaciones, pues siempre habrá potencias de t .

Ej 3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$, $\lambda = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow$ sistema inestable [la $\mathbf{f}(t)$ no influye].

Ej 4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = i \Rightarrow$ sistema estable (no asintóticamente).

Ej 5. Hallemos la solución de $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x - y + e^{-t} \end{cases}$ con $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -2 \end{cases}$ y precisemos su estabilidad.

$y = x' - x \rightarrow x'' = e^{-t} \rightarrow x = c_1 + c_2 t + e^{-t}$. imponiendo $x(0) = 1$, $x'(0) = x(0) + y(0) = -1$ se obtiene $c_1 = c_2 = 0$ y por tanto, $x = e^{-t}$, con lo que $y = -e^{-t} - e^{-t} = -2e^{-t}$.

La estabilidad de esta solución (y la de todo el sistema) viene dada por $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^2 = 0$.

Como $\lambda = 0$ doble y \mathbf{A} no es diagonal (no el la $\mathbf{0}$), esta solución es inestable.

[Que la $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ no importa nada. EA no significa que tienda a $\mathbf{0}$ una solución dada, sino que lo haga la diferencia entre dos cualesquiera que partan cerca (entre todas en las lineales)].

Ej 6. $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2 - 2y \end{cases}$ $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \rightarrow \lambda = -1, -2$ (obvio, la matriz es triangular). El sistema es AE. Una solución particular constante se encuentra fácilmente: $x = y = 1$.

Como las soluciones del homogéneo tienden a $\mathbf{0}$, concluimos, sin más que ver la \mathbf{x}_p y los autovalores (y sin calcular las soluciones) que todas las $x(t), y(t) \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ej 7. $x'' + 2x' = 0 \rightarrow \lambda = 0, -2 \Rightarrow$ ecuación estable no asintóticamente.

Ej 8. $x'' + 2x' + x = e^t \rightarrow \lambda = -1$ doble \Rightarrow ecuación AE.

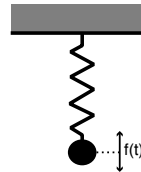
Todas las soluciones se van a infinito, por la $x_p = Ae^t$, pero esto no tiene que ver con la EA. Lo importante es que todas se parezcan entre sí. Insistimos en que $f(t)$ no influye.

Ej 9. $x'' + ax' + x = \text{sen } t$ se puede interpretar como un sistema muelle-masa sometido a una fuerza externa periódica.

Si $a > 0$ (cuando hay un rozamiento que se opone al movimiento) la ecuación es AE, por tener ambos autovalores $\text{Re} \lambda < 0$: $\lambda = \frac{1}{2}[-a \pm \sqrt{a^2 - 4}]$.

Como las de la homogénea se van a 0 y la particular de la no homogénea es de la forma $x_p = A \cos t + B \text{sen } t$, deducimos (sin más cálculos) que el sistema tenderá a oscilar periódicamente. En la práctica será eso lo que observaremos.

Si no hay rozamiento ($a = 0$), la ecuación es EnoA ($\lambda = \pm i$). Pero aunque estén acotadas las soluciones de la homogénea, ninguna solución de la no homogénea lo está, pues la resonante $x_p = -\frac{t}{2} \cos t$ hace que la amplitud de todas las oscilaciones tienda a infinito.



La teoría de las ecuaciones de **orden** n es muy similar a la de orden 2 que hemos visto. La dificultad, de nuevo, se presenta por la imposibilidad de hallar exactamente las raíces de su polinomio característico P_n de grado mayor que 2 [sí es fácil, sin embargo, hallar las x_p cuando se puede aplicar el método de coeficientes indeterminados].

Para analizar su estabilidad deberíamos simplemente saber si esas raíces no calculables tienen o no parte real menor que 0. Esto que para nuestro $n=2$ es trivial:

las raíces de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tienen $\text{Re} \lambda < 0 \Leftrightarrow a, b > 0$ [basta escribirlas],

sólo es algo más complicado (pero abordable) para n mayores. Una condición necesaria (no suficiente) es también que todos los coeficientes de P_n sean estrictamente positivos.

[Que no basta lo prueba $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 21 = (\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 7) \rightarrow \lambda = -3, 1 \pm i\sqrt{6}$].

Quien resuelve el problema es el criterio de Routh-Hurwitz de los libros de ecuaciones.

3. Técnicas básicas de mapas de fases

Los sistemas de ecuaciones no lineales casi nunca se pueden resolver. Pero para los **sistemas autónomos en el plano**, es decir, para los sistemas de la forma

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

es posible obtener las principales propiedades de sus soluciones a partir de su dibujo o, con más precisión, del dibujo de las proyecciones (llamadas **órbitas**) de estas soluciones sobre el plano xy o plano de fases (para dimensiones mayores las cosas se complican notablemente y pueden aparecer las llamadas soluciones caóticas). Este capítulo está dedicado a describir las técnicas básicas destinadas a dibujar el conjunto de las órbitas de un sistema dado de la forma [S] sobre el plano de fases (su **mapa de fases**).

En la sección 3.1 se estudian las **propiedades básicas** de las soluciones y órbitas de estos sistemas autónomos. Se introduce la **ecuación diferencial de las órbitas** (que a veces es resoluble y da la expresión de dichas órbitas) y el **campo vectorial v** tangente a las órbitas (que siempre nos ayudará al pintar los mapas).

Se llaman **puntos críticos** de un mapa de fases a las proyecciones de las soluciones constantes del sistema (obtenidas resolviendo $f = g = 0$). La sección 3.2 clasifica estos puntos en diferentes tipos (**nodos, puntos silla, focos, centros,...**) de acuerdo con la forma de las órbitas a su alrededor. Esta forma será casi siempre similar a la de la **aproximación lineal**, sistema lineal (de órbitas fácilmente dibujables hallados sus autovalores) obtenido despreciando los términos no lineales en el desarrollo de Taylor en torno al punto crítico del sistema inicial [S]. Las únicas excepciones se darán, tal vez, si la matriz de la aproximación lineal tiene autovalores imaginarios puros (centros) o si existen $\lambda = 0$ (**puntos no elementales**). En la sección se estudiarán además las propiedades particulares que poseen los mapas de fases de los sistemas que provienen de **ecuaciones autónomas** de segundo orden $x'' = g(x, x')$. En diversos ejemplos se mostrará como organizar adecuadamente toda la información anterior para dibujar las órbitas de sistemas concretos (clasificar los puntos críticos, intentar hallar las órbitas, localizar las curvas de pendiente horizontal y vertical, determinar los valores del campo adecuados, analizar como se deforman las 'separatrices' de los puntos silla...). Se verá también que la **estabilidad** de las soluciones constantes es muchas veces fácil de precisar (la de las no constantes es complicada) y se comprobará cómo (excepcionalmente) se pueden hallar algunas **soluciones** del sistema [S].

Un tipo particular de sistemas [S] que poseen propiedades adicionales que facilitan el dibujo de su mapa de fases son los **exactos** (aquellos con $f_x + g_y \equiv 0$), estudiados en la sección 3.3. Para ellos siempre se podrá hallar la expresión de sus órbitas y sus puntos críticos elementales sólo podrán ser **puntos silla o centros** (lo que evita las dudas de la última situación). En el caso particular de las **ecuaciones exactas** $x'' = g(x)$ veremos que podemos dibujar su mapa de fases a partir, simplemente, del conocimiento de la llamada **función potencial**.

En 3.4 daremos algunas otras ideas iniciales sobre cómo abordar el problema de ver si en el sistema no lineal sigue o no siendo un **centro** un punto crítico cuya aproximación lineal lo sea (análisis de **simetrías** de las órbitas y utilización de las coordenadas **polares**).

En 3.5, a partir de desarrollos en serie de las órbitas del sistema en polares, calcularemos expresiones (que se suelen llamar **constantes de Lyapunov**), en términos de los coeficientes del sistema, que aseguran la conversión de centros en focos.

Por último, trataremos en 3.6 las **funciones de Lyapunov** que permiten analizar directamente la estabilidad de un punto crítico. Esta técnica, difícil de aplicar muchas veces, es de especial interés si la aproximación no lineal no decide (centros o puntos no elementales).

Resultados más complicados sobre mapas de fases se verán en el próximo capítulo 4.

3.1 Sistemas de dos ecuaciones autónomas

Sea el sistema [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$, es decir, $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ y $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, con f, g y sus parciales continuas en todo \mathbf{R}^2 . Sabemos que entonces existe una única solución de [S] que satisface cualquier par de datos iniciales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ [es decir $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$].

Los siguientes resultados, muy semejantes a los que vimos para las ecuaciones autónomas de primer orden, se prueban fácilmente:

Teor 1. Si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es solución (constante o de equilibrio) de [S]. Si $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución de [S] y $k \in \mathbf{R}$ entonces $\mathbf{x}(t+k) = \begin{pmatrix} x(t+k) \\ y(t+k) \end{pmatrix}$ es también solución de [S].

[Otros de los teoremas de 1.5 no se pueden trasladar a sistemas; por ejemplo las soluciones, en general, no son monótonas y las soluciones acotadas no tienden necesariamente hacia soluciones constantes (al final de la sección volveremos a este tema)].

Cada solución $\mathbf{x}(t)$ de [S] define una curva en el espacio txy , pero también podemos mirarla como una curva en el plano xy (que llamaremos **plano de fases**) descrita en función del parámetro t . A esta segunda curva, proyección de la primera sobre el plano de fases, la llamaremos **órbita** de la solución (muchos libros llaman trayectorias a lo que aquí llamamos órbitas). Nuestro objetivo es representar lo más aproximadamente posible el conjunto de órbitas orientadas de [S], es decir, el **mapa de fases** (o retrato de fases) de [S].

Aunque el interés de la teoría que vamos a desarrollar es precisamente obtener información sobre los sistemas autónomos no resolubles (que son la inmensa mayoría), comencemos dibujando algunas órbitas de un sistema lineal cuyas soluciones sabemos calcular.

Ej 1. Sea $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ (es decir $x'' + x = 0$).

La solución que cumple $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

y la que satisface $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \text{sen } t \\ \text{cos } t \end{pmatrix}$.

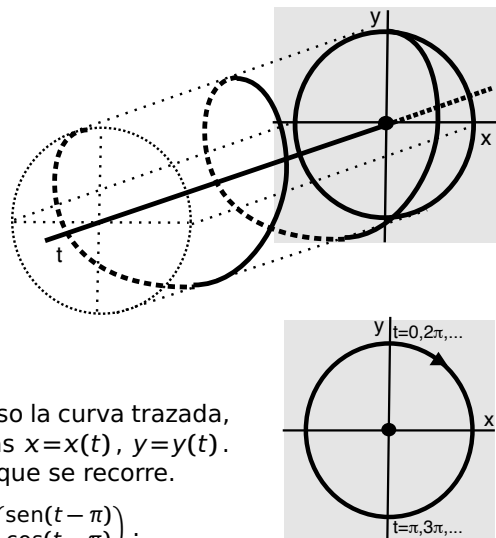
Estas soluciones describen en el espacio la recta y la hélice del dibujo, y sus proyecciones sobre xy son el punto y la circunferencia del inferior. A un punto del mapa de fases $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ que sea proyección de una solución constante de [S], se le llama **punto crítico** (o punto singular) del sistema.

Obtenemos las mismas órbitas si dibujamos en cada caso la curva trazada, al aumentar el parámetro t , por el punto de coordenadas $x = x(t), y = y(t)$. La flecha nos orienta la órbita, indicando el sentido en que se recorre.

Si imponemos $\mathbf{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\text{sen } t \\ -\text{cos } t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}(t - \pi) \\ \text{cos}(t - \pi) \end{pmatrix}$.

La órbita de esta solución (cuya gráfica en el espacio es una traslación paralela al eje t de la hélice anterior) es la misma circunferencia de antes, si bien sus puntos son alcanzados para valores de t distintos. Esta situación se da en cualquier sistema autónomo (y no en un sistema cualquiera) y por eso tiene sentido dibujar su mapa de fases: si $x = x(t), y = y(t)$ son las ecuaciones de una órbita, otra parametrización de la misma órbita es $x = x(t+k), y = y(t+k)$ para cualquier k (aunque para un mismo t se obtengan valores de x e y diferentes). Dicho de otra forma: como las traslaciones de una solución hacia adelante y hacia atrás son también soluciones, las proyecciones de todas estas curvas del espacio son la misma órbita.

Para otros valores iniciales obtendríamos otras soluciones periódicas, cuyas proyecciones serían todas circunferencias (de diversos radios).



Pero normalmente no conoceremos las soluciones de [S]. Para dibujar su mapa de fases trataremos de buscar información a partir de las propias funciones f y g . Intentemos primero hallar explícitamente las órbitas de [S]. Eliminando la t del sistema obtenemos la **ecuación diferencial de las órbitas**:

$$[o] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

(pues $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$, si lo permite el teorema de la función inversa).

Las curvas integrales de [o], quizás resoluble por los métodos de la sección 1.1 (pocas veces, por tanto), y dibujables por los de la 1.2, serán las órbitas de [S] (y al revés: una ecuación como [o] se puede mirar como un sistema y usar las técnicas de mapas de fases para trazar sus curvas integrales). Como se ha eliminado la t , si dibujamos las órbitas exclusivamente a partir de [o] éstas carecerán en principio de sentido de recorrido, pero será fácil orientarlas utilizando el campo \mathbf{v} que presentamos a continuación.

Resolviendo la ecuación [o] para el ejemplo 1 (lo que en este caso es posible) obtenemos de forma mucho más rápida sus órbitas (circunferencias menos el punto crítico):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \rightarrow x^2 + y^2 = C$$

Una información parecida a la que nos proporciona el campo de direcciones de [o] se obtiene tratando el **campo vectorial \mathbf{v}** dado en cada punto del plano por

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

[que coincide con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, vector tangente a la órbita en el punto (x,y)].

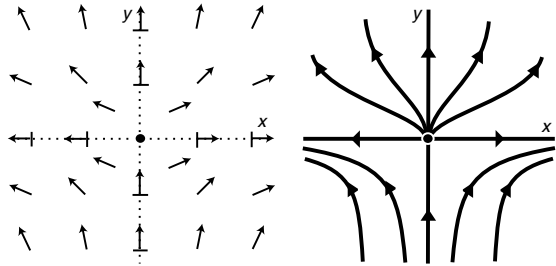
Por tanto, las órbitas de [S] serán curvas tangentes a (y recorridas en el sentido que indican) los vectores del campo \mathbf{v} (como se ve, este campo sólo se anula en los puntos críticos).

Generalmente utilizaremos el campo \mathbf{v} para completar otras informaciones, pero, aunque fallen todas las demás técnicas que iremos presentando, siempre podremos dibujar unos cuantos vectores del campo \mathbf{v} y hacernos una idea del mapa de fases.

Repasemos lo visto con otro ejemplo, tampoco muy práctico por ser el sistema resoluble:

Ej 2. $\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}$ [o] $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$, $\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$.

Es claro que el origen es el único punto crítico. Algunos vectores del campo \mathbf{v} (pintados con el mismo módulo pues nos interesa su dirección y sentido) son los del dibujo de la izquierda. Se ve que ambos ejes están formados por órbitas, ya que son rectas tangentes al campo \mathbf{v} .



Podemos también resolver la ecuación separable [o]: $y = [c - \ln|x|]^{-1}$, o sea, $x = ce^{-1/y}$.

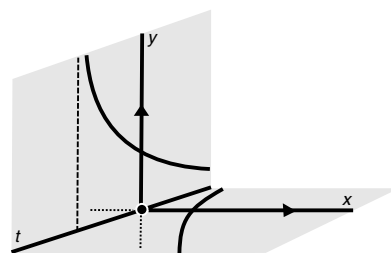
Con todo ello completamos el mapa de fases dibujado a la derecha.

Cada órbita muestra los valores que toman la x y la y de la solución de la que es proyección, pero no nos dice en qué instante t los alcanzan. Por ejemplo, vemos que la $x(t)$ de la solución con $x(0)=0$, $y(0)=1$ es 0 para todo t y podemos afirmar que su $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$ y que es $y(t)=155$ para algún $t > 0$, pero sólo podemos encontrar este t calculando la $y(t)$

[$y(t) \rightarrow \infty$ pues si tiende hacia un valor constante a debe ser (lo probamos para las autónomas de primer orden) $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv a$ una solución constante, lo que no es posible por no existir más puntos críticos].

Tampoco podemos saber viendo el mapa de fases si esta $y(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Pero si resolvemos se comprueba que $y(t) = 1/(1-t)$ explota en $t=1$.

Sin embargo la solución $x(t) = e^t$, $y(t) = 0$, con otra órbita recta similar a la anterior, está definida $\forall t \in \mathbf{R}$.



Estudiamos otras propiedades generales de las órbitas:

Teor 2.

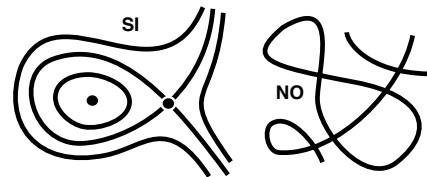
Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita de [S]. Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.

Dado un \mathbf{x}_0 , sea $\mathbf{x}(t)$ la única solución con $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$. Si para otra $\mathbf{x}^*(t)$ su órbita pasa por ese punto, debe ser $\mathbf{x}^*(t_*)=\mathbf{x}_0$ para algún t_* . Como $\mathbf{x}^*(t+t_*)$ es también solución y toma en $t=0$ el mismo valor que $\mathbf{x}(t)$ es, por unicidad, $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*(t+t_*)$, o sea, será $\mathbf{x}(t-t_*)=\mathbf{x}^*(t) \forall t$. Por tanto, $\mathbf{x}^*(t)$ es traslación de $\mathbf{x}(t)$ y sus órbitas coinciden.

Sea $\mathbf{x}(t)$ solución no constante. Si su órbita se corta a sí misma ello significa que existe un primer $T > 0$ en el que vuelve a ser $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0)$. Utilizando la unicidad en $t=0$ se tiene que para todo t es $\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{x}(t)$ y la solución es T -periódica y su órbita se repite cada T unidades de tiempo, formando una curva cerrada simple.

Veamos las conclusiones que se deducen de este segundo teorema.

Las órbitas no pueden cortarse unas con otras, ni a sí mismas por lo que sólo pueden ser de 3 tipos: **puntos críticos, curvas cerradas simples y arcos simples** (asociadas, respectivamente, a soluciones constantes, periódicas y no periódicas). Sí pueden diversas órbitas confluir en un punto crítico, lo que no viola la unicidad:



corresponderán a diferentes soluciones que tienden hacia la solución constante cuando t tiende a $+$ o $-\infty$, pero que no la alcanzan en tiempo finito. [En los dibujos, para resaltar esa idea, trataremos de no unir esas órbitas con el punto, aunque no es lo que pase realmente].

En los ejemplos tratados hasta ahora aparecen órbitas de los 3 tipos. En ambos hay puntos críticos, en el 1 todas las demás curvas eran cerradas y el 2 todas eran arcos simples. En este, infinitas órbitas ‘pasan’ por el origen (realmente se acercan a él cuanto $t \rightarrow -\infty$).

Aunque el siguiente resultado es de difícil demostración, lo citamos aquí para seguir con la comparación con las autónomas de primer orden. ¿Hacia qué pueden tender las soluciones acotadas (cuando $t \rightarrow \infty$ o cuando $t \rightarrow -\infty$) de un sistema autónomo? El llamado ‘teorema generalizado de Poincaré-Bendixson’ viene a decir que sólo hay tres tipos de conjuntos límite: puntos críticos, órbitas cerradas o conjuntos acotados formados por un número finito de puntos críticos y órbitas que los unen (el punto y la órbita que sale y llega a él debajo del SI de arriba es un ejemplo de ese tercer tipo). Veremos muchos otros puntos que serán límite de órbitas y algunas órbitas cerradas a las que se aproximarán otras órbitas (ciclos límite). Pero no daremos ejemplos del tercer tipo de conjunto al que tiendan otras soluciones.

Hemos visto que la órbita de un sistema autónomo que pasa por un punto \mathbf{x}_0 del plano xy no depende del t_0 en el que la solución $\mathbf{x}(t)$ de la que es proyección satisface $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ (es decir, que la evolución del sistema es independiente del momento en que empezemos a contar el tiempo, como era esperable al no depender f y g de t). Insistimos en que para un sistema no autónomo esto es falso, y no tiene sentido hablar de su mapa de fases.

3.2 Clasificación de puntos críticos elementales

La mayor información sobre un mapa de fases la da el conocimiento de la forma de sus órbitas cerca de un punto crítico. Tratamos primero los **sistemas lineales** (siempre resolubles y con mapas de fases fácilmente dibujables) y después, a partir de ellos, los no lineales.

Sea: [L] $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$, o sea, $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Supondremos $|\mathbf{A}| \neq 0$ (con lo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ será el único punto crítico de [L] y $\lambda=0$ no será autovalor). Clasificamos el origen según los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz \mathbf{A} :

Si λ_1 y λ_2 son **reales y distintos**, la solución general es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \text{ vector propio asociado a } \lambda_i.$$

Llamemos L_1 y L_2 a las rectas que contienen a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 .

Cada L_i está formada por tres órbitas (obtenidas haciendo la otra $c_i=0$): el punto crítico y dos semirrectas orientadas según sea el signo del λ_i .

El vector unitario tangente a las órbitas $[\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}]$ es:

$$\mathbf{t} = \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2}{[c_1^2 \lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} \|\mathbf{v}_1\|^2 + c_2^2 \lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t} \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2c_1 c_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{2(\lambda_1 + \lambda_2)t} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2]^{1/2}}$$

Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, todas las soluciones tienden a $\mathbf{0}$ y el vector $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|$ (si $c_1 \neq 0$) cuando $t \rightarrow \infty$. Todas las órbitas (menos dos) entran en el origen con la pendiente dada por el **vector propio asociado al λ más cercano a 0** y el punto crítico se llama **nodo estable**.

Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, se tiene la misma situación cambiando $+\infty$ por $-\infty$ y el origen se llama **nodo inestable**.

Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, las órbitas sobre L_2 se aproximan al origen y se alejan sobre L_1 . Las demás tienden asintóticamente a L_1 o L_2 según tienda t a $+\infty$ ó $-\infty$ adoptando la forma hiperbólica del dibujo de la derecha (no tienen que ser exactamente hipérbolas) y tenemos un **punto silla**.

Si λ es **doble** y \mathbf{A} diagonal la solución es:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Entonces, si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) para cada par de constantes nos acercamos (alejamos) a $\mathbf{0}$ según una recta diferente y se dice que el punto es un **nodo estelar estable (inestable)**.

[Es muy sencillo hallar las órbitas usando [o]:

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow y = Cx].$$

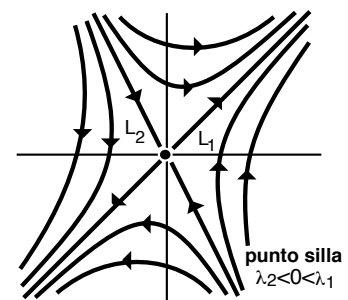
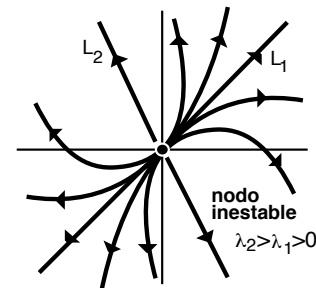
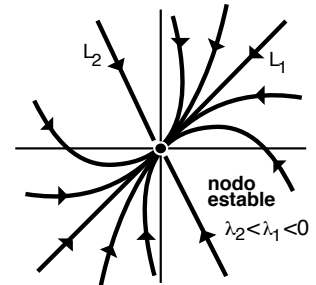
Si λ es **doble** y \mathbf{A} no diagonal la solución es:

$$\mathbf{x}(t) = [c_1 \mathbf{w} + (c_1 t + c_2) \mathbf{v}] e^{\lambda t},$$

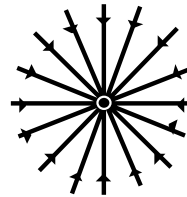
con \mathbf{v} único vector propio asociado a λ .

Si $c_1 = 0$ estamos sobre la recta L asociada a \mathbf{v} . Se ve, calculando el \mathbf{t} , que el resto de órbitas entran en el origen siendo tangentes a una u otra de las semirrectas que forman L .

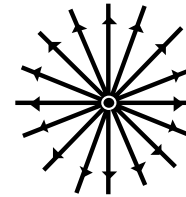
Si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) sobre cada órbita nos acercamos (alejamos) al punto, que se llama **nodo de una tangente estable (inestable)**. En los dos casos las órbitas pueden ser como en el dibujo pequeño (se distingue entre las dos posibilidades fácilmente mirando el campo \mathbf{v}).



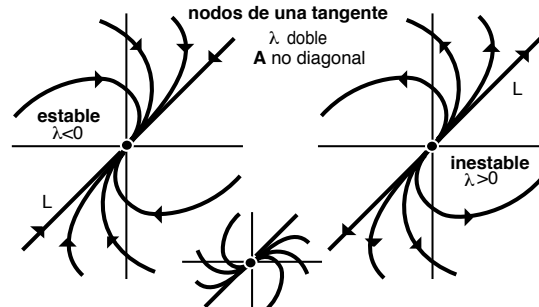
nodo estelar estable
 λ doble < 0 , \mathbf{A} diagonal



nodo estelar inestable
 λ doble > 0 , \mathbf{A} diagonal



nodos de una tangente
 λ doble
 \mathbf{A} no diagonal



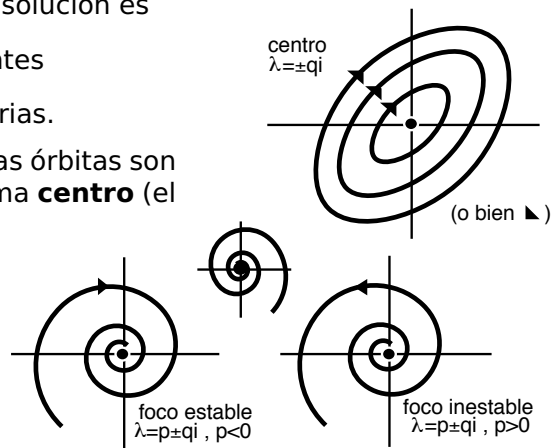
Si los autovalores son **complejos** $\lambda = p \pm qi$, la solución es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos qt + c_2 \sin qt \\ c_3 \cos qt + c_4 \sin qt \end{pmatrix} e^{pt}, \quad c_i \text{ constantes}$$

reales de las cuales sólo dos son arbitrarias.

Si $p=0$, todas las soluciones son periódicas y las órbitas son curvas cerradas rodeando el origen, que se llama **centro** (el sentido de giro lo da el campo \mathbf{v}).

Si $p < 0$, la exponencial decreciente obliga a las órbitas a cerrarse en espiral cuando $t \rightarrow \infty$ hacia el origen, que se llama **foco estable**. Si $p > 0$, las espirales corresponden a soluciones que se alejan del punto crítico que es un **foco inestable**.



La espirales podría ser como en el dibujo pequeño (esto se precisa con el campo \mathbf{v}).

Dibujar las órbitas de sistemas lineales es muy sencillo con la clasificación anterior. Bastará (para nodos y sillas) con trazar las semirrectas órbitas orientadas y precisar el campo \mathbf{v} sobre algunas rectas que pasen por el origen, que son isoclinas de

$$[0] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}, \quad \text{ecuación homogénea.}$$

Por ejemplo, sobre los ejes, o sobre las rectas con pendiente horizontal o vertical. Con esto (también en caso de centro o foco) basta para pintar el mapa de fases en todo el plano. Aunque, por ser [0] homogénea, las órbitas son siempre calculables, normalmente no merecerá la pena calcularlas (pueden además salirnos expresiones no sencillas de dibujar).

Los sistemas que se han visto son homogéneos. Si hay términos no homogéneos (constantes para ser autónoma) y $|\mathbf{A}| \neq 0$ seguirá habiendo un punto crítico \mathbf{x}_0 , que haciendo el cambio $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ se trasladaría al origen manteniendo la matriz \mathbf{A} , con lo que, para analizarlo, basta hallar sus autovalores. Las isoclinas serán las rectas que pasen por \mathbf{x}_0 .

A pesar de su facilidad, los mapas de fases no son de especial interés para sistemas lineales, siempre resolubles. Pero la gran importancia de lo anterior es que nos permitirá deducir la forma de las órbitas cerca de los puntos críticos de los no lineales. Antes de hacerlo, dibujemos dos mapas de fases de lineales para ir practicando y dando algunos nombres:

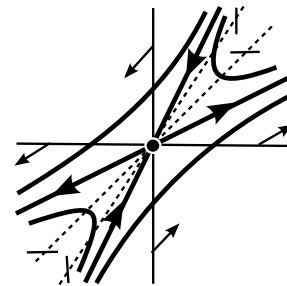
Ej 1. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \quad \lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{ punto silla.}$

Completamos esta información con el campo \mathbf{v} :

\mathbf{v} es **vertical** ($x' = 0$) si $y = \frac{3x}{2}$ y **horizontal** ($y' = 0$) si $y = x$.

Sobre los ejes: $\mathbf{v}(x, 0) = x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0, y) = -2y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[Resolviendo [0] se obtiene: $(2y-x)^2(y-2x) = C$, órbitas de aspecto hiperbólico, pero que no son hipérbolas].



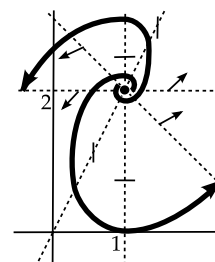
A las órbitas que entran y salen de un punto silla se les llama separatrices, nombre natural, pues 'separan' comportamiento de las soluciones totalmente distintos. Por ejemplo, aquí las soluciones cuyas órbitas parten por debajo de $y = 2x$ se tiene que su $x(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$, mientras que $x(t) \rightarrow -\infty$ si parten por encima de esa separtriz (sobre ella $x(t) \rightarrow 0$ y se le llama variedad estable). Y algo análogo sucede con la otra separtriz (variedad inestable) $y = x/2$. Del mapa de fases (sin resolver el sistema) se puede deducir también, por ejemplo, que para la solución que cumple $x(7) = 1$, $y(7) = 0$ tanto su x como su y tienden hacia ∞ cuando $t \rightarrow \infty$ y tienden hacia $-\infty$ cuando $t \rightarrow -\infty$: basta observar su órbita.

Ej 2. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2x - 2 \end{cases}$ El punto crítico es ahora $x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Como $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, con $\lambda = 1 \pm i$, es un foco inestable.

\mathbf{v} es **vertical** si $y = 2x$ y **horizontal** si $x = 1$.

Además: $\mathbf{v}(x, 2) = 2(x-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x, 3-x) = (x-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

[0, si se prefiere, es el mapa de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ trasladado al punto].



Consideremos ya el **sistema no lineal** [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ y sea $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ punto crítico.

Desarrollando por Taylor f y g en torno a \mathbf{x}_0 y llevando luego este punto al origen con el cambio $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ (o lo que es lo equivalente, haciendo primero el cambio y desarrollando después en $u = v = 0$) se tiene:

$$\begin{cases} u' = f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + R_f(u, v) \\ v' = g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + R_g(u, v) \end{cases} \text{ con } R_f, R_g = o(\sqrt{u^2 + v^2}) \text{ si } u, v \rightarrow 0$$

Como R_f y R_g son pequeños esperamos que (cerca del origen que es ahora punto crítico) sean similares las órbitas de este sistema y las de la **aproximación lineal** obtenida ignorando los términos no lineales. El siguiente teorema precisará que esto es cierto si el lineal es de cualquiera de los tipos clasificados anteriormente, salvo en el caso de los centros.

Llamemos [L] al sistema $\mathbf{u}' = \mathbf{M}\mathbf{u}$, con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

Suponemos $|\mathbf{M}| \neq 0$. Se dice entonces que \mathbf{x}_0 es **punto crítico elemental** de [S]. El teorema de la función implícita asegura que \mathbf{x}_0 es **aislado** (único punto crítico en un entorno). Si $|\mathbf{M}| = 0$ puede no ser aislado y si lo es no se parece al origen de [L], no aislado.

Si el origen es **nodo, punto silla o foco** de [L] entonces \mathbf{x}_0 es un punto crítico del mismo tipo y la misma estabilidad de [S].

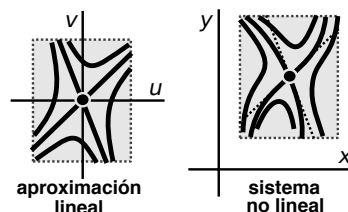
Si el origen es **nodo estelar o de una tangente** de [L] y f y g son C^2 entonces \mathbf{x}_0 es nodo del mismo tipo (y estabilidad) del sistema no lineal [S].

Teor 1. Las órbitas rectas que en los nodos y puntos sillas de [L] llegan o salen del origen se deforman, en general, en curvas de [S] que llegan o salen de \mathbf{x}_0 , pero manteniendo la tangencia dada por los vectores propios de [L].

Si el origen es **centro** de la aproximación lineal y f y g son analíticas entonces \mathbf{x}_0 es o un centro, o un foco estable o un foco inestable en el sistema no lineal.

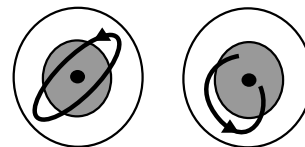
La demostración es complicada y no la damos. No es extraño que sean los centros los únicos puntos elementales que no se conservan pues los pequeños términos no lineales pueden hacer que las órbitas dejen de cerrarse sobre sí mismas. De otra forma: una pequeña perturbación puede apartar los $\lambda = \pm qi$ del eje imaginario. Por la misma razón podría pensarse que también puede separarse dos λ iguales, pero si $f, g \in C^2$ esto no sucede (si no lo son puede cambiar un nodo en un foco).

Así pues, analizando sistemas lineales sabemos, casi siempre, cómo son las órbitas de uno no lineal en un entorno de cada punto crítico (lejos de él serán totalmente diferentes de las del lineal). Este es el paso principal hacia el dibujo del mapa de fases de [S]. En muchos problemas, además, lo que se busca precisamente es el comportamiento de sus soluciones cerca de las de equilibrio. Para ver en cada caso cómo se deforman las órbitas de la aproximación lineal en el no lineal (por ejemplo, hacia dónde se doblan las separatrices de un punto silla) y obtener datos sobre el mapa global habrá que utilizar el campo \mathbf{v} (y las órbitas en el caso excepcional de que sean calculables). En los ejemplos iremos viendo cómo organizar este trabajo.



Es fácil extraer del teorema conclusiones sobre la **estabilidad de las soluciones de equilibrio**, similares a las dadas para las autónomas de primer orden.

El significado geométrico en el plano de fases de esta estabilidad es claro: \mathbf{x}_0 es estable si todas las órbitas que parten suficientemente cerca no se salen de cualquier círculo de radio dado. Es asintóticamente estable si además tienden a \mathbf{x}_0 si $t \rightarrow \infty$.



Teor 2. Si los autovalores de \mathbf{M} tienen $\text{Re}\lambda < 0$, \mathbf{x}_0 es solución constante asintóticamente estable de [S]. Si alguno de los λ tiene parte real positiva, \mathbf{x}_0 es inestable.

Como siempre queda la duda de qué pasa si $\text{Re}\lambda = 0$ (veremos que un punto con un $\lambda = 0$ y otro $\lambda > 0$ es inestable, aunque esto no se deduce del teorema 1). La inestabilidad de algunas **soluciones no constantes** es clara a la vista de un mapa de fases: si las órbitas se alejan, también lo hacen las soluciones de las que son proyección. Pero la estabilidad, en general, no se ve en el dibujo: órbitas próximas pueden corresponder a soluciones muy diferentes.

Pasemos ya a hacer dibujos de mapas de fases de sistemas no lineales (los de centros de la aproximación lineal se verán en secciones siguientes).

Primero hallaremos los posibles **puntos críticos** resolviendo $f(x, y) = g(x, y) = 0$ (en los ejemplos que siguen será posible, pero podría ser sistema no resoluble y habría que aproximarlos numéricamente). Evaluaremos la matriz **M** en cada punto para clasificarlo y dibujaremos segmentos en torno a cada silla o nodo con la pendiente de los vectores propios.

Si podemos resolver la ecuación diferencial [o] de las **órbitas**, dibujaremos algunas de ellas (al menos las más sencillas y nos esforzaremos con las separatrices).

Utilizaremos el campo **v** para completar la información anterior. Habitualmente:

- Buscaremos las curvas en que **v** es **horizontal** o **vertical** ($g=0$ y $f=0$).
- A veces dibujaremos (si es fácil) alguna otra isoclina de la ecuación [o].
- Evaluaremos **v** en los **ejes** (es muy fácil hacer $x=0$ ó $y=0$) y en **rectas que pasan por los puntos críticos** (no es raro que adopten formas sencillas, puesen los puntos críticos es donde se anulan tanto f como g).
- Para ver **cómo se deforman las separatrices** estudiaremos **v** sobre las rectas que indica la aproximación lineal.
- Por último, daremos valores sueltos de **v** en zonas en que haya pocos datos.

Ej 3. $\begin{cases} x' = 8x - y^2 \\ y' = -6y + 6x^2 \end{cases} \rightarrow y = x^2 \uparrow \rightarrow x(8 - x^3) = 0 \rightarrow (0, 0), (2, 4). \mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2y \\ 12x & -6 \end{pmatrix}$ en cada punto es:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ es silla con $\lambda = 8 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = -6 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$ es foco inestable ($\lambda = 1 \pm i\sqrt{143}$).

Completamos la información local con el campo **v** (la ecuación de las órbitas no es resoluble).

El campo es **horizontal** si $y = x^2$ y **vertical** si $8x = y^2$.

Para la deformación de las **separatrices** hallamos **v** sobre las rectas dadas por la aproximación lineal, que aquí son los ejes:

$$\mathbf{v}(x, 0) = 2x \begin{pmatrix} 4 \\ 3x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0, y) = -y \begin{pmatrix} y \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Según esto, la variedad estable se deforma (y la inestable \cup .

El **v** sobre los **ejes** en este ejemplo ya lo hemos hallado.

En **rectas que pasan por** (2, 4) y en un punto con pocos datos:

$$\mathbf{v}(x, 4) = 2(x-2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3x+6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(2, y) = (4-y) \begin{pmatrix} 4+y \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(-2, -2) = 4 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Los vectores dibujados precisan también el sentido en el que se abre el foco y con toda la información anterior tenemos un mapa de fases más o menos como el de arriba.

No podemos resolver el sistema, pero están a la vista algunas propiedades de las soluciones. Por ejemplo, las soluciones constantes son inestables (estaba claro desde que dimos los λ). También vemos que son inestables las soluciones cuya proyecciones son las variedades estables de la silla (órbitas que parten cerca tienen un comportamiento totalmente diferente).

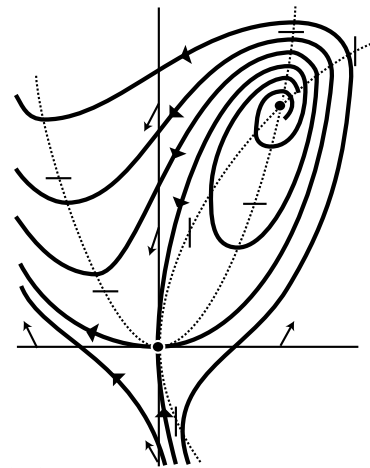
Pero hay otras propiedades de las soluciones que involucran a la variable t y que (como pasará normalmente) no podemos deducir del dibujo de las órbitas. ¿Estarán definidas para todo $t \geq 0$ otras soluciones? En caso afirmativo, ¿serían estables?

Para **calcular las soluciones** de un sistema autónomo no lineal deben darse demasiadas casualidades. Debe ser posible: i) hallar las órbitas, ii) despejar la y (o la x) de la expresión y iii) resolver la autónoma que resulta al llevar esta y a la ecuación para x' (o viceversa). Más habitual es que se pueda calcular alguna solución **asociada a una órbita sencilla**.

Para ilustrar esto volvamos al ejemplo 1: $x' = 3x - 2y$, $y' = 2x - 2y$, de órbitas $(2y - x)^2 (y - 2x) = C$. No podemos despejar y (ni x) y no llegamos por este camino a la conocida solución general del sistema lineal. Pero sí podemos hallar la que cumple $x(0) = 2$, $y(0) = 1$, asociada a la órbita $y = \frac{x}{2}$.

Sustituyéndola en la primera ecuación del sistema: $x' = 2x \rightarrow x = Ce^{2t} \xrightarrow{x(0)=2} x = 2e^{2t} \rightarrow y = e^t$.

Observemos que esta solución (asociada a la variedad inestable de la silla) es inestable a pesar de que el resto de las órbitas se peguen asintóticamente a ella al tender t hacia infinito.



Ej 4. $\begin{cases} x' = y(x-2) \\ y' = x(y-2) \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puntos críticos. Aproximación lineal $M = \begin{pmatrix} y & x-2 \\ y-2 & x \end{pmatrix}$ en cada uno:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: \text{silla.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 2 \text{ doble y nodo estelar inestable.}$$

Utilizamos ahora \mathbf{v} (órbitas calculables, pero complicadas):

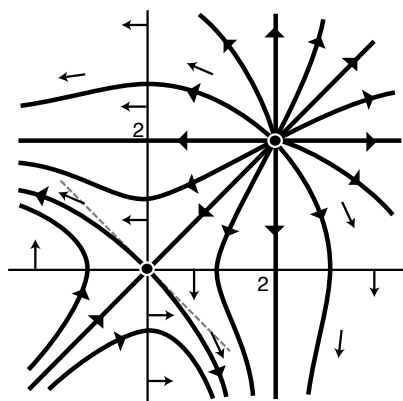
\mathbf{v} es **vertical** si $y=0$ o si $x=2$ [$\Rightarrow x=2$ órbita recta (más exactamente: está formada por tres órbitas)].

\mathbf{v} es **horizontal** si $x=0, y=2$ ($\Rightarrow y=2$ órbita). Además:

$$\mathbf{v}(x, x) = x(x-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ órbita} \quad \mathbf{v}(x, -x) = -x \begin{pmatrix} x-2 \\ x+2 \end{pmatrix} \text{ (se curva)}$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0, y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(1, 3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(-1, 3) = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3, 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4, 3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Excepcionalmente, la separatriz $y=x$ del lineal se conserva, aunque la otra se deforma.

Veamos algunas propiedades de las **soluciones** que se deducen del mapa de fases:

El segmento que une los puntos críticos corresponde a una solución **definida** $\forall t$ (ya que está acotada y no puede irse a infinito en tiempo finito). Esta solución (que sería calculable) es **inestable**, pues mientras ella tiende a $\mathbf{0}$, la x o la y de algunas cercanas $\rightarrow -\infty$.

Vamos ahora a calcular un par de soluciones asociadas a **órbitas sencillas**.

Por ejemplo, busquemos la que satisface $x(0)=1, y(0)=2$. Empezamos encontrando la órbita que pasa por $(1, 2)$ (o sea, la que cumple $y(x=1)=2$). Es claro aquí que esta órbita es $y=2$, que llevada a la primera ecuación da $x' = 2x - 4, x(0)=1 \rightarrow x = 2 - e^{2t}, y=2$, y está **definida** $\forall t$, aunque no podemos decir si es o no estable por no conocer las soluciones cercanas.

En cambio, la solución con $x(0)=y(0)=3 \rightarrow y=x \rightarrow x' = x^2 - 2x$, **explota** en tiempo finito (por la potencia x^2). Como es calculable podemos dar el t de la asíntota: $x = 6/(3 - e^{2t}) \rightarrow t = \frac{1}{2} \ln t$.

No sabremos si casi todas las soluciones no constantes están o no definidas $\forall t$ ni precisar su estabilidad, pues no podemos calcularlas ya que no podemos despejar ninguna variable de la solución de la ecuación de las órbitas: $y + 2 \ln(y-2) = x + 2 \ln(x-2) + C$. Esta expresión nos da una información interesante: las órbitas son simétricas respecto a $y=x$.

Ej 5. $\begin{cases} x' = x(2-x-y) \\ y' = y(3-y-2x) \end{cases}$ Puede describir la evolución de la población de dos especies en competición. En ausencia de la otra, cada una sigue una ecuación logística. Y la presencia de cada una influye negativamente en el crecimiento de la otra (términos en xy). Dibujamos el $x, y \geq 0$, que es donde tiene sentido.

$$x(2-x-y)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0, 3 \\ y=2-x \rightarrow x=2, 1 \rightarrow y=0, 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puntos críticos.}$$

La aproximación lineal $M = \begin{pmatrix} 2-2x-2y & -x \\ -2y & 3-2y-2x \end{pmatrix}$ en cada punto:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodoE: } \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (captura la tangencia), } \lambda = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodoE: } \lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ (tangencia), } \lambda = -3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodoE: } \lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (tangencia), } \lambda = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

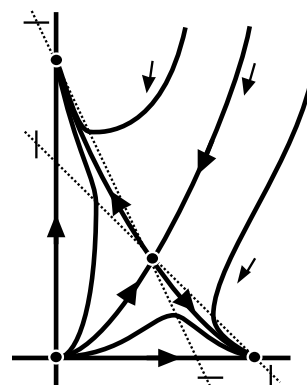
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{punto silla.}$$

\mathbf{v} es **vertical** si $x=0$ o si $y=2-x$ ($\Rightarrow x=0$ órbita).

\mathbf{v} es **horizontal** si $y=0, y=3-2x$ ($\Rightarrow y=0$ órbita).

Valores de \mathbf{v} sobre rectas que contienen puntos críticos:

$$\mathbf{v}(x, 3) = -x \begin{pmatrix} x+1 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2, y) = -y \begin{pmatrix} 2 \\ y+1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(x, 1) = (1-x) \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(1, y) = (1-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 3y \end{pmatrix}.$$



Si los datos iniciales están por encima de la variedad estable de la silla, la especie y tiende hacia su tope logístico y la x se extingue. Lo contrario sucede si están por debajo.

Si los términos de competición (los $-axy$) fuesen más pequeños las dos especies podrían coexistir (los nodos estables se vuelven sillas y pasa a existir un nodo estable en $x, y > 0$ hacia el que tienden todas las soluciones del primer cuadrante. Esto sucede, por ejemplo, con el sistema $x' = x(2-x-y/2), y' = y(3-y-x)$, para el que $x=1, y=2$ es nodo estable).

Las únicas soluciones calculables son las asociadas a $x=0$ o $y=0$ (a la ausencia de una especie). Aparece la ecuación logística cuyas soluciones son coherentes con las órbitas sobre los ejes.

Todo lo dicho sobre sistemas se puede, desde luego, aplicar al caso particular de las **ecuaciones autónomas** (su mapa de fases es el del sistema equivalente):

Sea [e] $x'' = g(x, x')$, o escrita en forma de sistema: [SE] $\begin{cases} x' = v \\ v' = g(x, v) \end{cases}$

(usamos la variable v porque en muchos problemas físicos será una velocidad).

La matriz de la aproximación lineal es $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_v \end{pmatrix}$, evaluada en cada punto crítico.

La ecuación de las órbitas y el campo \mathbf{v} tienen la forma:

[o] $v \frac{dv}{dx} = g(x, v)$, $\mathbf{v}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ g(x, v) \end{pmatrix}$

Las propiedades particulares de los mapas de fases de ecuaciones son inmediatas:

- Los puntos críticos de [e] están sobre el eje $v=0$ [y las x de esos puntos son los ceros de $g(x, 0)$].
- Las órbitas se dirigen hacia la derecha en el semiplano superior y hacia la izquierda en el inferior.
- Las órbitas que cortan el eje $v=0$ lo hacen perpendicularmente.
- Las ecuaciones no poseen nodos estelares.
- Un vector propio asociado a un autovalor λ es $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Ej 6. $x'' = x - x^3 - xv$ $\begin{cases} x' = v \\ v' = x - x^3 - xv \end{cases}$. Puntos críticos $v=0$
 $x=0, \pm 1$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2-v & -x \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \pm 1 \nearrow \lambda = \frac{1}{2}[\mp 1 \pm i\sqrt{7}] \text{ focoE} \\ 0 \searrow \lambda = \pm 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \text{ silla} \end{matrix}$

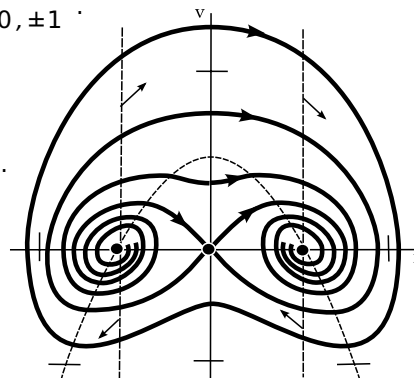
v horizontal si $v=1-x^2$, $x=0$. Vertical si $v=0$ (es ecuación).

v será sencillo sobre $x=\pm 1$: $\mathbf{v}(\pm 1, v) = \begin{pmatrix} v \\ \pm v \end{pmatrix}$,

Para analizar la deformación de las separatrices:

$\mathbf{v}(x, \pm x) = x \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \mp x - x^2 \end{pmatrix}$ (los v con x pequeño indican que se curvan según el dibujo).

[La parábola de pendiente horizontal ya nos lo aseguraba para las separatrices de $v > 0$].



La ecuación de las órbitas [o] $\frac{dv}{dx} = \frac{x-x^3}{v} - x$ no es de ningún tipo resoluble conocido.

Los vectores del campo \mathbf{v} son simétricos respecto al eje v (por ser g impar en x , sus pendientes en $(-x, v)$ y en (x, v) tienen signo opuesto). Entonces sus órbitas también serán **simétricas** respecto a $x=0$. Esta simetría obliga a las órbitas a cerrarse.

En el mapa de fases vemos que hay dos tipos esenciales de soluciones de la ecuación no resoluble: unas son periódicas y otras tienden a ± 1 cuando $t \rightarrow \pm \infty$. Pero sin las órbitas no podemos, por ejemplo, decir exactamente para qué datos iniciales son de uno u otro tipo, o dar una expresión que nos permita calcular los periodos.

Ej 7. $x'' = (x+2x')(x'-1)$ $\begin{cases} x' = v \\ v' = (x+2v)(v-1) \end{cases}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ punto crítico. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (términos lineales). $\lambda = -1$ doble. Nodo de 1tg.

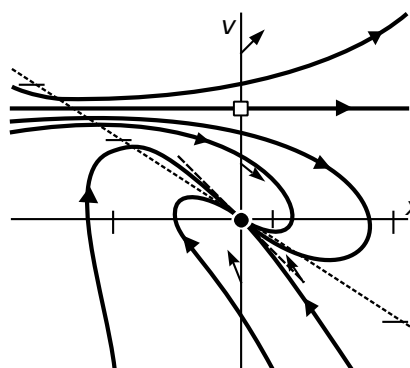
$\mathbf{v}(x, -x) = x \begin{pmatrix} -1 \\ 1+x \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0, v) = v \begin{pmatrix} 1 \\ 2(v-1) \end{pmatrix}$.

Campo horizontal si $v = -\frac{x}{2}$ o si $v=1$ (es órbita).

Calculemos la solución que cumple $x(2)=0$, $x'(2)=1$.

Órbita por $(0, 1) \rightarrow v=1=x' \rightarrow x=t+C \xrightarrow{x(2)=0} x=t-2$.

[Más soluciones no tenemos por ser [o] no resoluble, pero el mapa dice que esta solución es inestable].



Los dos ejemplos siguientes pueden describir sistemas físicos. Dibujamos sus órbitas e interpretamos algunas de ellas. Incluso aunque la ecuación sea lineal (como el primero) y, por tanto, resoluble, se pueden sacar conclusiones muy rápidas sobre las soluciones sólo a partir del mapa de fases.

Ej 8. $x'' + 2ax' + x = 0$, con $a \geq 0$ [sistema muelle-masa con rozamiento (si $a > 0$)].

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -x - 2av \end{cases} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ único punto crítico } \forall a. \lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0: \lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \rightarrow$$

Si $a = 0$, el origen es un centro ($\lambda = \pm i$ y el sistema es lineal).

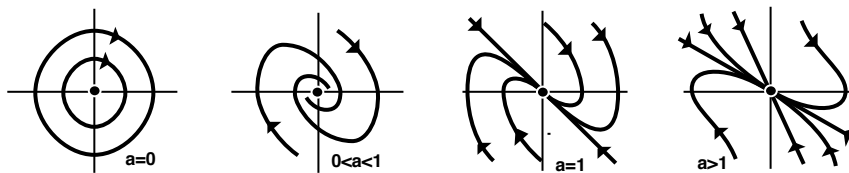
Si $0 < a < 1$, es un foco estable (autovalores complejos con $\text{Re}\lambda < 0$).

Si $a = 1$, es un nodo de una tangente estable (con $\lambda = -1$ doble).

Si $a > 1$, es un nodo estable ($\lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1} < -1 < \lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} < 0$).

Con alguna información más (el campo \mathbf{v} sobre $x=0$ y los puntos en que es horizontal $x = -2av$) podemos ya dibujar los mapas de fases. Como en todo sistema lineal se pueden hallar las órbitas, pero son complicadas y dicen poco. Un pequeño dato adicional es que no hay puntos de inflexión (se puede ver que esto ocurre para todo sistema lineal):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{v^2 + 2axv + x^2}{v^3} = 0 \rightarrow v = (-a \pm \sqrt{a^2 - 1})x, \text{ órbitas rectas.}$$



El origen representa siempre la solución trivial asociada a la posición de equilibrio estable de la masa en reposo en $x=0$. Si $a=0$ (no hay rozamiento), cada órbita cerrada describe un movimiento oscilatorio no amortiguado en torno a $x=0$: si, por ejemplo, la masa está inicialmente en $x=0$ con velocidad $v > 0$, empieza a aumentar x hasta su valor máximo en el instante en que $v=0$; disminuye después la x (el valor absoluto $|v|$ tiene un máximo y luego decrece cuando el movimiento es contra la fuerza del muelle); avanza hasta llegar a $x=0$ con la misma velocidad inicial y repite indefinidamente el movimiento. Si $0 < a < 1$ (rozamiento escaso), pasa infinitas veces por $x=0$, pero la amplitud de la oscilación va tendiendo a 0 con el tiempo. Si $a \geq 1$ (fuerte rozamiento), las órbitas describen movimientos que tienden hacia $x=0$, pero no son posibles las oscilaciones. Dependiendo de su posición y velocidad iniciales, o la masa tiende indefinidamente hacia la posición de equilibrio sin llegar a superarla, o la cruza una sola vez.

Ej 9. $x'' = x^2 + 3x - 4x'$ Puede describir el movimiento de una partícula en el eje x , sometido a una fuerza $x^2 + 3x$ que sólo depende de su posición y con un rozamiento $-4x'$ proporcional a su velocidad.

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = x^2 + 3x - 4v \end{cases} \rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x + 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Evaluando \mathbf{M} en los dos puntos críticos que hay:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1, -3, \text{ nodo E.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{7}, \text{ silla.}$$

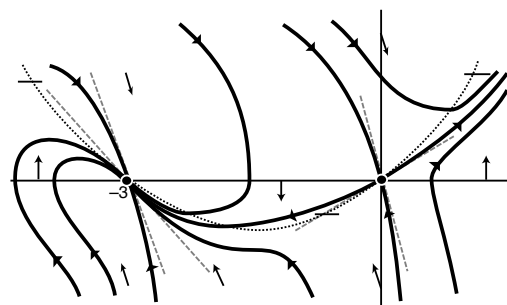
\mathbf{v} es horizontal sobre la parábola $v = \frac{x^2 + 3x}{4}$.

Más valores de \mathbf{v} (rectas con puntos críticos y puntos sobre rectas del nodo lineal):

$$\mathbf{v}(-3, v) = v \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-4, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-4, 3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-2, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-2, -3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Sabemos ya como se curvan las rectas del nodo. Evaluando $\mathbf{v}(x, \lambda x)$ se ve, tras unos cálculos, que las separatrices se deforman de la forma indicada y completamos el dibujo.

El sentido de las fuerzas es: $\rightarrow -3 \leftarrow 0 \rightarrow$ (por eso -3 es estable y 0 inestable). Supongamos la partícula inicialmente entre -3 y 0 y discutamos su movimiento según su velocidad v_0 inicial. Si $v_0 < 0$, tiende hacia el equilibrio estable. Si $v_0 > 0$ y pequeño, no puede superar la fuerza que se opone, llega a un x máximo, regresa y tiende hacia -3 . Si $v_0 > 0$ y gordo consigue cruzar $x=0$ y, ayudado por la fuerza, tiende a ∞ (¿en tiempo finito?) mientras aumenta su velocidad. Si $v_0 > 0$ es tal que estamos sobre la separatrix del punto silla tenemos un movimiento imposible en la práctica: acercarse sin cesar al equilibrio inestable. El problema (las órbitas no son calculables) es que es imposible hallar exactamente este último v_0 (y sería importante porque para valores superiores e inferiores de la velocidad los movimientos son radicalmente diferentes).



3.3 Sistemas y ecuaciones exactos

Un sistema del tipo [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ se llama **exacto** si $f_x(x, y) + g_y(x, y) \equiv 0$.

(suponemos que f y g son de clase 1 en todo \mathbf{R}^2 como hicimos en la sección 3.1).

Si [S] es exacto, la ecuación diferencial de sus órbitas es

$$[o] \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \text{ es decir, } -g(x, y) + f(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

es también exacta, y por tanto resoluble:

Existe $H(x, y)$ con $f = H_y$ y $g = -H_x$, y las órbitas de [S] vienen dadas por $H(x, y) = C$.

Además se tiene el siguiente resultado sobre sus puntos críticos:

Teor 1. Los puntos críticos elementales de un sistema exacto sólo pueden ser centros o puntos silla.

Como $f_x + g_y \equiv 0$, los autovalores de la matriz de la aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_0}$

en cualquier punto \mathbf{x}_0 crítico vienen dados por $\lambda^2 + |\mathbf{M}| = 0$, con lo que o bien (si $|\mathbf{M}| < 0$) tiene dos raíces reales de distinto signo y \mathbf{x}_0 es un punto silla (del lineal y del no lineal) o bien (si $|\mathbf{M}| > 0$) las raíces son imaginarias puras y hay un centro en la aproximación lineal. Además es fácil ver, por ser H continua, que $H(x, y) = H(x_0, y_0)$ contiene además del punto \mathbf{x}_0 todas las órbitas que tienden a dicho punto cuando t tiende a $+\infty$ o $-\infty$, con lo que [S] no puede tener focos (sería $H \equiv \text{cte}$ y $\mathbf{M} \equiv \mathbf{0}$ en todo un entorno y \mathbf{x}_0 no sería aislado) y los centros del lineal lo son también en el no lineal.

Ej 1. $\begin{cases} x' = 2x - 2xy \\ y' = 2x - 2y + y^2 \end{cases} = 0 \rightarrow x=0, y=1 \downarrow$
 $y=0, 2, x=\frac{1}{2}$. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ 2 & 2y-2 \end{pmatrix}$ en cada punto:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 2 & \mp 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2$: sillas. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2}i$: centro de la aproximación lineal.

Como sabemos este centro podría conservarse o ser un foco E o I de nuestro sistema.

Pero como es exacto: $f_x + g_y = 2 - 2y - 2 + 2y \equiv 0$, sigue siendo centro del no lineal.

$$H_x = -2x + 2y - y^2 \rightarrow H(x, y) = 2xy - xy^2 - x^2 = C \text{ son las órbitas.}$$

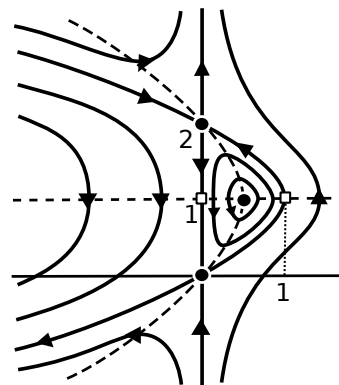
$$H_y = 2x - 2xy$$

Aunque se puede despejar la x o la y de la ecuación de segundo grado, dibujar todas las curvas $H = C$ es complicado. Pero para $C=0$ aparecen dos muy sencillas $x=0$ y $x=2y-y^2$, cada una de ellas formada por 5 órbitas distintas, entre ellas las separatrices.

El campo \mathbf{v} es horizontal sobre la parábola $x = y - \frac{1}{2}y^2$ y vertical en la órbita $x=0$ y en la recta $y=1$.

Podemos dibujar ya las órbitas, si bien aún no están orientadas. Para ello basta dar algún valor a \mathbf{v} o fijarse en algún vector propio de los puntos sillas. Por ejemplo, podemos hallar:

$$\mathbf{v}(x, 0) = 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ó } \mathbf{v}(x, 2) = 2x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Calculemos alguna solución sencilla, aunque para los sistemas exactos el primer paso hacia la solución general (tener las órbitas) siempre se puede dar (salvo primitivas no calculables).

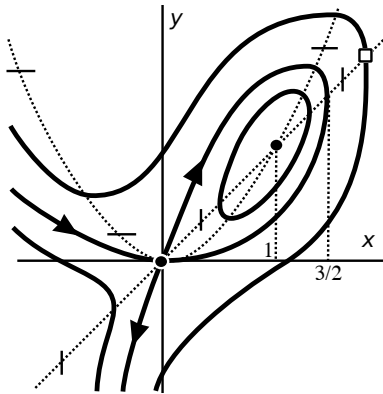
$$x(0)=0, y(0)=1 \rightarrow \text{órbita } x=0 \rightarrow y' = y^2 - 2y, y(0)=1 \rightarrow y = \frac{2}{1+e^{2t}}.$$

$$x(0)=y(0)=1 \rightarrow x = 2y - y^2 \rightarrow y' = 2y - y^2, y(0)=1 \rightarrow y = \frac{2}{1+e^{-2t}} \rightarrow x = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Estas soluciones tienen las propiedades predichas ya por el mapa de fases: están definidas $\forall t$ y tienden cuando $t \rightarrow \pm\infty$ a las soluciones constantes que indican las órbitas correspondientes.

No podemos dar otras fuera de las separatrices por aparecer $x' = \pm 2\sqrt{x^2 - x^3 - Cx}$ no integrable y no podemos calcular el periodo de las órbitas cerradas. Pero el mapa nos dice que ese periodo tiende a ∞ cuando se acercan a las separatrices, pues estas se recorren en un tiempo infinito.

Ej 2. $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = y - x^2 \end{cases}$ Dibujemos sus órbitas y veamos si es periódica la solución con $x(0)=y(0)=2$.



Puntos críticos: $y=x \rightarrow x-x^2=0 \rightarrow x=y=0, 1$. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es silla $[\lambda = \pm 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es centro del lineal.

$f_x + g_y \equiv 0 \Rightarrow$ el sistema es exacto y el centro se conserva.

Las órbitas son: $\begin{matrix} H_x = x^2 - y \\ H_y = y - x \end{matrix} \rightarrow \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2} = C$.

\mathbf{v} es horizontal sobre $y=x^2$ y vertical en $y=x$.

Las separatrices [pasan por $(0,0) \rightarrow C=0$] vienen dadas por:

$$y^2 - 2xy + \frac{2}{3}x^3 = 0 \rightarrow y = x \pm x\sqrt{1 - \frac{2x}{3}}$$

que están definidas si $x \leq \frac{3}{2}$ (cuando $x = \frac{3}{2}$ se juntan en $y=x$).

La órbita que pasa por $(2,2)$ está fuera del lazo que forma la separatriz y la solución correspondiente **no** es periódica.

[Como siempre, la información de la aproximación lineal es sólo local: cerca del centro hay seguro órbitas cerradas, pero lejos dejarán normalmente de serlo, como en este ejemplo (y el anterior)].

Ej 3. $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 1 + 3x^2 - y^2 \end{cases}$ Puntos críticos: $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 6x & -2y \end{pmatrix}$.

\mathbf{M} en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, silla.

\mathbf{M} en $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, silla.

Las órbitas se hallan fácilmente por ser exacto:

$$\begin{matrix} H = xy^2 - x^3 - x + p(y) \\ H = xy^2 + q(x) \end{matrix} \rightarrow xy^2 - x^3 - x = C$$

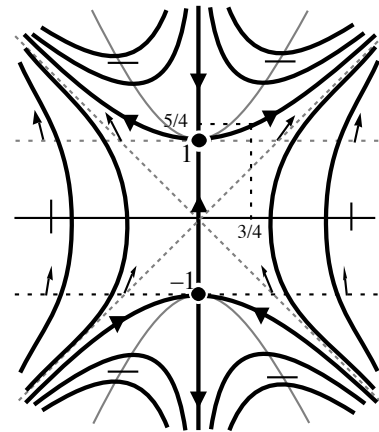
[También es de Bernoulli (más largo):

$$2yy' = -\frac{y^2}{x} + \frac{1+3x^2}{x} \xrightarrow{z=y^2} z' = -\frac{z}{x} + \frac{1+3x^2}{x}, z = \frac{1}{x}C + 1 + x^2]$$

Las separatrices se obtienen para $C=0$ con lo que son

la recta $x=0$ y la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$.

[$\mathbf{v}(x, \pm 1) = \begin{pmatrix} \pm 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$ confirma la deformación de las separatrices].



Pendiente horizontal sobre la hipérbola $y^2 - 3x^2 = 1$. Es vertical en la separatriz $x=0$ y en $y=0$.

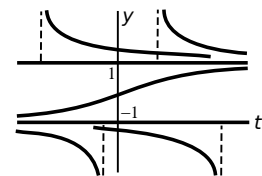
[Simetría respecto a ambos ejes: H depende de y^2 , cambiando x por $-x$ sale la órbita $H=-C$].

Intentemos dar la solución general. Es posible despejar la y de $H=C$, pero de ahí no pasamos:

$$y = \pm \sqrt{\frac{C}{x} + 1 + x^2} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm 2\sqrt{Cx + x^2 + x^4}, \text{ no integrable.}$$

Como en otras muchas ocasiones, se pueden hallar soluciones asociadas a órbitas sencillas. Las más fáciles son aquellas cuya proyección es $x=0$:

$$y' = 1 - y^2 \rightarrow \int \frac{2dy}{1-y^2} = \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = 2t + C, y = \frac{Ce^{2t}-1}{Ce^{2t}+1} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \pm 1 \dots$$



Pero muchas propiedades de una autónoma están en su dibujo (unido al hecho de que todas sus soluciones no acotadas explotan por el y^2).

Busquemos ahora la solución del sistema que cumple $x(0)=3/4, y(0)=5/4$:

$$\text{Por } \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \text{ pasa la órbita de } C = \frac{3}{4} \left(\frac{25}{16} - \frac{9}{16} - 1\right) = 0 \rightarrow y^2 - x^2 = 1 \rightarrow$$

$$x' = 2x\sqrt{1+x^2}, x(0) = \frac{3}{4}, \text{ o mejor } y' = 2y^2 - 2, y(0) = \frac{5}{4} \rightarrow 2t = \int_{5/4}^y \frac{ds}{s^2-1}$$

Hallando la primitiva y despejando obtendríamos la $y(t)$ [y de ella y la órbita, la $x(t)$].

Pero, de nuevo, hay propiedades de las autónomas de primer orden que se ven sin necesidad de integrar: $y(t) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow -\infty, y(t)$ explota para un $t_1 > 0 \dots$

Podemos precisar la estabilidad de las soluciones identificadas que están definidas hasta ∞ :

Los dos puntos críticos son inestables (para decirlo bastaba hallar los λ).

Las soluciones con $x(0)=0, y(0)=b$ son inestables si $-1 < b < 1$ o $b > 1$, porque, aunque su $y(t) \rightarrow 1$ para todas, la $x(t)$ de soluciones cercanas tiende a $\pm\infty$.

Caso particular de los sistemas exactos son las **ecuaciones exactas**:

$$\boxed{x'' = g(x)} \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = g(x) \end{cases} \rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g'(x) & 0 \end{pmatrix}, [0] \quad v \frac{dv}{dx} = g(x).$$

Sus órbitas vienen dadas entonces por:

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} - \int g(x) dx = C, \text{ o sea, } \boxed{\frac{v^2}{2} + V(x) = C, \text{ si } V(x) = -\int g(x) dx}.$$

[Si la ecuación describe el movimiento (sin rozamiento) sobre el eje x de una partícula sometida a una fuerza que sólo depende de su posición, H representa la energía total, $v^2/2$ es la cinética y $V(x)$ es la potencial].

A la vista de la solución está claro que las órbitas son simétricas respecto al eje x y que la órbita u órbitas asociadas a cada valor de C son curvas definidas en los intervalos del eje x para los que $V(x) \leq C$ y que cortan dicho eje en los x tales que $V(x) = C$. Con esto y el teorema siguiente **podremos dibujar el mapa de fases conociendo simplemente la gráfica de la función potencial $V(x)$** .

Teor 2. Si V tiene un mínimo en x_0 entonces $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un centro del mapa de fases. Si V tiene un máximo, \mathbf{x}_0 es un punto silla.

Si V tiene un extremo en x_0 es $V'(x_0) = -g(x_0) = 0$ y \mathbf{x}_0 es punto crítico.

La ecuación de autovalores en \mathbf{x}_0 es $\lambda^2 + V''(x_0) = 0$ y así se trata de un centro si $V''(x_0) > 0$ (mínimo de V) o de un punto silla si $V''(x_0) < 0$ (máximo de V).

[El teorema es válido también aunque \mathbf{x}_0 sea no elemental, es decir, si $V''(x_0) = 0$, aunque en este caso las sillas no son exactamente iguales y puede aparecer otro tipo de puntos asociados a puntos de inflexión (veremos ejemplos de ello en 4.1)].

Ej 4. $\boxed{x'' = 1 - x^2} \rightarrow V(x) = -x + \frac{1}{3}x^3.$

De sólo la gráfica de $V(x)$ del dibujo superior se deduce el mapa de fases del inferior: como V posee un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$ el mapa de fases tiene el punto silla y el centro dibujados abajo.

Trazamos ahora diferentes rectas $V = C$ y las órbitas asociadas a cada una de ellas $v^2/2 = C - V(x)$.

Para $C = 0$, $V(x) \leq 0$ si $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ (y la órbita, curva simétrica definida en ese intervalo y que corta $v = 0$ en sus extremos, será una curva cerrada rodeando al mínimo) o si $x \leq -\sqrt{3}$ (la órbita sólo corta $v = 0$ en $x = -\sqrt{3}$ y, por tanto, es abierta).

Similares son las dos órbitas dibujadas para un $C < 0$.

La $V = C$ que pasa por el máximo de V nos da una órbita que corta $v = 0$ en dos puntos uno de los cuales es el punto silla. Nos proporciona, pues, cuatro órbitas: el punto, la órbita que sale y entra en él (que suele llamarse órbita 'homoclínica') y las separatrices de la izquierda.

Para un C mayor se tiene la última órbita.

Las órbitas se orientan como en toda ecuación (hacia la derecha arriba, hacia la izquierda abajo).

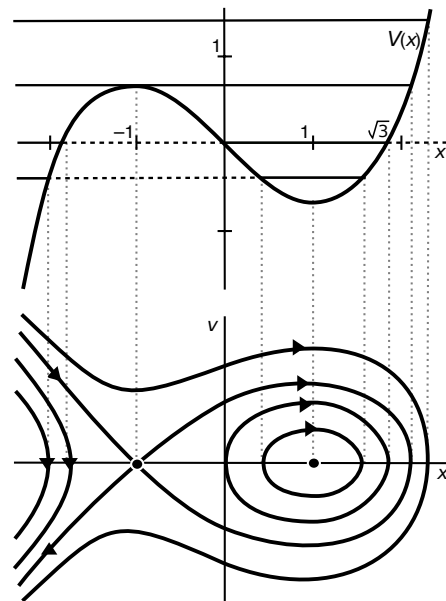
Podríamos precisar el dibujo usando las técnicas generales de las secciones anteriores: vectores propios del punto silla, puntos de pendiente horizontal (que serán siempre las rectas verticales que contienen a los puntos críticos, pues se obtienen haciendo $g(x) = 0$), ... Pero las principales características de las órbitas ya se ven en el dibujo anterior.

Es fácil dar interpretación física a cada una de las órbitas del mapa de fases dibujado.

Como para una ecuación exacta tenemos unas órbitas bastante sencillas, parece que se podría calcular su solución general (pero casi siempre nos encontramos con primitivas no calculables):

$$v = \pm \sqrt{2} \sqrt{C - V(x)} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2} \sqrt{C - V(x)}} = t + K,$$

Por ejemplo, en este caso tenemos la 'integral elíptica' no calculable $\int [x - \frac{1}{3}x^3 + C]^{-1/2} dx$.



Ej 5. $x'' = x^3 - 7x^2 + 10x$ Dibujemos sus órbitas y precisemos sus soluciones periódicas.

El mapa de fases se deduce de la función potencial:

$$g(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2, x = 5.$$

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 5x^2.$$

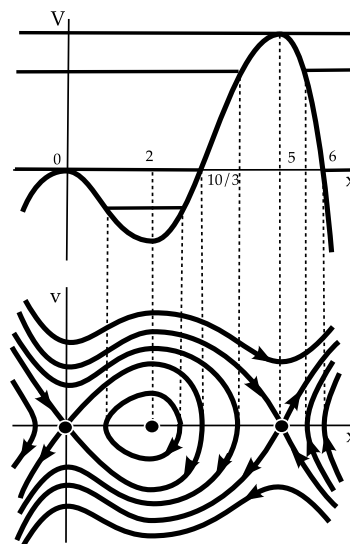
$$V(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{10}{3}, x = 6.$$

$$V(0) = 0, V(2) = -\frac{16}{3}, V(5) = \frac{125}{12}.$$

Las soluciones periódicas no triviales corresponden a órbitas cerradas del mapa de fases (asociadas a segmentos entre las paredes del potencial). En el mapa se ve que lo son todas las órbitas que están dentro de la separatriz que entra y sale del origen.

Preocupémonos en concreto para qué valores a es periódica la solución con $x(0) = a, x'(0) = 0$ (dónde hay que dejar en reposo la partícula para que oscile). Se ve que esto ocurre si $0 < a < \frac{10}{3}$.

[Además, si $a = 0, a = 2, a = 5$, la solución es periódica trivialmente, pues es constante, pero si atinamos a dejar la partícula en los inestables $x = 0$ ó $x = 5$, un pequeño soplo nos va a convertir el movimiento en uno no periódico].



Intentemos calcular el periodo T de una solución, por ejemplo, cuando $a = 3$. Su órbita es:

$$C = -\frac{81}{4} + 63 - 45 = -\frac{9}{4} \rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2 - \frac{9}{4}, v = \pm \frac{\sqrt{3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27}}{\sqrt{6}} = \frac{dx}{dt}$$

Además de en 3 la órbita cerrada corta $v = 0$ en otro punto que exige usar el ordenador:

$$3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27 = (x-3)(3x^3 - 19x^2 + 3x + 9) = 0 \rightarrow x = 3, x_1 \approx 0.835 \text{ (y } x_2 < 0, x_3 > 6).$$

Por simetría, el periodo será el doble de lo que tarda en ir de x_1 a 3:

$$T = 2\sqrt{6} \int_{x_1}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27}} \approx 2.849 \text{ (de nuevo con el ordenador).}$$

[A diferencia de los sistemas lineales, el periodo T de cada solución es distinto. Ya dijimos que $T \rightarrow \infty$ al acercarnos a la separatriz (recorrida en tiempo infinito), o sea, si $a \rightarrow 0$ (ó $a \rightarrow 10/3$). Se puede probar además que el T de las oscilaciones de pequeña amplitud (con $a \sim 2$) tiende al de la aproximación lineal, y en este caso (para el que $\lambda = \pm\sqrt{6}i$), debe $T \rightarrow \pi\sqrt{2/3} \approx 2.565$].

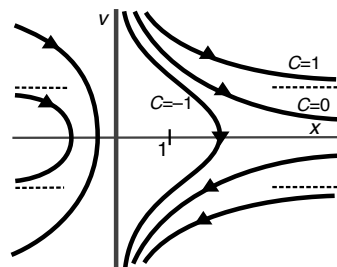
Ej 6. $x'' = -x^{-2}$ Sin puntos críticos. Órbitas $x = \frac{2}{\sqrt{2-C}}, v = \pm\sqrt{C + \frac{2}{x}}$.

Describe, para $x > 0$, el movimiento bajo un campo gravitatorio en unidades adecuadas. La interpretación física del mapa es clara:

Si $x(0) = 2$ (por ejemplo), $x'(0) = v_0$ y es $v_0 < 1$, la partícula cae al origen; $v_0 = 1$ es la llamada velocidad de escape: para velocidades iniciales mayores que ella la partícula se aleja del origen indefinidamente (a una velocidad que tiende a constante).

Calculemos el tiempo T que tardaría una partícula, inicialmente en reposo en $x = 2$, en llegar hasta el origen. Su órbita [$v(x=2) = 0$] es la de $C = -1$. Así pues:

$$T = \int_0^2 dt = -\int_2^0 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2-x}} = \left[\sqrt{x}\sqrt{2-x} + 2 \arctan \sqrt{\frac{2}{x}-1} \right]_2^0 = \pi.$$



Ej 7. $x'' = \sqrt{x}$ La ecuación sólo tiene sentido para $x \geq 0$.

El único punto crítico es el origen y la única solución constante es $x \equiv 0$. En ese punto la aproximación lineal no existe, pues f no es derivable.

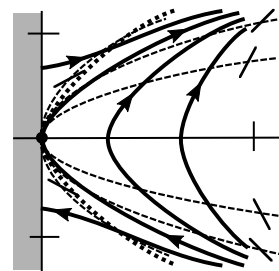
Sus órbitas son $v^2 = \frac{4}{3}x^{3/2} + C$. Dibujamos sus isoclinas $\frac{\sqrt{v}}{x} = K$, para $K = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \infty$ y la curva de inflexión de las órbitas $v^2 = 2x^{3/2}$.

Calculemos la solución con $x(2) = 1/9, x'(2) = 2/9$. Para dar la órbita asociada imponemos que $v(x=1/9) = 2/9 \rightarrow C = 0$. Así pues:

$$v = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/4} = \frac{dx}{dt}, 2\sqrt{3}x^{1/4} = t + k, x = \frac{(t+k)^4}{144} \xrightarrow{x(2)=1/9} x = \frac{t^4}{144}.$$

[En $x = 0$ podía fallar la unicidad y hay dos soluciones cumpliendo $x(0) = x'(0) = 0$: ésta y $x \equiv 0$].

$\left| x^{3/4} - \sqrt{x^{3/2} + C} \right| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ pero ignoramos si nuestra solución es estable [no calculable $x(t), C \neq 0$].



3.4 ¿Centro o foco? Técnicas sencillas

Vimos en la sección 3.2 que el único caso en que no basta el estudio de la aproximación lineal para clasificar un punto crítico elemental \mathbf{x}_0 de un sistema no lineal

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

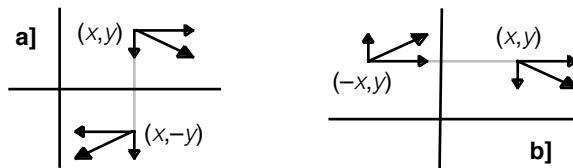
es el caso en que la aproximación lineal posea un centro, ya que entonces el punto de [S] (si es analítico) puede también ser un centro o bien ser un foco estable o inestable. Tratamos en la sección anterior una situación en la que el centro del lineal se conservaba: si [S] era **exacto**. En esta sección veremos otras técnicas sencillas para atacar el problema: el estudio de las posibles simetrías y una primera utilización de las coordenadas polares.

Desde luego se conservará un centro si las órbitas de [S] poseen **simetría** respecto a alguna recta que pase por \mathbf{x}_0 (las órbitas en torno a un centro pueden ser asimétricas y hay puntos críticos con simetría especular (los focos, claramente no la tienen) que no son centros, pero si un punto con esta simetría es o centro o foco, necesariamente será centro).

El análisis de las simetrías se podrá hacer a la vista de las órbitas, en el caso excepcional de que la ecuación diferencial de las órbitas sea resoluble, o a partir del propio campo \mathbf{v} . Un ejemplo de esto último lo da el siguiente teorema:

Teor 1.

Si \mathbf{x}_0 es punto crítico de [S], la aproximación lineal posee un centro y o bien **a]** \mathbf{x}_0 está sobre el eje x , $f(x, -y) = -f(x, y)$, $g(x, -y) = g(x, y)$, o bien **b]** \mathbf{x}_0 está sobre el eje y , $f(-x, y) = f(x, y)$, $g(-x, y) = -g(x, y)$, entonces \mathbf{x}_0 es un centro del sistema no lineal [S].



Las hipótesis sobre f y g aseguran en el caso **a]** que las órbitas son simétricas respecto a $y=0$ y en el **b]** que lo son respecto a $x=0$ (y que se recorren en sentidos opuestos a cada lado del eje, como debe ser en un centro). De ello se sigue el resultado.

En el caso particular de las ecuaciones las condiciones sobre f se satisfacen siempre y basta comprobar las de la g : debe ser par en y o, si \mathbf{x}_0 es el origen, impar en x .

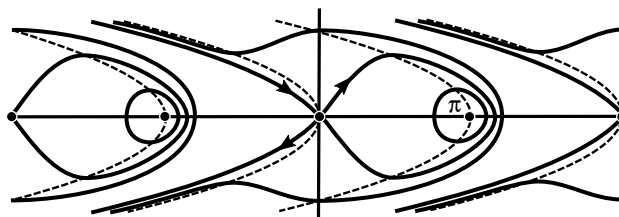
[Conocer las simetrías de un sistema no sólo es útil para distinguir entre centro y foco. Nos da bastante información sobre un mapa de fases, según vimos en algún ejemplo de secciones anteriores (como el 6 de 3.2, el 3 de 3.3 o las ecuaciones exactas)].

Ej 1. $x'' = \text{sen}(x + [x']^2)$, es decir, $\begin{cases} x' = v \\ v' = \text{sen}(x + v^2) \end{cases}$. Clasifiquemos sus puntos críticos.

Estos resultan ser $\begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, con aproximación lineal $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x+v^2) & 2v \cos(x+v^2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, si k es par son puntos silla (del lineal y no lineal como siempre) y si k impar son centros de la aproximación lineal. Como g es par en v , estos centros lo son también del sistema no lineal (y las órbitas son simétricas respecto al eje x).

Para dibujar el mapa de fases vemos además que las órbitas son horizontales sobre las parábolas $x = K\pi - v^2$, los vectores propios de las sillas y el hecho de que el campo \mathbf{v} se repite periódicamente en la variable x . La orientación es la de toda ecuación.



Ej 2. $x'' = x - x^3 - x(x')^2 \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = x - x^3 - xv^2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ silla ($\lambda = \pm 1$), $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ centros del lineal.

Los centros se conservan, pues también se cumple el apartado **a** del teorema 1 (g es par en v). Pero aquí no era necesario, pues podemos hallar sus órbitas explícitamente:

$$\frac{dv}{dx} = -xv + \frac{x-x^3}{v} \text{ (Bernouilli)} \rightarrow v^2 = Ce^{-x^2} + 2-x^2$$

y comprobar su simetría respecto de ambos ejes.

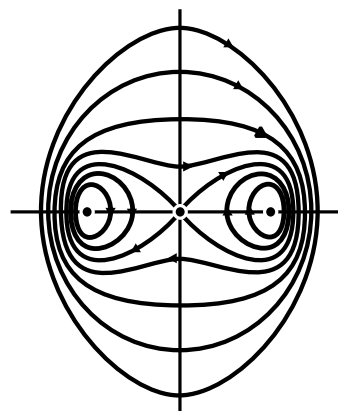
Con las órbitas podemos hacer un preciso mapa de fases.

La separatriz (que aparece para $C = -2$) corta $y=0$, además de en $x=0$, en los x tales que:

$$2e^{-x^2} = 2-x^2 \quad (x \approx \pm 1.26 \text{ con ordenador})$$

y para $C > -2$ todas las órbitas son cerradas (si $C=0$ circular).

El campo es horizontal sobre $x^2 + v^2 = 1$ y sobre $x=0$ (y vertical como en toda ecuación sobre $y=0$).



Ej 3. $x'' = x^3 - x - xx'$ $\begin{cases} x' = v \\ v' = x^3 - x - xv \end{cases}$ $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 1 - v & -x \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \mp 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \mp 2, \pm 1$ (sillas).

En $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\lambda = \pm i$. $g(-x, v) = -g(x, v) \Rightarrow$ centro en el sistema no lineal (y simetría respecto al eje v).

\mathbf{v} es horizontal si $x=0$ y si $v=x^2-1$. $\mathbf{v}(\pm 1, v) = \begin{pmatrix} v \\ \mp v \end{pmatrix}$.
Vertical si $v=0$, como en toda ecuación.

En principio [o] $v \frac{dv}{dx} = x(x^2-1-v)$ no sabemos resolverla.

Las separatrices adoptan un aspecto parabólico $v = A(x^2-1)$

$$\rightarrow 2A^2(x^3-x) = x^3-x-A(x^3-x) \rightarrow y = 1-x^2, y = \frac{x^2-1}{2}$$

que son precisamente las separatrices de las sillas.

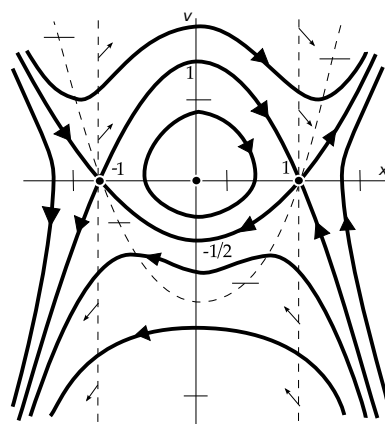
Sugiere esto hacer en [o] el cambio de variable $u = \frac{1}{2}[x^2-1]$

$$\rightarrow \frac{dv}{du} x = \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = \left[\frac{2u}{v} - 1 \right] x \rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{2u-v}{v}$$

que es homogénea (y, por tanto, resoluble): $z = \frac{v}{u} \rightarrow \int \frac{z dz}{(z+2)(z-1)} = C - \int \frac{du}{u} \rightarrow (v+2u)^2(v-u) = C$.

Deshaciendo el cambio obtenmos las órbitas de nuestro sistema: $(v+x^2-1)^2(2v-x^2+1) = C$.

En la expresión se vuelve a ver la simetría (y las separtrices halladas antes tanteando).



Ej 4. $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1) \end{cases}$ [El sistema es, con parámetros muy concretos, el de Lotka-Volterra que rige la evolución de la población de dos especies en relación predador-presa].

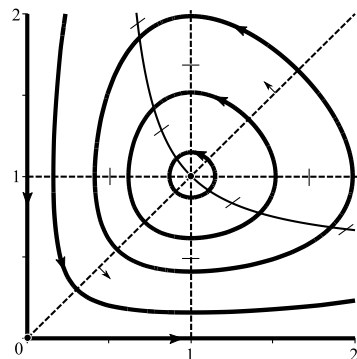
Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ punto silla y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ centro de la aproximación lineal.

¿Seguirá el centro siendo un centro del sistema no lineal? Se podría llevar al origen haciendo $u=x-1, v=y-1$ e intentar aplicar el teorema 1, pero el sistema en uv que resulta no satisface ninguna de las dos parejas de condiciones.

Pero podemos calcular la expresión implícita de las órbitas (es ecuación separable): $y - \ln y + x - \ln x = C$.

Como esta expresión no varía al cambiar los papeles de x e y , las órbitas son simétricas respecto a la recta $y=x$, con lo que el centro se mantiene en el no lineal.

En el dibujo están también las rectas de pendiente horizontal y vertical, los valores de $\mathbf{v}(x,x)$ y la isoclina de pendiente 1.



[En el teorema 1 nos hemos limitado a precisar las posibles simetrías respecto a los ejes, pero se podrían dar condiciones sobre \mathbf{v} que diesen la simetría respecto a $y=x$ u otras rectas].

[Una forma alternativa (y generalizable) de probar que sigue el centro es considerar el sistema

$$[\bullet] \begin{cases} x' = \frac{1}{y} - 1 \\ y' = 1 - \frac{1}{x} \end{cases}, \text{ que tienen las mismas órbitas que el inicial en } x, y > 0, \text{ pues } \mathbf{v}^* = \frac{1}{xy} \mathbf{v}.$$

Como el $[\bullet]$ es exacto ($f_x^* + g_y^* \equiv 0$), no puede tener focos en la región y el centro se conserva].

En ocasiones es fácil precisar que el centro pasa a ser foco estable o inestable escribiendo el sistema en **coordenadas polares** (en general aparece un sistema más complicado que el inicial, pero es el camino hacia los resultados generales de la siguiente sección).

Derivando $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$ se obtiene:
$$\begin{cases} r' \cos \theta - \theta' r \sin \theta = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ r' \sin \theta + \theta' r \cos \theta = g(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

Y multiplicando por $\cos \theta$ o $\sin \theta$ y sumando o restando según convenga deducimos:

$$\begin{cases} r' = \cos \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \theta' = \frac{1}{r} [\cos \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta)] \end{cases}$$

Ej 5. Precisemos la estabilidad de las soluciones constantes de
$$\begin{cases} x' = y + x^3 \\ y' = -x + y^3 \end{cases}$$

$x=y^3 \rightarrow y(1+y^8)=0 \rightarrow y=0 \rightarrow x=0$. El único punto crítico es el origen con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hay, pues, un centro en la aproximación lineal, y todavía no conocemos su estabilidad. Como no es exacto ni presenta simetrías (a pesar de ello, aún podría ser un centro) pasamos a polares:

$$\begin{cases} r' = r^3(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \theta' = -1 + \sin \theta \cos \theta(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{cases}$$

Como $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta > 0 \forall \theta$, r crece con el tiempo \Rightarrow el origen (la solución trivial) es (foco) **inestable**.

Ej 6.
$$\begin{cases} x' = ax - 2y - x^3 \\ y' = 2x + ay - 2x^2y - y^3 \end{cases}$$
 Clasifiquemos el origen para todo valor de a .

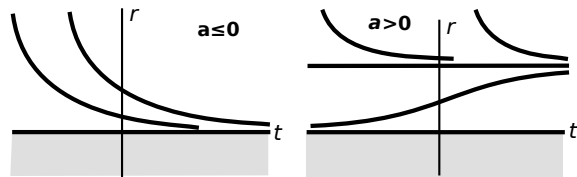
Como la matriz de la aproximación lineal $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ tiene por autovalores $\lambda = a \pm 2i$ deducimos que:

Si $a < 0$ es foco estable, si $a > 0$ es foco inestable y si $a = 0$ es centro del lineal.

Por no ser exacto ni simétrico el sistema hacemos el trabajo de pasar a polares, obteniendo:

$$\begin{cases} r' = ar - r^3 \\ \theta' = 2 - r^2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

Por suerte sale una sencilla ecuación autónoma para r fácil de dibujar. Al decrecer la distancia al origen con t podemos asegurar que para $a = 0$ es un foco estable (no lo sabíamos).



Utilicemos la expresión en polares para dar el mapa de fases para otro valor de a concreto: $a = 1$.

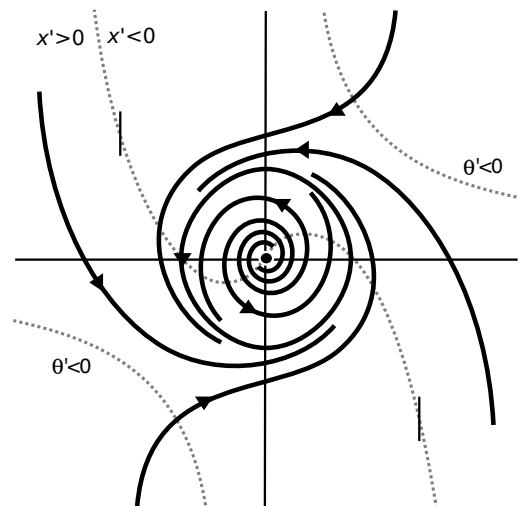
Entonces $r' = r - r^3$ tiene sólo la solución constante $r = 1$ en $r > 0$. Además de $r = 0$ (que da otra vez el punto crítico) y $r = -1$ (sin sentido en polares).

Para $r = 1$ es $\theta' = 2 - \sin 2\theta/2 > 0$. Hay por tanto una órbita (la circunferencia unidad) tal que $r = 1$ para todo t y tal que su θ crece con el tiempo [se llama **ciclo límite a una órbita cerrada aislada** como esta]. Se ve en la autónoma de primer orden que toda el resto de órbitas tienden hacia ella cuando $t \rightarrow \infty$.

Vemos también que no hay más puntos críticos que el $(0,0)$ (es difícil verlo con la expresión cartesiana) pues $r' = \theta' = 0$ no tiene más soluciones (para una solución constante tanto r como θ deben ser constantes).

[Para cualquier otro $a \in (0,4)$ hay también ciclo límite de radio \sqrt{a} . Si $a \geq 4$ aparecen puntos críticos en él].

Dibujando además la curva de puntos con $x' = 0$ y con $\theta' = 0$ [$y = (x - x^3)/2$ y $xy = 2$, respectivamente] se puede ya trazar el mapa de fases.



Es fácil precisar qué soluciones del sistema están definidas para todo t : las periódicas asociadas al ciclo límite y las asociadas a las órbitas contenidas en su interior, por estar acotadas. Llegan, sin embargo, a infinito en tiempo negativo finito aquellas cuya proyección cae fuera del ciclo límite, pues lo hace su distancia al origen, como se deduce de la ecuación para r' .

[Cuando para un valor de un parámetro cambia radicalmente (como en este caso para $a = 0$) la estructura del mapa de fases, se dice que se ha producido una **bifurcación** en el sistema].

Ej 7. $\begin{cases} x' = y + x^2 y \\ y' = -x + x y^2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ único punto crítico. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm i$ centro de la aproximación lineal.

Es resoluble: $\frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2-1)}{y(x^2+1)}$, $\int \frac{2y dy}{y^2-1} = \int \frac{2x dx}{x^2+1} + C$, $\ln(y^2-1) = \ln(x^2+1) + C$, $y^2 = 1 + C(x^2+1)$ (cónicas).

Por ser simétricas respecto a ambos ejes (o por ser cónicas), el centro lo sigue siendo del no lineal.

Podemos dibujar el mapa a partir de las órbitas. Si $C=0$ la cónica degenera en dos rectas, si $C>0$ son hipérbolas, si $C<0$, elipses.

Como $x' = (1+x^2)y$, las órbitas se recorren en el sentido de las ecuaciones: arriba hacia la derecha, abajo hacia la izquierda.

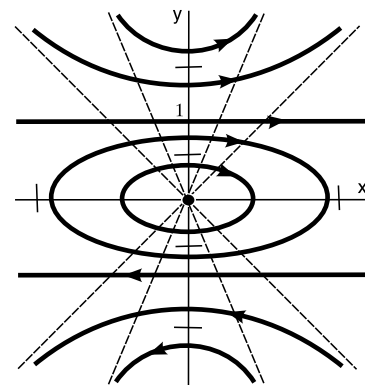
\mathbf{v} es horizontal si $x=0$ ó si $y=\pm 1$ (órbitas). Es vertical si $y=0$.

Calculemos el **periodo** T de las órbitas periódicas. Para hacerlo conviene escribir el sistema en polares:

$$\begin{cases} r' = \cos \theta f + \sin \theta g = r^3 \cos \theta \sin \theta \\ \theta' = \frac{1}{r} [\cos \theta g - \sin \theta f] = -1 \quad (\text{confirma sentido horario}). \end{cases}$$

Como $\theta = K - t$ es claro aquí que para todas las elipses es $T = 2\pi$.

En general, **el periodo del sistema no lineal tiende al de la aproximación lineal cuando la amplitud tiende a cero.**



[En este ejemplo particular coinciden exactamente con el de ella. \mathbf{M} es la matriz de $x'' + x = 0$].

[La afirmación es consecuencia del hecho de que un sistema del tipo $x' = ay + \dots$, $y' = -ax + \dots$ escrito en polares tiene una ecuación para θ del tipo $\theta' = a + rh(r, \theta) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \theta' = a$].

De la sencilla θ calculada deducimos también que las órbitas rectas se recorren en un tiempo finito π . Podemos calcular las soluciones (por ejemplo la de abajo) y comprobarlo:

$$\text{La órbita con } y(x=0) = -1 \text{ es } 1 = 1 + 2C \rightarrow y = -1 \rightarrow x' = -(1+x^2) \rightarrow x = \tan(C-t).$$

Y también nos dice la θ que explotan en tiempo finito las soluciones asociadas a las hipérbolas.

Lo comprobamos utilizando cartesianas: $y = \pm \sqrt{1 + C + Cx^2}$, $C > 0 \rightarrow x' = \pm (x^2 + 1) \sqrt{1 + C + Cx^2}$, cuyas soluciones (todas no acotadas, pues no tiene esta ecuación soluciones constantes) se comportan para x grande como las de $x' = x^3$ según el teorema de las ecuaciones autónomas.

Acabamos la sección con un ejemplo de un tercer tipo de punto en el que puede convertirse un centro lineal cuando el sistema es **no analítico**: el llamado **centro-foco**.

Ej 8. $\begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2)^2 \sin \frac{\pi}{x^2 + y^2} \\ y' = -x + y(x^2 + y^2)^2 \sin \frac{\pi}{x^2 + y^2} \end{cases}$ En polares adopta la forma: $\begin{cases} r' = r^5 \sin \frac{\pi}{r^2} \\ \theta' = -1 \end{cases}$.

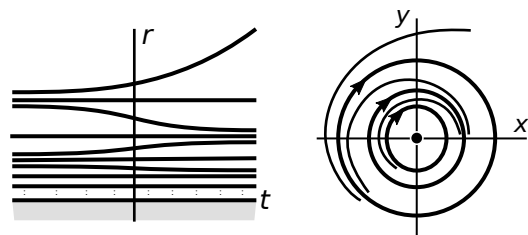
El único punto crítico (en polares es claro) es el origen. Existen las parciales en él y es $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema es claramente no analítico (las derivadas de órdenes mayores dejan de existir).

A este centro de la aproximación lineal corresponde un nuevo tipo de punto del no lineal.

La autónoma tiene infinitas soluciones constantes para r cerca del origen: $r = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

Cada una da lugar a una solución periódica aislada (ciclo límite) y el resto de las órbitas se acercan a ellas o se alejan de ellas cuando $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow -\infty$ dependiendo de la paridad de n .



3.5 Cambio de estabilidad de centros elementales

Consideremos un sistema analítico para el que el origen sea un punto elemental cuya aproximación lineal tenga autovalores imaginarios puros. Este sistema, con cambios lineales y salvo un factor constante de los segundos miembros, y agrupando los términos homogéneos del mismo orden, se podrá escribir en la forma:

$$[S] \begin{cases} x' = y + A^2(x, y) + A^3(x, y) + \dots = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots \\ y' = -x + B^2(x, y) + B^3(x, y) + \dots = -x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + \dots \end{cases}$$

Estudiemos cuándo se convierte en un foco estable o inestable del sistema no lineal [S]. Escribiendo [S] en polares se tiene $[c = \cos \theta, s = \sin \theta]$:

$$\begin{cases} r' = [cA^2(c, s) + sB^2(c, s)]r^2 + [cA^3(c, s) + sB^3(c, s)]r^3 + \dots \equiv M_2r^2 + M_3r^3 + \dots \\ \theta' = -1 + [cB^2(c, s) - sA^2(c, s)]r + [cB^3(c, s) - sA^3(c, s)]r^2 + \dots \equiv -1 + m_2r + m_3r^2 + \dots \end{cases}$$

Desarrollando en serie de potencias de r la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema en polares obtenemos:

$$\begin{aligned} [e] \frac{dr}{d\theta} &\equiv R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + R_4(\theta)r^4 + R_5(\theta)r^5 + \dots \\ &= -\frac{M_2r^2 + M_3r^3 + M_4r^4 + \dots}{1 - [m_2r + m_3r^2 + \dots]} = -(M_2r^2 + M_3r^3 + M_4r^4 + \dots)(1 + m_2r + [m_2^2 + m_3]r^2 + \dots) \\ &= -M_2r^2 - [M_2m_2 + M_3]r^3 - [M_2m_2^2 + M_2m_3 + m_2M_3 + M_4]r^4 \\ &\quad - [M_2m_2^3 + 2M_2m_2m_3 + m_2^2M_3 + M_3m_3 + m_2M_4 + M_2m_4 + M_5]r^5 - \dots \end{aligned}$$

La solución $r(\theta)$ con $r(0) = r_0$ de [e] será una función analítica de r_0 , que se anula si $r_0 = 0$:

$$r(\theta) \equiv u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + u_3(\theta)r_0^3 + \dots$$

Haciendo $\theta = 0$:

$$r_0 \equiv u_1(0)r_0 + u_2(0)r_0^2 + u_3(0)r_0^3 + \dots \Rightarrow u_1(0) = 1, u_k(0) = 0 \text{ si } k > 1.$$

Llevando la expresión de $r(\theta)$ a [e] obtenemos:

$$u_1' r_0 + u_2' r_0^2 + u_3' r_0^3 + \dots = u_1^2 R_2 r_0^2 + [2u_1 u_2 R_2 + u_1^3 R_3] r_0^3 + \dots$$

Igualando potencias: $u_1' = 0$, que junto al dato inicial $u_1(0) = 1$ nos lleva a que $u_1(\theta) = 1$. Además:

$$\begin{aligned} u_2' &= R_2 \\ u_3' &= 2u_2 R_2 + R_3 \\ u_4' &= [2u_3 + u_2^2] R_2 + 3u_2 R_3 + R_4 \\ u_5' &= 2[u_4 + u_3 u_2] R_2 + 3[u_2^2 + u_3] R_3 + 4u_2 R_4 + R_5 \quad \dots \end{aligned}$$

Este sistema, unido al dato $u_k(0) = 0$ nos permitirá ir calculando sucesivamente los $u_k(\theta)$:

$$u_2(\theta) = \int_0^\theta R_2, \quad u_3(\theta) = \int_0^\theta [2u_2 R_2 + R_3], \quad u_4(\theta) = \int_0^\theta [(2u_3 + u_2^2) R_2 + 3u_2 R_3 + R_4], \dots$$

El hecho de que 0 sea centro o foco dependerá de que, cerca de 0, el valor de la $r(\theta)$ en $\theta = 2\pi$ sea igual o distinto que el valor para el inicial $\theta = 0$. En concreto, como θ decrece con t cerca de 0, será foco estable si $r(2\pi) > r(0)$ e inestable si la desigualdad es la opuesta.

Nos interesa, pues, hallar el signo de:

$$r(2\pi) - r(0) = u_2(2\pi)r_0^2 + u_3(2\pi)r_0^3 + u_4(2\pi)r_0^4 + \dots$$

Este signo, para r_0 pequeño, lo dará el **primer término no nulo** de este desarrollo [será **centro si y sólo si todos los** $u_k(2\pi) = 0$]. Calculemos los primeros $u_k(2\pi)$, llamados valores focales o constantes de Lyapunov, con el menor número de cuentas posibles.

Como M_k y m_k son polinomios homogéneos en c y s de grado $k+1$, los R_k serán sumas de polinomios de paridad opuesta a la de k . Está claro entonces que $u_2(2\pi)=0$.

Para el u_3 , tenemos que

$$2 \int_0^\theta u_2 R_2 = u_2^2 \rightarrow u_3 = u_2^2 + S_3, \text{ siendo } S_3 = \int_0^\theta R_3.$$

Los términos de R_3 que contengan potencias impares de s ó c tendrán promedio 0. Así:

$$u_3(2\pi) = S_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} [-a_{30}c^4 - (b_{21} + a_{12})c^2s^2 - b_{03}s^4 - a_{20}b_{20}c^6 + (2a_{20}a_{11} - 2b_{20}b_{11} - a_{11}b_{11} - a_{02}b_{20} - a_{20}b_{02} + a_{20}b_{20})c^4s^2 + (2a_{11}a_{20} - 2b_{11}b_{02} + a_{11}b_{11} + a_{02}b_{20} + a_{20}b_{02} - a_{02}b_{02})c^2s^4 + a_{02}b_{02}s^6] d\theta$$

La integral entre 0 y 2π de c^4 , c^2s^2 , s^4 , c^6 , c^4s^2 , c^2s^4 , s^6 vale, respectivamente, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$

Sustituyendo en la expresión de $S_3(2\pi)$, dividiendo por 1/4 y cambiando el signo del resultado para que el signo menos esté asociado a la estabilidad, concluimos que:

Teor. El origen de [S] es foco estable o inestable si, respectivamente, es menor o mayor que cero la expresión:

$$I_3 \equiv 2a_{20}b_{20} - 2a_{02}b_{02} + b_{11}(b_{20} + b_{02}) - a_{11}(a_{20} + a_{02}) + 3a_{30} + b_{21} + a_{12} + 3b_{03}.$$

El I_3 debe anularse (y así lo hace) si, por ejemplo, las órbitas son simétricas respecto a alguno de los ejes ($\Rightarrow a_{20} = a_{02} = a_{30} = a_{12} = b_{11} = b_{21} = b_{03} = 0$ ó $a_{11} = a_{30} = a_{12} = b_{20} = b_{02} = b_{21} = b_{03} = 0$) o si el sistema es exacto ($\Rightarrow 2a_{20} + b_{11} = 0$, $a_{11} + 2b_{02} = 0$, $3a_{30} + b_{21} = 0$, $a_{12} + 3b_{03} = 0$).

Vamos a comprobar con el teorema la inestabilidad del foco del ejemplo 6 de la sección anterior en el caso dudoso $a=0$. Sus órbitas tienen el sentido apuesto a las de:

$$\begin{cases} x' = y - \frac{1}{2}x^3 \\ y' = -x - x^2y - \frac{1}{2}y^3 \end{cases} \quad a_{30} = b_{03} = -\frac{1}{2}, b_{21} = -1 \Rightarrow I_3 = -4 \Rightarrow \text{foco E de este sistema.}$$

[Y el inicial tiene, pues, el foco I que las (sencillas) polares decían].

En el caso de que el sistema provenga de una **ecuación** (es decir, cuando todos los $a_{kj} = 0$) el coeficiente I_3 adopta esta forma particular: $I_{3e} = b_{11}(b_{20} + b_{02}) + b_{21} + 3b_{03}$.

Ej 1. $x'' = -x + bx^2x' - (x')^3$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + bx^2y - y^3 \end{cases}$ $b_{21} = b, b_{03} = -1, I_{3e} = b - 3 \Rightarrow \begin{matrix} b < 3 \text{ foco E.} \\ b > 3 \text{ foco I.} \end{matrix}$

Y para $b=3$, su estabilidad la daría la siguiente constante de Lyapunov no nula.

Cuando sea $I_3 = 0$ [es decir, si $u_3(2\pi) = 0$] hay que hallar el siguiente $u_k(2\pi)$ no nulo que resulta ser $u_5(2\pi)$. Haciendo integrales como antes se llega a una larga expresión que se puede simplificar sumando múltiplos adecuados de I_3 . Por ejemplo, podemos llegar en el caso de **ecuaciones** a esta expresión de la constante de Lyapunov I_5 :

$$I_{5e} \equiv 3(b_{41} + b_{23} + 5b_{05}) + b_{11}(3b_{40} + b_{22} - 5b_{04}) + (5b_{20} + 7b_{02})b_{31} + (3b_{20} + 9b_{02})b_{13} - 3(b_{21}b_{30} + b_{21}b_{12} + 6b_{03}b_{30} + 4b_{03}b_{12}) - 2b_{11}^2b_{03} + b_{11}(2b_{20} + b_{02})(b_{30} - b_{12}) + (5b_{20} + 3b_{02})(b_{20}b_{21} - 3b_{20}b_{03}).$$

O despejando b_{21} de $I_{3e} = 0$ y sustituyendo se tiene esta alternativa:

$$I_{5e}^* \equiv 3(b_{41} + b_{23} + 5b_{05}) + b_{11}(3b_{40} + b_{22} - 5b_{04}) + (5b_{20} + 7b_{02})b_{31} + (3b_{20} + 9b_{02})b_{13} - 3(b_{12} + 3b_{30})(b_{03} - b_{11}b_{02}) + b_{11}(b_{20} - b_{02})(5b_{30} + b_{12}) - 2b_{11}^2b_{03} - (3b_{03} + b_{11}b_{02})(5b_{20} + 3b_{02})(b_{20} + b_{02}).$$

Como I_3 , debe anularse también I_{5e} si la ecuación es exacta, o si g es par en y o impar en x . (Es decir, cuando $b_{kj} = 0$, si $k \neq 0$, o cuando $b_{11} = b_{21} = b_{03} = b_{31} = b_{13} = b_{41} = b_{23} = b_{05} = 0$ o cuando $b_{20} = b_{02} = b_{21} = b_{03} = b_{40} = b_{22} = b_{04} = b_{41} = b_{23} = b_{05} = 0$).

Para el ejemplo 1 de arriba, es $I_5 = 0$ con lo que seguimos sin precisar la estabilidad para $b=3$. Hay que llegar al I_7 para ver que es foco I cuyas órbitas se alejan muy lentamente del origen.

Ej 2. Estudiemos la ecuación: $x'' = -x + bx^2 + cx x' + d(x')^2$. Para ella es $I_3 = c(b+d)$.

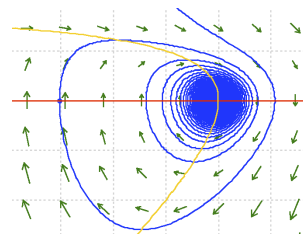
Si $I_3 < 0$ en el origen hay un foco estable y habrá uno inestable si el producto es mayor que cero.

Por ejemplo, $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + xy - y^2 \end{cases}$, con $I_3 = -1$, tiene un foco E.

Lo comprobamos integrando gráficamente con el pplane.jar.

Se ve que, a diferencia de los focos lineales, que se van al origen exponencialmente, aquí se aproximan lentamente.

En la gráfica se muestra también (en amarillo) la curva de pendiente horizontal $x = y^2/(y-1)$.



Pero ¿qué ocurre cuando $c(b+d) = 0$? Se ve que se anula el I_5 (y, si se calculase, también $I_7 = 0$). Esto no prueba, desde luego, que haya un centro en el origen. Deberían ser los infinitos $I_k = 0$. Pero vamos a comprobar que de hecho lo hay en todos los casos en que $I_3 = 0$:

Si $c = 0$, las órbitas son simétricas respecto al eje $y = 0$. [Y si además $d = 0$, es ecuación exacta].

Si $b = d = 0$, lo son respecto a $x = 0$. Más difícil es probar la conservación del centro si $b = -d \neq 0$:

[bc] $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + bx^2 + cxy - by^2 \end{cases}$. Entonces hay también un punto silla en $(\frac{1}{b}, 0)$ de autovalores:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2b} [c \pm \sqrt{c^2 + 4b^2}] \quad (\text{raíces de } b\lambda^2 - c\lambda - b = 0).$$

La integración numérica para $b = 1, c = 3/2$ ($\lambda_{\pm} = 2, -1/2$) sugiere que además de conservarse el centro parecen no deformarse las separatrices del punto silla.

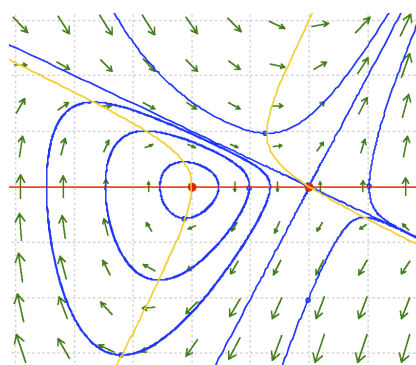
Esto es fácil de comprobar en general: el campo sobre las rectas $y = \lambda_{\pm}(x - 1/b)$ está contenido en ellas.

Tal vez un cambio lineal de variables que lleve estas rectas a los ejes convierta [bc] en un sistema más sencillo.

En efecto, haciendo $\begin{cases} p = x + \lambda_+ y - \frac{1}{b} \\ n = x + \lambda_- y - \frac{1}{b} \end{cases}$

(y usando que $\lambda_+ \lambda_- = -1, \lambda_+ + \lambda_- = \frac{c}{b}$) el sistema pasa a ser el integrable $\begin{cases} p' = \lambda_+ p(1 + bn) \\ n' = \lambda_- n(1 + bp) \end{cases}$.

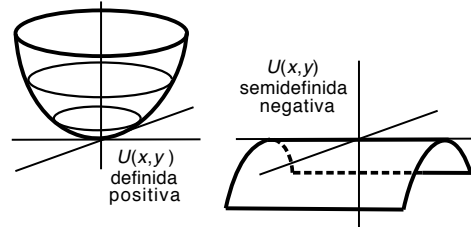
Así, una integral primera del sistema [bc] es: $\left| x - \lambda_+ y - \frac{1}{b} \right|^{\lambda_+} \left| x + \lambda_+ y - \frac{1}{b} \right|^{-\lambda_-} e^{b(\lambda_+ - \lambda_-)x} = K$.



3.6 Funciones de Lyapunov

El método directo de Lyapunov tiene como objetivo determinar la estabilidad de un punto crítico. Esto, en la mayoría de los casos, es más fácil hacerlo analizando la aproximación lineal, pero cuando ésta no decida (centros o puntos no elementales) puede ser útil acudir a dicho método. Antes de dar los resultados necesitamos unas definiciones previas:

Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ y $(0,0) \in D$. Una función $U(x,y)$ se dice **definida positiva** en D si $U(0,0) = 0$ y $U(x,y) > 0$ para cualquier otro $(x,y) \in D$. Si sustituimos $>$ por $<$ ó \leq , la U se dice, respectivamente, **definida negativa** o **semidefinida negativa**.



Por ejemplo $U(x,y) = x^2 + 2y^2$ es definida positiva y $U(x,y) = -x^2$ es semidefinida negativa en todo \mathbf{R}^2 .

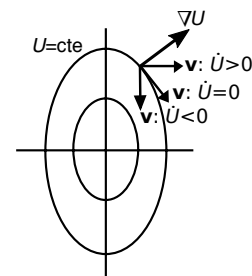
[Más en general, $U(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ es definida positiva si $A, B > 0$ y $B^2 < 4AC$, como es fácil comprobar directamente o escribiendo el Hessiano de U . Y, por ejemplo, claramente no tienen signo definido $x^2 - y^2$, x^2y o cualquier polinomio homogéneo con términos cúbicos].

Dados [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ y $U(x,y)$ será $\dot{U}(x,y) = U_x(x,y)f(x,y) + U_y(x,y)g(x,y)$ ($f, g, U \in C^1$).

Teor 1.

Supongamos que el origen es punto crítico de [S]. Si existen un conjunto D y una función U de clase 1 definida positiva en D tal que \dot{U} es definida negativa, semidefinida negativa o definida positiva en D , entonces el origen es, respectivamente, asintóticamente estable, estable o inestable. A una U con cualquiera de esas propiedades se le llama **función de Lyapunov**.

La idea de la prueba es sencilla: como $\dot{U} = \nabla U \cdot \mathbf{v}$, el ∇U es perpendicular a las curvas cerradas $U = cte$ que rodean el origen y \mathbf{v} es tangente a las órbitas, el hecho de que el producto escalar sea < 0 , ≤ 0 o > 0 en D implica que las órbitas cruzan todas las curvas de nivel de U contenidas en D hacia dentro, que no las cruzan hacia fuera o que sí lo hacen.



La dificultad del método es hallar una U adecuada. En un problema físico se puede intentar probar como U la energía total del sistema, pero en otras ocasiones deberemos tantear con funciones U que sepamos que son definidas positivas (y en muchas ocasiones no sabremos encontrar la U).

[Observemos que la inestabilidad de un punto silla no la veremos con funciones de Lyapunov].

[A veces una U aporta información que no da la aproximación lineal (resultados sólo locales).

Si, por ejemplo, es $\dot{U} < 0$ en D se deduce que todas las órbitas que parten de un punto de D acaban yendo al origen. Y si D fuese todo el plano, cualquier órbita acaba en él].

Ej 1. $\begin{cases} x' = y + x^3 - xy^2 \\ y' = -x + y^3 \end{cases}$ El origen es centro de la aproximación lineal. Buscamos una U tanteando con las funciones definidas positivas más sencillas: $U = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$.

Para ellas se tiene que: $\dot{U} = 2ax(y + x^3 - xy^2) + 2by(-x + y^3) = 2(a-b)xy + 2ax^4 - 2ax^2y^2 + 2by^4$.

Para que tenga signo definido debe ser $a=b$ [$=1/2$, por ejemplo] $\rightarrow \dot{U} = x^4 - x^2y^2 + y^4$ que es definida positiva en todo \mathbf{R}^2 [$\dot{U} = (x^2 - y^2)^2 + x^2y^2$]. El origen es inestable (foco).

Podíamos afirmar esto con las técnicas de las secciones anteriores.

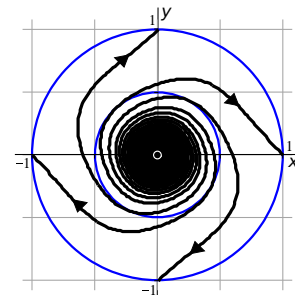
Por ejemplo, pasando a polares obtenemos:

$$\begin{cases} r' = r^3 [\cos^4\theta - \sin^2\theta \cos^2\theta + \sin^4\theta] > 0 \text{ si } r > 0 \\ \theta' = -1 + r^2 \sin\theta \cos\theta [2\sin^2\theta - \cos^2\theta] \end{cases}$$

O, directamente, hallando el I_3 de la última sección:

$$a_{30} = b_{03} = 1, \quad a_{12} = -1 \text{ y el resto cero} \Rightarrow I_3 = 3 - 1 + 3 = 5.$$

A la derecha, algunas órbitas y (en azul) dos curvas de nivel de U .



Ej 2. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + xy - y^2 \end{cases}$ Vimos al final de 3.5 que era un foco estable, puesto que era $I_3 = -1$. Los términos cuadráticos dan más problemas que los cúbicos (también si la escribimos en polares) y hay que tantear más para dar una U .

Empezamos con $U = x^2 + y^2 + Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3$ (los cuadráticos son esos salvo constante) $\Rightarrow \dot{U} = -Dx^3 + (3C - 2E)x^2y + (2D - 3F + 2)xy^2 + (E - 2)y^3 + \dots \Rightarrow D = 0, E = 2, F = \frac{2}{3}, C = \frac{4}{3}$, para que no haya términos cúbicos. Pero esta U no nos vale, pues $\dot{U} = 2y^2(2x^2 - xy - y^2)$ sin signo definido. Pasamos ahora a probar: $U = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + \frac{2}{3}x^3 + Gx^4 + Hx^3y + Jx^2y^2 + Kxy^3 + Ly^4 \Rightarrow \dot{U} = -Hx^4 + 2(2G - J)x^3y + (3H - 3K + 4)x^2y^2 + 2(J - 2L - 1)xy^3 + (K - 2)y^4 + \dots$.

Buscando que estos términos adopten la forma $-H(x^2 + y^2)^2 + \dots$ llegamos a esta U :

$$U = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + \frac{2}{3}x^3 + Gx^4 + \frac{1}{4}x^3y + 2Gx^2y^2 + \frac{7}{4}xy^3 + (G - \frac{1}{2})y^4.$$

Con $G = \frac{1}{2}$, por ejemplo, concluimos que: $U = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3y + x^2y^2 + \frac{7}{4}xy^3$, definida positiva en un entorno del origen, ya que los términos con r^3, r^4 no pueden con el r^2 .

Para esta U es: $\dot{U} = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{4}xy(x - y)(x^2 + 8xy + 21y^2)$, definida negativa cerca del origen.

Ej 3. $x'' + x' + 2x^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ y' = -v - 2x^3 \end{cases}$. El origen no es elemental: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Podemos interpretar la ecuación como describiendo el movimiento con rozamiento de un punto sobre el eje x sometido a una fuerza $-2x^3$. Esto nos hace suponer que el origen debe ser asintóticamente estable y nos sugiere probar como U la energía total:

$$U(x, y) = \frac{v^2}{2} + \frac{x^4}{2} \rightarrow \dot{U} = 2x^3v + 2v(-v - 2x^3) = -2v^2 \text{ semidefinida negativa.}$$

El teorema nos dice que el origen es al menos estable, pero esperábamos estabilidad asintótica. De hecho, dicho teorema es la versión menos fina de todos los que existen: debería suceder que si, como en el ejemplo, las órbitas cruzan hacia dentro cada curva de nivel excepto en un par de puntos de cada una (los de $v = 0$ en este caso) deberíamos tener no sólo estabilidad, sino estabilidad asintótica. Pronto enunciaremos un teorema que precisa esta idea.

Por ahora, podemos probar la estabilidad asintótica con el teorema 1, aunque para ello hay que tantear con más términos. Haciéndolo se encuentra, por ejemplo, esta otra V :

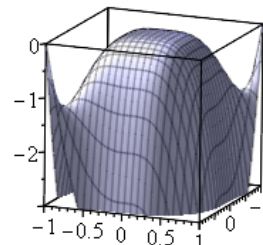
$$V(x, y) = (x + v)^2 + x^4 + v^4 \rightarrow \dot{V} = -4x^4 - 4v^4 - 8x^3v^3,$$

que es definida negativa en un entorno del origen, pues los términos de orden 6, aunque no tienen signo definido, son despreciables respecto a los de orden 4 en las proximidades del origen.

[Que no era definida negativa en todo el plano lo dice por ejemplo:

$$V(x, -x) = 8x^4(x^2 - 1) \geq 0 \text{ cuando } |x| \geq 1].$$

A la derecha se ha incluido un dibujo (hecho con Maple) de la \dot{V} .



El segundo teorema (en versiones más generales) se suele llamar teorema de LaSalle:

Teor 2. Sea el origen punto crítico de $[S]$ y sea U de C^1 definida positiva en D y tal que $\dot{U}(\mathbf{x}) \leq 0$ en D . Supongamos que el conjunto $\{\mathbf{x} \in D : \dot{U}(\mathbf{x}) = 0\}$ no contiene más órbitas que el propio origen. Entonces el origen es asintóticamente estable.

Con este teorema, bastaba la U del ejemplo 3 para deducir la estabilidad asintótica del origen.

Que la hipótesis de que el conjunto sólo contenga el origen es necesaria lo prueba este otro ejemplo:

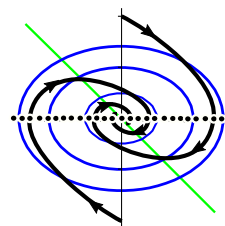
Ej 4. $\begin{cases} x' = 2y^3 \\ y' = -xy^2 - y^3 \end{cases} U = ax^2 + by^2 \rightarrow \dot{U} = 2(2a - b)xy^3 - 2by^4$. $U = x^2 + 2y^2 \rightarrow \dot{U} = -4y^4 \leq 0$ estable.

Pero no puede haber estabilidad asintótica pues $y = 0$ es una recta de puntos críticos. De hecho, sus órbitas son casi las mismas que las del foco estable

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -x - y \end{cases} \text{ (el campo } \mathbf{v} \text{ tiene la misma dirección y sentido salvo en el eje } x \text{).}$$

El mapa de fases (global) es el de la derecha (con algunas curvas de nivel de U en azul y la recta de pendiente horizontal en verde).

[Todos los puntos son no elementales, como debía ser si no son aislados].



4. Puntos no elementales

Empezaremos tratando en 4.1 unos ejemplos en que aparecen puntos no elementales (con al menos un autovalor 0) para ilustrar la teoría de las siguientes secciones. Veremos que para un punto no elemental de un sistema analítico, si es aislado y si no es un centro o un foco, sólo puede haber en torno a él sectores formados por órbitas **parabólicas** (como las de un nodo), **hiperbólicas** (como las de un punto silla) o por órbitas **elípticas** que salen y regresan al punto crítico (y que no existían en los puntos elementales).

En la sección 4.2 veremos la forma, fácil de precisar, de puntos con **sólo un autovalor 0**. Para ellos habrá, asociada al $\lambda=0$, al menos una curva que llega al punto con la pendiente dada por el vector propio asociado (**variedad centro**). Veremos que el punto (si es aislado) sólo puede ser **silla**, **nodo** o un tipo que no había en los elementales: **silla-nodo**. El sentido en que se recorre la variedad centro se precisará calculando algún término de su desarrollo en serie a partir de la ecuación de las órbitas y llevándola al sistema. La variedad tangente al vector propio del autovalor no nulo tendrá, desde luego, el sentido dado por ese λ .

En 4.3 trataremos los puntos '**poco degenerados**' (con $\lambda=0$ doble) de sistemas del tipo:

$$[S] \begin{cases} x' = A^n(x, y) + A^p(x, y) + \dots \\ y' = B^n(x, y) + B^p(x, y) + \dots \end{cases}, \quad p > n > 1, \quad A^k, B^k \text{ homogéneos de grado } k$$

que serán aquellos para los que basta un único cambio de variable a polares o hacer un único 'blow-up' $x = x, y = xv$ (y quizás otro $x = yu, y = y$) para que el origen 'explote' en varios puntos elementales o de un único autovalor cero. Entonces será inmediato precisar los sectores parabólicos, hiperbólicos o elípticos que rodean al punto y dar su estructura. Para ellos ni siquiera hay que hacer cambios y su análisis se hará con un algoritmo muy similar y, en teoría, casi tan sencillo como el de los elementales: en vez de resolver una ecuación de segundo grado para dar sus autovalores y autovectores, basta hallar unos 'vectores propios' (raíces de un polinomio P_{n+1} dado por la 'aproximación homogénea' $x' = A^n, y' = B^n$) que dan las direcciones de aproximación al origen, deducir unos 'autovalores' (valores de A^n o B^n en esas raíces), dibujar el signo de P_{n+1} sobre una circunferencia y, tal vez, calcular algún término del desarrollo de una 'variedad centro' a partir de la ecuación de las órbitas. Si para el caso lineal era fácil el análisis excepto si ambos autovalores eran cero (o si eran imaginarios) aquí nos ocurrirá algo similar: no queda analizado el punto si $P_{n+1} \equiv 0$, si hay 'vectores propios múltiples' asociados a un 'autovalor cero' o si todos son complejos.

Cuando P_{n+1} no tenga raíces reales (n debe ser impar), [S] tendrá un **centro** o un **foco**. En 4.4 veremos que la estabilidad vendrá dada por el signo de una integral (no calculable en general) de un cociente de polinomios dados por la 'aproximación homogénea':

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}}{P_{n+1}} dz, \quad E_{n-1} \equiv A_x^n + B_y^n|_{(1,z)}, \quad P_{n+1} \equiv B^n - zA^n|_{(1,z)}.$$

Los focos de esa aproximación se conservarán al incluir los términos de mayor orden, pero, como sucedía con los lineales, los centros se pueden convertir en focos.

En 4.5 se aborda el cálculo general los discriminantes y raíces de los polinomios de tercer y cuarto grado y de sus integrales con el fin de poder abordar problemas más generales y complicados que los de las dos secciones anteriores.

En 4.6 veremos ejemplos con puntos elementales y no elementales, en los que aparecerán **ciclos límites** y daremos algún resultado sobre ellos.

En 4.7 volveremos a mirar la **estabilidad** usando lo anterior. En particular se verá un atractor inestable: al origen tienden todas las soluciones cuando $t \rightarrow \infty$, pero no es estable.

En 4.8 estudiaremos la utilidad de la **poligonal de Newton** para el análisis de puntos que no sean 'poco degenerados'. Con ella podremos precisar la estructura de la gran mayoría de ellos sin necesidad de realizar explícitamente ningún cambio de variable.

Y en 4.9 nos dedicaremos al **estudio del infinto** con métodos muy parecidos a los del origen y veremos ejemplos que resuman todo lo obtenido en el capítulo.

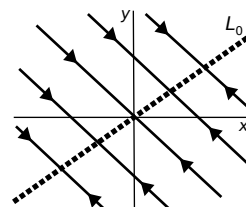
4.1 Ejemplos con puntos no elementales

Dibujemos mapas de fases para los que no sabemos clasificar sus puntos críticos (no elementales) y por ahora nos basaremos casi siempre en la expresión de sus órbitas y el campo \mathbf{v} .

Para empezar, estudiemos los mapas de fases de los **sistemas lineales** $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con algún $\lambda = 0$. El determinante de la matriz \mathbf{A} será nulo y el origen no será aislado.

Hay inicialmente dos posibilidades, dependiendo de los autovalores de \mathbf{A} :

- i) que haya un $\lambda_0 = 0$ y el otro $\lambda_1 \neq 0$, ii) que sea $\lambda = 0$ doble.
- i) La solución general es $\mathbf{x} = c_0 \mathbf{v}_0 + c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$. La recta L_0 que contiene a \mathbf{v}_0 está formada por puntos críticos [si $c_1 = 0$ hay solución constante $\forall c_0$]. Las otras órbitas, paralelas a \mathbf{v}_1 , apuntan hacia los puntos críticos si $\lambda_1 < 0$ (estabilidad no asintótica) o en sentido contrario (inestabilidad) si $\lambda_1 > 0$.



ii_a) Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, todos los puntos del plano son críticos (y toda solución es constante).



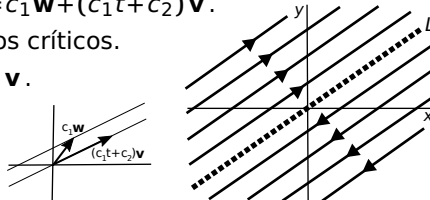
ii_b) Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ sólo hay un \mathbf{v} asociado a $\lambda = 0$. La solución es $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{w} + (c_1 t + c_2) \mathbf{v}$.

$c_1 = 0$ nos da la recta L que contiene \mathbf{v} , formada por puntos críticos.

Para $c_1 \neq 0$ y c_2 dados aparece una órbita recta paralela a \mathbf{v} .

Se recorren en distinto sentido (según el signo de c_1) a cada lado de la recta de puntos críticos.

[Las formas de Jordan respectivas son $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$].



Los dos siguientes ejemplos son de sistemas **exactos**.

Ej 1. $\begin{cases} x' = x^2 - 2xy \\ y' = y^2 - 2xy \end{cases} = 0 \rightarrow x=0, x=2y \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ no elemental. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

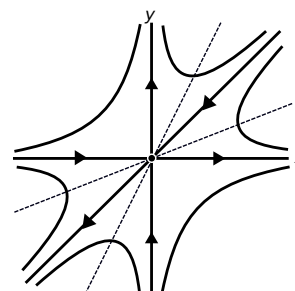
Es exacto y sus órbitas se hallan fácilmente: $x^2 y - x y^2 = C$.

En particular, para $C=0$ aparecen las rectas $y=0$, $y=x$ y $x=0$.

Para orientarlas podemos llevarlas al sistema obteniendo en cada caso, respectivamente: $x' = x^2$, $x' = -x^2$ e $y' = y^2$.

También son fáciles de dibujar sus isoclinas $\frac{dy}{dx} \Big|_{y=mx} = \frac{m^2 - 2m}{1 - 2m}$.

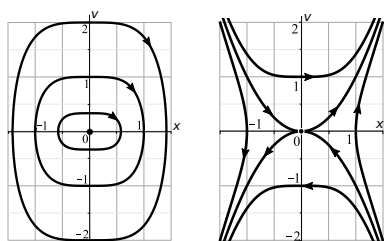
Además tenemos desde el principio que \mathbf{v} es horizontal si $y=2x$ y vertical cuando $x=2y$.



En la demostración del carácter de los puntos críticos de sistemas exactos lo que en esencia se deducía era la imposibilidad de que hubiera atractores o repulsores (como nodos o focos). Pero no impedía que hubiera puntos como el anterior. Aquel argumento sí asegura que **nunca puede haber ciclos límite**.

En el caso de **ecuaciones exactas** hay un tipo de punto no elemental que no existía en 3.3.

Ej 2. a) $x'' = -2x^3$, b) $x'' = 2x^3$, c) $x'' = \frac{3}{2}x^2$. Para los tres $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es no elemental: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Los potenciales son $V(x) = \frac{1}{2}x^4$, $V(x) = -\frac{1}{2}x^4$, $V(x) = -\frac{1}{2}x^3$.

El mínimo del primero y el máximo del segundo nos aseguran el centro y punto silla respectivos, aunque ésta no es como las lineales pues las separatrices $y = \pm x^2$ entran con la misma pendiente horizontal en el origen. [Observemos de paso que todas las soluciones (periódicas) de a) están definidas $\forall t$ y que todas las no triviales de b) explotan por ser no acotadas y comportarse como $x' = x^2$].

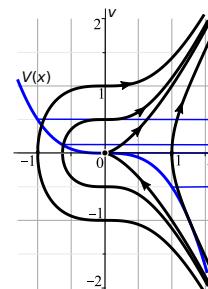
¿Cómo son las órbitas asociadas al punto de inflexión del potencial en c)?

La expresión de las órbitas $v = \pm \sqrt{x^3 + C}$, para $C=0$, nos da $v = \pm x^{3/2}$, que incluye el origen y también las dos órbitas que llegan y salen de él.

El dibujo del potencial (en azul) da el dominio de definición de las demás.

Este tipo (inestable) de puntos aparece asociado a los puntos de inflexión de V (aunque la cúspide puede perfectamente apuntar hacia la derecha).

[También aquí explotan todas las soluciones, por parecerse a $x' = x^{3/2}$].



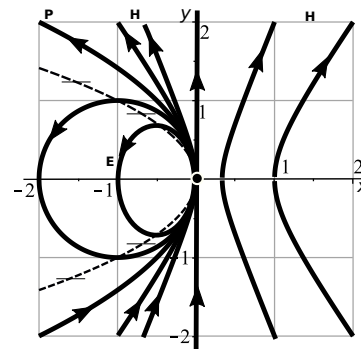
Ej 3. $\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y^2 \end{cases}$ Único punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ no elemental con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Órbitas calculables (Bernouilli): $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{y} \rightarrow y^2 = Cx^2 - 2x$.

Son cónicas (que cortan $y=0$ en $x=0$ y $x=\frac{2}{C}$). Si $C < 0$ son elipses, si $C > 0$ la parábola $x = -\frac{1}{2}y^2$ y si $C < 0$ hipérbolas.

$\mathbf{v}(0,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$. \mathbf{v} horizontal si $x = -y^2$.

Hay un nuevo tipo de órbitas (llamadas **elípticas**) que **salen y llegan al punto crítico**, que no se dan en los elementales.



Se demuestra que para un sistema analítico **un punto no elemental aislado es o un centro o un foco o bien hay en torno a él un número finito de sectores formados por órbitas parabólicas, hiperbólicas o elípticas**.

En puntos elementales (además de centros o focos), sólo puede haber sectores parabólicos (uno que rodea todos los nodos, estables o inestables) o los 4 hiperbólicos de un punto silla.

El ejemplo 3 muestra los tres tipos de sectores (uno elíptico a la izquierda, dos parabólicos comprendidos entre la parábola y el eje $x=0$ y el hiperbólico de la derecha). En la página anterior hay ejemplos con 6 (el 1) o sólo 2 (el 2c) sectores hiperbólicos.

Un centro no elemental lo vimos en el ejemplo 2a ($x'' = -2x^3$) y un foco no elemental es el ejemplo 3 de 3.6 ($x'' + x' + 2x^3 = 0$, el anterior con rozamiento, comprobado con funciones de Lyapunov).

Hagamos otro ejemplo (con sectores parabólicos y elípticos) que es homogéneo (los homogéneos serán importantes en análisis posteriores). Serán fáciles sus isoclinas y pueden tener órbitas rectas.

Ej 4. $\begin{cases} x' = 3xy \\ y' = 4y^2 - 4x^2 \end{cases}$ Único punto (no elemental): $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[o] es resoluble: $\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - 4x^2}{3xy}$ (homogénea o Bernouilli)

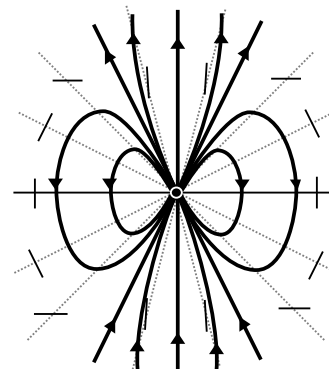
$\rightarrow y^2 = 4x^2 + Cx^{8/3}$ (si $C=0$ se tienen las rectas $y = \pm 2x$).

Mejor que dibujar estas curvas, usamos las isoclinas, rectas $y = mx$. La pendiente de las órbitas sobre ellas es:

$K = \frac{4m^2 - 4}{3m} \rightarrow$ para $m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ es $K = \infty, \pm 2, 0, \pm 2, \pm 5$.

Buscando directamente las órbitas rectas: $\frac{4m^2 - 4}{3m} = m \rightarrow m = \pm 2$.

Podemos orientarlas viendo que $\mathbf{v}(0,y)$ apunta hacia arriba (nos da además las órbitas verticales no recogidas en la solución general).



Otra posibilidad de orientar las órbitas rectas (que será como procederemos en otras situaciones más generales) es llevarlas al sistema (como hicimos en el ejemplo 1):

$y = 2x \rightarrow x' = 6x^2$ (hacia la derecha), $y = -2x \rightarrow x' = -6x^2$ (izquierda), $x = 0 \rightarrow y' = 4y^2$ (arriba).

Alguna conclusión sobre las soluciones: $\mathbf{0}$ es inestable (viendo el dibujo). La solución con $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ (de órbita $y = 2x$) no está definida $\forall t > 0$, pues para ella se obtienen $x' = 6x^2$, $y' = 3y^2$. La que cumple $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ (no calculable) sí lo está por ser acotada, pero ¿será estable? (su diferencia con las soluciones cercanas tiende a $\mathbf{0}$ si $t \rightarrow \infty$, pero esto no basta en sistemas).

Acabamos la sección con una ecuación no lineal con infinitos puntos críticos no aislados.

Ej 5. $x'' = 2xx'$ $\begin{cases} x' = v \\ y' = 2xv \end{cases} \cdot \frac{dv}{dx} = 2x \rightarrow v = x^2 + C = \frac{dx}{dt}$.

El eje x está lleno de puntos críticos no aislados (y no elementales):

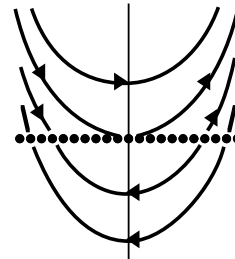
$\mathbf{M}(a,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$.

Parte de las parábolas están formadas por varias órbitas, recorridas como todas las ecuaciones. Los puntos críticos con $a \geq 0$ son inestables. Los de $a < 0$ son estables (no asintóticamente). Coherente con los λ hallados.

Las soluciones de $v < 0$ (acotadas) están seguro definidas para todo t .

No lo están las de $v > 0$. Podemos comparar $x' = x^2 + C$ o incluso resolverla. Además de las $x = K$:

$t + K = \int \frac{dx}{x^2 + C} \rightarrow x = \tan(\sqrt{C}t + K)$, si $C > 0$; $x = \frac{1}{K+t}$, si $C = 0$; $x = \sqrt{-C} \frac{1 - Ke^{2\sqrt{-C}t}}{1 + Ke^{2\sqrt{-C}t}}$, si $C < 0$.



4.2 Puntos críticos con un único autovalor cero

Consideremos el sistema analítico:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) = ax + by + A^p(x, y) + A^{p+1}(x, y) + \dots \\ y' = g(x, y) = cx + dy + B^p(x, y) + B^{p+1}(x, y) + \dots \end{cases}, \quad p \geq 2$$

con A^k, B^k polinomios homogéneos y sea la ecuación de sus órbitas [o] $f(x, y) \frac{dy}{dx} = g(x, y)$.

Suponemos que el origen $\mathbf{0}$ es un punto crítico aislado, que los autovalores de la matriz de la aproximación lineal \mathbf{M} son $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 \neq 0$ (es decir, es $ab = cd$ y $\lambda_1 = a + d \neq 0$) y llamamos \mathbf{v}_0 y \mathbf{v}_1 a los vectores propios asociados respectivos.

[Si hubiese una curva de puntos críticos $p(x, y) = 0$, con p factor común de f y g , dividiendo los segundos miembros por p quedaría un sistema más sencillo con las mismas órbitas, salvo la desaparición de puntos críticos y el posible cambio de sentido de parte de las ellas].

La estructura local de estos puntos es fácil de precisar. Para determinarla basta, como en los puntos elementales con autovalores reales, encontrar las curvas que llegan a $\mathbf{0}$ con pendiente definida y fijar el flujo local sobre ellas. Simplemente es algo más complicado que en los elementales estudiar las curvas asociadas al autovalor 0 (variedades **centro**).

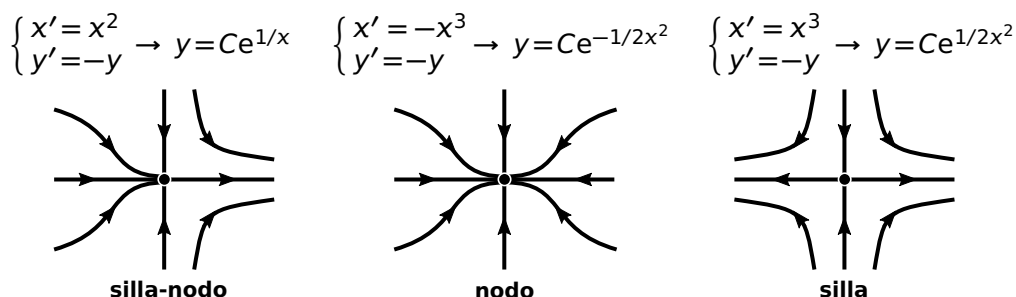
En este teorema presentamos una forma más directa que la habitual de analizar estos puntos (sin suponer, a diferencia de otros resultados, que \mathbf{M} esté en forma de Jordan):

Teor 1.

- i) Existe una única variedad (**variedad estable o inestable**) que llega al origen siendo tangente a \mathbf{v}_1 . El sentido del flujo local sobre ella lo da el signo de λ_1 .
- ii) Existe al menos una variedad de clase C^∞ asociada a λ_0 (**variedad centro**) que llega al origen siendo tangente a \mathbf{v}_0 . El flujo local sobre esta variedad depende de los términos no lineales de [S] y se puede precisar calculando algún término de su desarrollo en serie de Taylor a partir de la ecuación [o].
- iii) La estructura de las órbitas de [S] en un entorno del origen queda determinada por λ_1 y el flujo sobre la variedad centro, pudiendo tratarse de un nodo (estable o inestable), de un punto silla o de un silla-nodo.

[La variedad centro puede no ser única. De hecho, salvo en el caso de la silla, hay infinitas].

Ejemplos de las tres posibles configuraciones citadas en el teorema los dan los tres sencillos sistemas siguientes, para los que la expresión de sus órbitas es fácilmente calculable:



Como se observa, en los dos primeros casos hay infinitas variedades centro, todas ellas C^∞ , y todas tienen la misma serie de Taylor, aunque, salvo la $y=0$, ninguna sea analítica. Para sistemas del tipo [S], en general, no dispondremos de una expresión explícita de la variedad centro, pero siempre podremos (por ser la variedad infinitamente derivable) calcular algún término de su desarrollo en serie de potencias (que podría converger sólo para $x=0$). Esto bastará para determinar el flujo sobre ella y la estructura local de las órbitas.

Observemos también que las curvas asociadas a $\lambda \neq 0$ no siempre admiten esos desarrollos. Por ejemplo, las órbitas del nodo elemental $x' = x, y' = 2y - x^2$ son $y = (C - \log|x|)x^2$ y todas las que pasan por el origen siendo tangentes al eje x son sólo C^1 en un entorno de $x=0$. Pero esto no impide el análisis, pues el flujo sobre ellas viene dado por el signo del λ .

Las afirmaciones hechas se deducen de la bibliografía sobre variedades centro o de resultados más antiguos en los que se analizan directamente por otros métodos estos puntos.

Ilustremos el método propuesto de análisis de puntos con un $\lambda=0$ con unos ejemplos:

Ej 1. $\begin{cases} x' = x - y - xy - x^3 \\ y' = -x + y + 4y^2 \end{cases}$ En este caso $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\lambda_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hay variedad inestable tangente a \mathbf{v}_1 . Para ver el flujo sobre la variedad centro (tangente a \mathbf{v}_0) llevamos soluciones de la forma $y = x + c_2 x^2 + \dots$ a la ecuación diferencial de las órbitas:

$$[x - y - xy - x^3] \frac{dy}{dx} = -x + y + 4y^2 \rightarrow$$

$$[x - x - c_2 x^2 - \dots - x^2 - \dots - x^3][1 + 2c_2 x + \dots] = -x + x + c_2 x^2 + \dots + 4x^2 + \dots$$

$$\rightarrow x^2: -c_2 - 1 = c_2 + 4, c_2 = -\frac{5}{2}. \text{ La variedad centro es: } y = x - \frac{5}{2}x^2 + O(x^3).$$

Llevando esta expresión a la primera ecuación del sistema obtenemos:

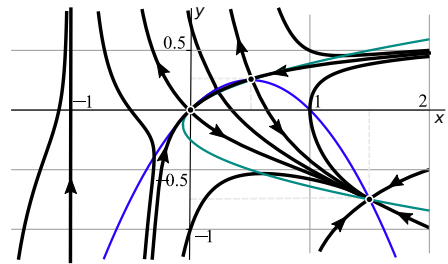
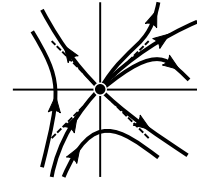
$$x' = x - x + \frac{5}{2}x^2 - x^2 + O(x^3) = \frac{3}{2}x^2 + O(x^3)$$

con lo que la variedad centro se recorre hacia la derecha a ambos lados del origen y es un silla-nodo.

Hagamos un dibujo global del mapa. Son calculables todos los puntos críticos: los cortes de las curvas con pendiente vertical $x = y + 4y^2$ y horizontal $(x+1)(y-x+x^2) = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-y-3x^2 & -x-1 \\ -1 & 1+8y \end{pmatrix} \begin{matrix} (1/2, 1/4) \nearrow \lambda = \frac{1}{2}[3 \pm \sqrt{15}] \text{ silla} \\ (3/2, -3/4) \searrow \lambda = -5 \pm \sqrt{5/2} \text{ nodo E} \end{matrix}$$

$x = -1$ es una órbita vertical (recorrida en tiempo finito).



Calculemos en general para el sistema [S]. Sea $d \neq 0$ (si $d=0$ cambiaríamos los papeles de x e y).

Como el \mathbf{v}_0 asociado a $\lambda_0 = 0$ es $(1, -\frac{c}{d})$ probamos series del tipo $y = -\frac{c}{d}x + c_p x^p + \dots \rightarrow$

$$[bc_p x^p + A^p(x, -\frac{c}{d}x + \dots) + \dots][-\frac{c}{d}x + \dots] = dc_p x^p B^p(x, -\frac{c}{d}x + \dots) + \dots \rightarrow$$

$$(1) \quad y = h(x) = -\frac{c}{d}x + \frac{1}{d(d+a)}[cA^p(1, -\frac{c}{d}) + dB^p(1, -\frac{c}{d})]x^p + O(x^{p+1}) \rightarrow$$

$$(2) \quad x' = \frac{1}{d+a}[dA^p(1, -\frac{c}{d}) - bB^p(1, -\frac{c}{d})]x^p + O(x^{p+1})$$

y, por tanto, el corchete, si no se anula, basta para determinar la estructura del origen.

$$[\text{En el ejemplo anterior: } y = -\frac{-1}{1}x + \frac{1}{1 \cdot 2}[(-1)(-1) + 4]x^2 + \dots, x' = \frac{1}{1+1}[-1 - (-4)]x^2 + \dots].$$

Ej 2. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - 2x^3 \end{cases}$ Es un sistema tratado en 3.6, donde vimos con funciones de Lyapunov que era asintóticamente estable.

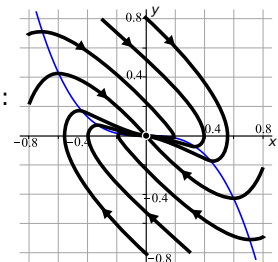
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \lambda_1 = -1, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \lambda_0 = 0, \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La variedad centro es de la forma $y = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$ que sustituimos en [o]:

$$[c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots][2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots] = -c_2 x^2 - c_3 x^3 - c_4 x^4 + \dots - 2x^3 \rightarrow$$

$$x^2: c_2 = 0, x^3: c_3 = -2, \dots \rightarrow y = -2x^3 + \dots \rightarrow x' = -2x^3 + \dots$$

La variedad centro se recorre hacia el origen y este punto es un nodo estable [y, por tanto, el origen es asintóticamente estable y no es preciso Lyapunov].



Ej 3. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -2y + ax^2 + y^2 \end{cases}$ Clasifiquemos el origen del sistema (que puede provenir de una ecuación). $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\lambda_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow h(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$$[c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots][2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots] = (a - 2c_2)x^2 - 2c_3 x^3 - 2c_4 x^4 + c_2^2 x^4 + \dots \rightarrow y = \frac{a}{2}x^2 + \dots \rightarrow$$

$$x' = \frac{a}{2}x^2 + \dots \text{ (basta para orientar la variedad centro).}$$

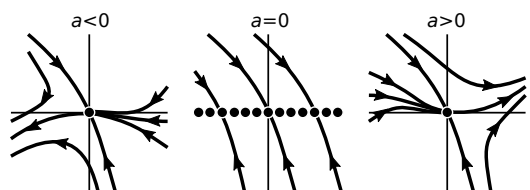
$$[\text{Más términos serían: } y = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a^2}{4}x^3 + \frac{2a^2 + 5a^3}{16}x^3 + \dots].$$

[Podemos dar algún término de la variedad estable:

$$y = -2x - c_2 x^2 + \dots \rightarrow y = -2x - (1 + \frac{a}{4})x^2 + \dots].$$

Si $a=0$ todo el eje x está formado por puntos críticos

(todos con $\lambda=0, -2$) y sus órbitas ($y' = y - 2$) se pintan y calculan fácilmente ($y = 2 + Ce^x$).



Para determinar el flujo en la variedad centro, en ocasiones necesitaremos más de un término de su desarrollo (y en otras nos bastará con el término lineal que se deduce de \mathbf{v}_0) como en:

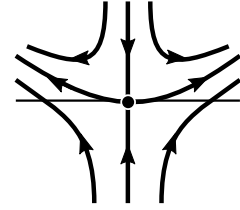
Ej 4. $\begin{cases} x' = xy - x^3 + xy^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \quad \lambda_1 = -1, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_0 = 0, \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{probamos } y = c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$

$$[c_2x^3 + c_3x^4 + c_4x^5 + \dots - x^3 + c_2^2x^5 + \dots][2c_2x + 3c_3x^2 + \dots] = -c_2x^2 - c_3x^3 - \dots + x^2 \rightarrow c_2 = 1.$$

Este término no basta, pues de $y = x^2 + O(x^3)$ sólo deducimos $x' = O(x^4)$.

Necesitamos calcular también $c_3 = 0, c_4 = 0$ (y ningún término más).

Ahora sí: $y = x^2 + O(x^5) \rightarrow x' = x^5 + O(x^6)$, y el origen es un punto silla.



En muchos libros se supone que, tras cambios de variable lineales, \mathbf{M} ya está en forma de Jordan (y esto es lo que nos sucede en los ejemplos 2, 3 y 4):

$$[\text{Sd}] \begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = dy + Q(x, y) \end{cases}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad d \neq 0, \quad P, Q \text{ de orden } > 1.$$

Se demuestra que si $P, Q \in C^k$ en un entorno U del origen existe una variedad centro local $y = h(x)$ de clase C^k con $h(0) = h'(0) = 0$. Además, si $d < 0$, la estabilidad de $\mathbf{0}$ es la misma que la de la solución $x = 0$ de la ecuación escalar $x' = P(x, h(x))$ y se tiene que dentro de U todas las soluciones se acercan exponencialmente a las soluciones sobre la variedad centro. Si $d > 0$, basta cambiar el sentido de las órbitas. El teorema 1 es un modo de presentar estos resultados más útil para el cálculo (es innecesario llevar \mathbf{M} a forma de Jordan).

Veamos cómo se simplifican las cosas para [Sd]. Si todos los $b_{k0} = 0$ la variedad centro es $y = 0$ (sobre ese eje es $y' = 0$). En caso contrario, sea b_{N0} el primer b_{k0} que no se anula. Es fácil comprobar que $c_2 = \dots = c_{N-1} = 0$ y $dc_N + b_N = 0$, y por tanto:

$$\text{La variedad centro es de la forma } y = -\frac{b_{N0}}{d}x^N + O(x^{N+1}), \quad N \geq p.$$

[En general, no son los términos no lineales de menor orden los que más influyen en la forma de la variedad centro o en la estructura del origen de [Sd] (por ejemplo, influyen más que b_{02} el b_{30} en la forma y el a_{30} en la estructura). Esto no contradice (1) y (2). De allí:

$$h(x) = -\frac{1}{d}b_{p0}x^p + O(x^{p+1}) = O(x^{p+1}) \text{ si } N > p; \quad x' = a_{p0}x^p + O(x^{p+1})].$$

Los sistemas con $a = b = c = 0$ permiten determinar la estructura con cálculos más sencillos [**método de Lyapunov-Schmidt**]. Sea $y = L(x)$ la función analítica con $L(0) = L'(0) = 0$ definida implícitamente en un entorno de 0 por la ecuación $g(x, y) = dy + A^p(x, y) + \dots = 0$ (el teorema de la función implícita asegura que existe). Se prueba que el flujo local sobre la variedad centro coincide con el de la ecuación obtenida al sustituir y por $L(x)$ en la primera ecuación: $x' = P(x, L(x))$. También aquí bastan un número finito de términos del desarrollo de $L(x)$ para analizar cada ejemplo. El primer término del desarrollo es, de nuevo, $(-b_{N0}/d)x^N$, aunque $L(x)$ y $h(x)$ diferirán en términos posteriores. La ecuación para x' que se obtiene al sustituir y por $h(x)$ o $L(x)$ no será $x' = 0$, pues entonces $y = h(x)$ e $y = L(x)$ serían curvas de puntos críticos y el origen no sería aislado.

Calculemos, utilizando ambos métodos, algún término más de los desarrollos en un sistema de la forma [Sd], en el caso de que P y Q comiencen por términos de orden dos:

$$h(x) = c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \rightarrow$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{b_{20}}{d}x^2 + \left[\frac{(b_{11} - 2a_{20})b_{20}}{d^2} - \frac{b_{30}}{d} \right] x^3 \\ &\quad + \left[\frac{b_{20}(2b_{20}a_{11} + 5a_{20}b_{11} - 6a_{20}^2 - b_{20}b_{02} - b_{11}^2)}{d^3} + \frac{b_{20}(b_{21} - 2a_{30}) + b_{30}(b_{11} - 3a_{20}) - b_{40}}{d^2} - \frac{b_{40}}{d} \right] x^4 + O(x^5) \\ \rightarrow x' &= a_{20}x^2 + \left[a_{30} - \frac{a_{11}b_{20}}{d} \right] x^3 + \left[a_{40} - \frac{a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30}}{d} + \frac{b_{20}(a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11} - 2a_{20}a_{11})}{d^2} \right] x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

Nos van proporcionando la misma estabilidad los primeros términos de $L(x)$ que son (basta hacer todos los $a_{ij} = 0$):

$$\begin{aligned} L(x) &= -\frac{b_{20}}{d}x^2 + \left[\frac{b_{11}b_{20}}{d^2} - \frac{b_{30}}{d} \right] x^3 + \left[-\frac{b_{20}(b_{20}b_{02} + b_{11}^2)}{d^3} + \frac{b_{20}b_{21} + b_{30}b_{11}}{d^2} - \frac{b_{40}}{d} \right] x^4 + O(x^5) \\ \rightarrow x' &= a_{20}x^2 + \left[a_{30} - \frac{a_{11}b_{20}}{d} \right] x^3 + \left[a_{40} - \frac{a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30}}{d} + \frac{b_{20}(a_{02}b_{20} + a_{11}b_{11})}{d^2} \right] x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

[Con Lyapunov-Schmidt las cuentas hubieran sido mucho más cortas en el ejemplo 4, cuya $L(x)$ es inmediata: $g = 0 \rightarrow y = L(x) = x^2 \rightarrow x' = x^5$].

4.3 Análisis de puntos ‘poco degenerados’

Suponemos que el origen $\mathbf{0}$ es punto crítico aislado del sistema analítico:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) = A^n(x, y) + A^p(x, y) + \dots \\ y' = g(x, y) = B^n(x, y) + B^p(x, y) + \dots \end{cases}, \quad p > n \geq 1,$$

con A^k y B^k polinomios homogéneos de grado k y no siendo A^n o B^n ambos nulos.

Para tratar [S] de forma similar al caso lineal introducimos unas notaciones inspiradas en él. Su ‘aproximación homogénea’ será el sistema con sólo los términos de menor orden:

$$[H] \begin{cases} x' = A^n(x, y) \\ y' = B^n(x, y) \end{cases}$$

Serán ‘**poco degenerados**’ los puntos para los que bastaría un único cambio de variable para descomponer el origen en varios puntos elementales o con un autovalor cero. Aunque empezaremos con los cambios, los teoremas que veremos nos darán un algoritmo sencillo para el análisis de $\mathbf{0}$: bastará hallar las raíces de un polinomio P de grado $n+1$ dado por [H], fijar el signo de P entre ellas y hallar los valores de otro polinomio en esas raíces y , en el peor de los casos, calcular algún término del desarrollo de una ‘variedad centro’.

Utilizando la expresión en polares

Comencemos con el cambio a polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $(r, \theta) \in [0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Denotaremos para abreviar en lo que sigue $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, $A^n = A$ y $B^n = B$.

El sistema [S] se convierte en:

$$\begin{cases} r' = r^n [cA(c, s) + sB(c, s)] + \dots \\ \theta' = r^{n-1} [cB(c, s) - sA(c, s)] + r^{p-n} [cB^p(c, s) - sA^p(c, s)] + \dots \end{cases}$$

Las órbitas de este sistema en $r > 0$ son las mismas que las de

$$[P] \begin{cases} r' = r [cA(c, s) + sB(c, s)] + \dots \equiv rR(\theta) + \dots \\ \theta' = [cB(c, s) - sA(c, s)] + r^{p-n} [cB^p(c, s) - sA^p(c, s)] + \dots \equiv \Theta(\theta) + r^{n-p}\Theta^p(\theta) + \dots \end{cases}$$

Supondremos en lo que sigue que $\Theta(\theta) \neq 0$.

Los puntos críticos de [P] sobre $r=0$ vienen dados por el polinomio homogéneo de grado $n+1$ en $\cos \theta$ y $\sin \theta$:

$$(1) \quad cB(c, s) - sA(c, s) = \Theta(\theta) = 0.$$

Podemos escribir (1) en la forma:

$$(2) \quad B(1, \tan \theta) - \tan \theta A(1, \tan \theta) = 0$$

[teniendo en cuenta que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$ son raíces de (1) no aparecerán entre las de (2)].

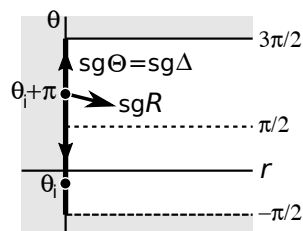
Esta ecuación tiene a lo más $2n+2$ raíces reales θ_i agrupadas por parejas, ya que si θ_i es raíz también lo es $\theta_i + \pi$. Llamaremos $\theta_1, \dots, \theta_q$ (con $q \leq n+1$) a las raíces de (1) en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Observemos que, por ser el origen un punto crítico aislado, no existen más puntos en el entorno del eje $r=0$ que los dados por (1). Como ese eje es órbita de [P], las órbitas de $r > 0$ que lleguen a él sólo pueden hacerlo a los puntos $(0, \theta_i)$. Cada órbita que llegue a uno de esos puntos nos dará una órbita de [S] que llega al origen con pendiente $\tan \theta_i$ y esas serán las únicas posibles pendientes de las órbitas de [S] que lleguen a $\mathbf{0}$. En el caso de que no existiese ninguna raíz real de (1), ninguna órbita podría acercarse a $\mathbf{0}$ con pendiente definida y entonces $\mathbf{0}$ se trataría de un centro o de un foco estable o inestable.

De forma equivalente, escribiendo (1) en cartesianas obtenemos la ecuación más sencilla

$$(3) \quad \Delta(x, y) = xB(x, y) - yA(x, y) = 0$$

que define a lo más $n+1$ rectas que pasan por el origen. Con todo lo anterior está claro que:

Si una órbita llega a $\mathbf{0}$ lo hará siendo tangente a alguna de las rectas definidas por la ecuación (3).



Si cada $(0, \theta_i)$ fuese elemental o con sólo un autovalor 0 (un 'punto simple'), las órbitas de [P] cerca del eje $r = 0$, y por tanto la estructura del origen, quedaría perfectamente determinada. La matriz de la aproximación lineal de [P] en cada uno de esos puntos es:

$$\mathbf{M}(\theta_i) = \begin{pmatrix} R(\theta_i) & 0 \\ E(\theta_i) & \frac{d}{d\theta}\Theta(\theta_i) \end{pmatrix} \text{ con } E(\theta_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n+1 \\ \Theta^{n-1}(\theta_i) & \text{si } p = n+1 \end{cases}$$

Sus autovalores son $\Lambda_i = R(\theta_i)$ y $M_i = \Theta'(\theta_i)$, asociado éste a un vector propio vertical. Como $r=0$ es órbita, si $(0, \theta_i)$ es simple sólo puede ser nodo, silla o silla-nodo. Los autovalores de $\mathbf{M}(\theta_i + \pi)$ son los mismos Λ_i y M_i si n es impar o $-\Lambda_i$ y $-M_i$ si n es par. Así pues:

La estructura local de 0 queda determinada si $\Lambda_i^2 + M_i^2 \neq 0$ para todo $i=1, \dots, q$.

Veamos como precisar esta estructura con el mínimo de cálculos. Si θ_i es raíz simple de $\Theta(\theta)=0$ entonces será $\Theta'(\theta_i) \neq 0$ y $(0, \theta_i)$ será un punto simple. Si ninguna raíz es múltiple, a cada $(0, \theta_i)$ llegará una variedad no vertical (al menos). El flujo sobre esta variedad está determinado por $R(\theta_i)$ si es no nulo. Si $R(\theta_i) = 0$ mejor determinaremos el flujo sobre la variedad centro volviendo al sistema [S] y probando la serie adecuada (la variedad seguirá siendo C^∞ en cartesianas). Como $\theta' = \Theta(\theta)$ en $r=0$, para analizar el flujo en la variedad vertical más rápido que calcular los M_i será fijar el signo de Θ en $[0, 2\pi]$ [es decir, el signo de $\Delta(x, y)$]. Para ello se puede calcular Θ en algún θ que no sea raíz de (1) e ir luego orientando alternativamente los segmentos entre puntos críticos.

Si θ_i es raíz de multiplicidad k y $\Lambda_i = R(\theta_i) \neq 0$ (si es cero se complica mucho) la variedad no centro está ya orientada con Λ_i . El flujo en las cercanías de $(0, \theta_i)$ sobre $r=0$ (variedad centro) se determinará de forma análoga a la anterior (sin hallar M_i), teniendo en cuenta para la orientación del eje por encima y por debajo del punto la paridad de k .

Resumamos los cálculos anteriores en un teorema:

Sean $\Theta(\theta) = cB(c, s) - sA(c, s)$ y $R(\theta) = cA(c, s) + sB(c, s)$.

Suponemos $\Theta \neq 0$ y que $\Theta(\theta)=0$ tiene $q \neq 0$ ceros reales $\theta_1, \dots, \theta_q$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Si todos ellos son simples o si para los θ_i múltiples es $R(\theta_i) \neq 0$, existe para cada $i=1, \dots, q$ al menos una variedad de [S] que llega a **0** con pendiente $\tan \theta_i$.

El flujo local sobre cada una lo da el signo de $R(\theta_i)$ si no es nulo o se puede precisar calculando algún término del desarrollo de la variedad si es $R(\theta_i)=0$.

Estos flujos y el signo de $\Theta(\theta)$ en $[0, 2\pi]$ determinan la estructura local de **0**.

En la práctica conviene ir esquematizando la información obtenida sobre una circunferencia (el eje $r = 0$, identificando $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$) en la que habremos situado tantas parejas de puntos críticos asociados a cada raíz de (1) como indique su multiplicidad.

Ej 1. $\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$ Con las notaciones vistas se tiene:

$$cB - sA = 2c^2s(c-s) \rightarrow \theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \theta_3 = \frac{\pi}{2} \text{ doble}$$

$$cA + sB = 2c^3s + c^2s^2 - s^4 \rightarrow \Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = \frac{1}{2}, \Lambda_3 = -1$$

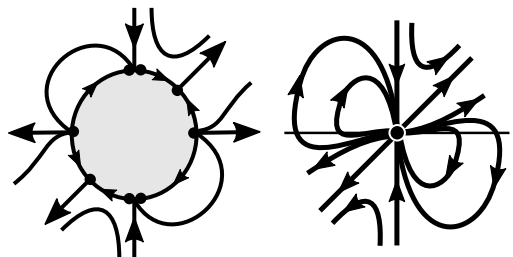
Las tres θ_i están asociadas a puntos simples. Como para $(0, \pi/4)$ es $\Theta(\theta) > 0$, sin más que tener en cuenta la paridad de la multiplicidad de las θ_i se obtiene que la orientación de la circunferencia entre puntos críticos es la del dibujo. Falta sólo por orientar la variedad centro correspondiente a θ_1 , para lo que necesitamos conocer algún término de su desarrollo.

Probando $y = c_2x^2 + \dots$ se tiene que $[2c_2x^4 + O(x^5)][2c_2x + O(x^2)] = 2c_2x^4 + 2c_3x^5 - x^5 + O(x^6)$

$$\rightarrow c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{2}, \text{ es decir, } y = \frac{1}{2}x^3 + O(x^4).$$

[En 4.7 daremos ideas para hallar más rápidamente términos de desarrollos de variedades horizontales o verticales utilizando la poligonal de Newton].

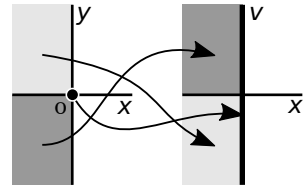
Por tanto, sobre la variedad centro es $x' = x^5 + O(x^6)$ y completamos el dibujo local del origen (único punto crítico del sistema), pues las demás órbitas cerca de $r=0$ quedan determinadas (tal vez pudiera aparecer algún sector parabólico entre los elípticos e hiperbólicos).



Un dibujo del mapa de fases de 1 hecho a partir de Maple aparece en la portada de este libro.

Usando el blow-up: $x=x, y=xv$

Lleguemos con este cambio a resultados equivalentes a los de las polares. El cambio 'estira' verticalmente $(x,y)=(0,0)$ y lo convierte en todo el eje v , deja el eje x invariante y lleva los cuadrantes 1, 2, 3, 4 del plano xy a los cuadrantes 1, 3, 2, 4 del xv .



Haciendo $x=x, y=xv$ ($xv'=y'-vx'$), [S] se convierte en:

$$\begin{cases} x' = x^n A(1, v) + x^p A^p(1, v) + \dots \\ v' = x^{n-1} [B(1, v) - vA(1, v)] + x^{p-1} [B^p(1, v) - vA^p(1, v)] + \dots \end{cases}$$

para el que $x=0$ es una recta de puntos críticos. Sus órbitas para $x < 0$ y $x > 0$ son las de:

$$[B] \begin{cases} x' = xA(1, v) + \dots \\ v' = [B(1, v) - vA(1, v)] + x^{p-n} [B^p(1, v) - vA^p(1, v)] + \dots \end{cases}$$

aunque su orientación en $x < 0$ es la opuesta si n es par. Los puntos críticos de [B] sobre el eje $x=0$ (formado por órbitas) se obtienen resolviendo

$$(4) \quad P_{n+1}(v) = B(1, v) - vA(1, v) = 0$$

ecuación con $n+1$ raíces reales a lo más. Suponemos, como con las polares, que $B-vA \neq 0$ y que (4) posee q raíces v_1, \dots, v_q . La aproximación lineal en un punto crítico $(0, v_i)$ es

$$M(v_i) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ E & \frac{d}{dv}[B-vA]_{(1, v_i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ E_i & \mu_i \end{pmatrix}.$$

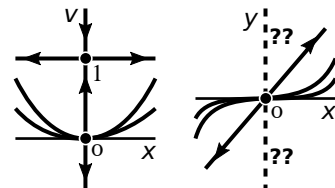
El autovalor μ_i informa aquí también de la multiplicidad de v_i como raíz de (4). Si ninguna es múltiple o si siéndolo el correspondiente $\lambda_i \neq 0$, quedan precisadas elementalmente las órbitas de [B] cerca de $x=0$ [calculando los $\lambda_i = A(1, v_i)$ y el flujo en las posibles variedades centro y analizando el signo de $B-vA$]. A cada variedad no vertical que llegue a un $(0, v_i)$ corresponderá una variedad de [S] que llegará a $\mathbf{0}$ siendo tangente a la recta $y = v_i x$. Su orientación en $x < 0$ coincidirá con la de aquella o se invertirá, según sea la paridad de n (para evitar estos líos con las paridades mejor orientaremos las variedades que vayamos hallando sustituyendo su expresión directamente en la primera ecuación del sistema [S]).

Llegamos otra vez a que las posibles direcciones de aproximación a $\mathbf{0}$ vienen dadas por (3), pues podemos escribir (4) como $0 = B(1, y/x) - \frac{y}{x} A(1, y/x) = \Delta(x, y)/x^{n+1}$, aunque como (4) no da las posibles variedades verticales de [S], mejor resolveremos (3), es decir, $\Delta=0$].

¿Queda determinada la estructura de $\mathbf{0}$ con el análisis de todos los $(0, v_i)$? Volvamos al ejemplo 1. La ecuación (4) es en este caso $2v-2v^2=0$ así que los v_i de [B] son $v_1=0$ y $v_2=1$, con $\lambda_1=A(1, 0)=0$, $\lambda_2=A(1, 1)=1$. Con el signo de $2v-2v^2$ orientamos el eje $x=0$. El flujo en la variedad centro podemos determinarlo calculando términos suyos como hicimos antes.

$$[O \text{ llevando el cambio hasta el final: } \begin{cases} x' = 2xv - xv^2 \\ v' = 2v - 2v^2 - x^2 \end{cases} \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), y = \frac{1}{2}x^3 + O(x^4)].$$

El dibujo de xv queda precisado, así como las órbitas en el plano xy (se invierten los cuadrantes 2 y 3 pero no el sentido de las órbitas en ellos por ser n impar). Como ya dijimos, para fijar los sentidos, mejor que mirar los λ y paridades será llevar las expresiones de las variedades a la ecuación en x' : por ejemplo, la variedad no centro $y=x+o(x)$ se orienta mejor con $x'=x^3+o(x^3)$.



Aún no tenemos información sobre lo que ocurre cerca del eje y . Se puede evidentemente 'estimar' $\mathbf{0}$ en dirección horizontal haciendo $x=yu$. Obtenemos la ecuación equivalente a (4) que ahora es $A(u, 1) - uB(u, 1) = 0$ y que, como (4), está incluida en la más general (3). Si $u=0$ es raíz simple de esta ecuación [es decir, si $x=0$ lo es de (3)] o si, pese a no serlo, es $\lambda_\infty = B(0, 1) = b_{0n} \neq 0$ existirá variedad no horizontal que llega a $(u, y) = (0, 0)$ y así habrá variedades de [S] que llegarán a $\mathbf{0}$ con pendiente vertical [para fijar el flujo nos bastará b_{0n} o, en el peor de los casos, necesitaremos algún término de la variedad centro $x=h(y)$].

En el ejemplo 1, aunque $x=0$ es raíz doble de $\Delta(x, y) = 2x^2y(x-y)$, es $\lambda_\infty = B(0, 1) = -1$, y hay una variedad estable que llega al origen con pendiente vertical. Para determinar las órbitas cerca de ella no necesitamos un dibujo en el plano uy . En la práctica convendrá reflejar la información que nos dan los $\lambda_i = A(1, v_i)$ y el posible λ_∞ sobre la conocida circunferencia con puntos y orientada. De hecho no es difícil ver que los λ y los λ tienen el mismo signo en $(-\pi/2, \pi/2)$, aunque los λ son más fáciles de calcular que los λ .

Mejoramos el teorema 1 con los últimos cálculos basados en los blow-ups, dando el resultado que es más cómodo de utilizar en la práctica:

Teor 2.

Supongamos que $\Delta(x, y) = xB(x, y) - yA(x, y) \neq 0$ y que $\Delta(x, y) = 0$ posee $q \neq 0$ raíces reales $y = v_1x, \dots, y = v_qx$ [y tal vez $x = 0$].

Si para aquellas v_i que no sean simples se tiene que $A(1, v_i) \neq 0$ [$B(0, 1) \neq 0$], existen en [S] variedades $y = v_ix + o(x)$ [ó $x = o(y)$] que llegan a $\mathbf{0}$ con pendiente v_i [∞] y la estructura local de $\mathbf{0}$ queda totalmente determinada con el signo de $\Delta(x, y)$ y el flujo local sobre cada una de estas variedades.

Este flujo viene dado por $x' = A(x, v_ix)$ si $A(1, v_i) \neq 0$ [$y' = B(0, y)$ si $B(0, 1) \neq 0$] o se puede precisar hallando algún término más de las variedades si fuese cero.

[No queda $\mathbf{0}$ analizado si $\Delta \equiv 0$, o si existe $\lambda = 0$ asociado a v múltiple, o cuando no hay raíces reales (centro o foco, tema que se tratará en 4.4)].

Si el sistema es **homogéneo** (o sea, si es de la forma [H]), **las rectas $y = v_ix$ asociadas a las raíces reales de $\Delta = 0$ están formadas por órbitas del sistema** (invariantes, como en los lineales homogéneos: $n = 1$), ya que $y = vx$ es tangente al campo \mathbf{v} definido por el sistema [H] si y sólo si para algún λ :

$$[v\lambda] \begin{cases} A(1, v) = \lambda \\ B(1, v) = \lambda v \end{cases}$$

Por tanto, para cada v que satisfaga $[v\lambda]$ [es decir que cumpla $P_{n+1}(v) = 0$] hay una recta invariante dada por $(1, v)$. Y los λ que obtenemos de cada v dan la orientación sobre la recta. Como sucedía también en los lineales, a un $\lambda = 0$ está asociada una recta de puntos críticos (y el único punto aislado posible es el origen). Y de nuevo la estructura deducida del análisis local de [H] es válida para todo \mathbf{R}^2 .

Observemos más similitudes entre el último teorema y el modo de analizar sistemas lineales: el papel de los '**vectores propios**' lo cumplen aquí los v_i y el de los '**autovalores**', los $\lambda_i = A(1, v_i)$. En estos términos, el teorema 2 asegura que la estructura queda determinada si no existen 'vectores propios' múltiples asociados al 'autovalor' $\lambda_i = 0$. [Volveremos a estas ideas, para n igual a 2 y 3, en la sección 4.6].

Se tiene también que, como ocurría en los puntos elementales, **si hay λ_i reales y todos son distintos de cero el sistema no homogéneo [S] mantiene la estructura de la 'aproximación homogénea' [H]**, aunque las órbitas rectas dejarán de serlo en general.

La forma de proceder con los $\lambda_i = 0$ asociados a v simples es también enteramente análoga al trabajo con sistemas con un único autovalor cero de 4.2: debemos entonces calcular términos del desarrollo de una 'variedad centro'.

Para $n = 1$ se calculaban primero los autovalores y después los vectores propios asociados, pero se podría hacer a la inversa, como aquí, empezando con el cálculo de los v a partir de $[v\lambda]$:

$$\begin{cases} a + bv = \lambda \\ c + dv = \lambda v \end{cases} \rightarrow bv^2 + (a - d)v - c = 0, \quad v = \frac{d - a \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2b}, \quad \lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2} \quad (\text{si } b \neq 0).$$

[Aquí el caso $\Delta \equiv 0$ no plantea problemas: es el nodo estelar].

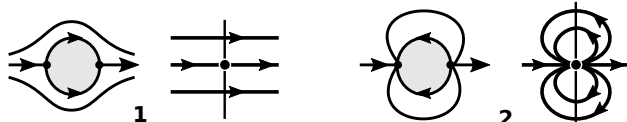
O podríamos llegar a la ecuación de autovalores eliminando directamente v de ese sistema:

$$v = \frac{\lambda - a}{b} \rightarrow c + \frac{d(\lambda - a)}{b} = \frac{\lambda(\lambda - a)}{b}, \quad \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Pero, a diferencia de los lineales, donde los autovalores contienen toda la información sobre la estructura del punto (y, muchas veces, del punto del sistema no lineal del que sea aproximación), **conociendo para $n > 1$ los λ (e incluso los v) la estructura de $\mathbf{0}$ no queda determinada: es necesario también el signo de $\Delta(x, y)$.**

Ej 2. Sean: [1] $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta(x, y) = -y(x^2 + y^2)$, [2] $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases} \rightarrow \Delta(x, y) = y(x^2 + y^2)$.

Los dos sistemas tienen el mismo único vector propio ($v = 0$) asociado al mismo autovalor ($\lambda = 1$). Pero sus mapas de fase son esencialmente diferentes:



Ahora discutimos un ejemplo más general (que incluye en particular el [2] del ejemplo anterior).

Ej 3. Analicemos las diferentes posibles estructuras del origen en un sistema de la forma:

$$[S] \begin{cases} x' = ax^2 - y^2 + A^p(x, y) + \dots \\ y' = 2xy + B^p(x, y) + \dots \end{cases} \text{ con } p > 2.$$

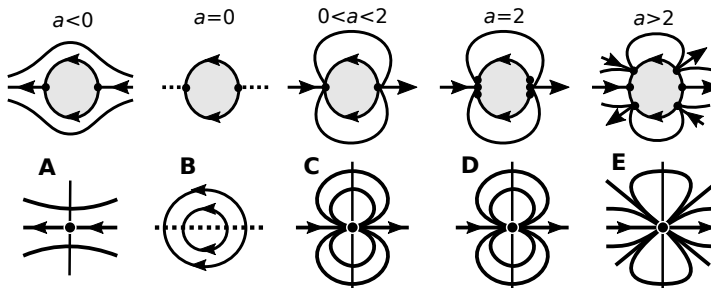
Tratemos primero la aproximación homogénea (para la que los retratos de fase serán globales):

$$[H] \begin{cases} x' = ax^2 - y^2 \\ y' = 2xy \end{cases} \rightarrow \Delta(x, y) = y[(2-a)x^2 + y^2].$$

Sus raíces son $y=0 \forall a$ (simple, salvo si $a=2$, en que es triple) e $y = \pm\sqrt{a-2}x$ para $a > 2$.

Los autovalores asociados son: $\lambda_0 = a, \lambda_{\pm} = 2$.

Existen, pues, 5 casos para [H], asociados a los retratos de fase de abajo.



¿Cuáles son localmente equivalentes a los de cualquier sistema de tipo [S]? o, en otras palabras, ¿en qué casos la estructura de [S] queda fijada por los términos homogéneos de menor orden? Viomos que para A, C, D, E la estructura del origen de [S] es la aproximación homogénea [H].

Pero en el caso B ($a=0$) los términos A^p y B^p influyen en el flujo de la variedad centro, habiendo (en el caso de que el origen sea aislado) cuatro posibilidades (determinadas por a_{p0} , si este coeficiente no es nulo) ejemplificadas por dos que vuelven a dar C y A, respectivamente:

$$\begin{cases} x' = -y^2 + x^4 \\ y' = 2xy \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -y^2 - x^4 \\ y' = 2xy \end{cases}$$

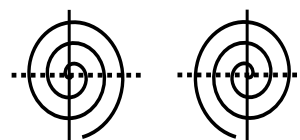
y por otras dos que proporcionan retratos locales de fase de nuevo tipo (el segundo es el único asintóticamente estable de todos los que nos aparecen):



Si $a_{p0} = 0$ son necesarios los términos de orden mayor que p . Por ejemplo $\begin{cases} x' = -y^2 + x^6 \\ y' = 2xy + y^3 + x^4 \end{cases}$

exige calcular el término x^3 del desarrollo de variedad y el x^6 para precisar el flujo sobre ella. Probando series se obtiene: $y = \frac{1}{4}x^3 + O(x^4) \rightarrow x' = \frac{3}{4}x^6 + O(x^7)$. Tiene, pues, la estructura C.

Por último, veamos dos nuevos casos que pueden derivar del B si hay una curva de puntos críticos $y = h(x)$. Dividiendo los segundos miembros del sistema por $y - h(x)$ obtendríamos uno del tipo $x' = -y + \dots, y' = 2x + \dots$ para el que la aproximación lineal es un centro, con lo que [S] podría tener también estas estructuras:



En el siguiente sistema (homogéneo) aparece un caso del teorema que ha salido poco en los ejemplos: vector propio múltiple con autovalor no nulo.

Ej 4. $\begin{cases} x' = -x^3 + y^3 \\ y' = -x^2y - 2xy^2 \end{cases} \quad \Delta(x, y) = x(-x^2y - 2xy^2) - y(-x^3 + y^3) = -y^2(2x^2 + y^2) \rightarrow y=0 \text{ doble.}$

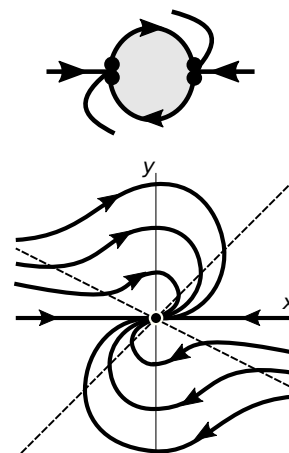
Pero está asociado a un autovalor no nulo: $A(x, 0) = -x^3$.

Orientando esta variedad horizontal y la circunferencia (es $\Delta \leq 0$), obtenemos el esquema de arriba y el mapa de fases de abajo. Es un nodo de una tangente no elemental (asintóticamente estable).

Como en toda ecuación homogénea, son fáciles sus isoclinas (sólo hemos dibujado las de pendiente horizontal y vertical) y se pueden hallar sus órbitas (salvo integrales no calculables):

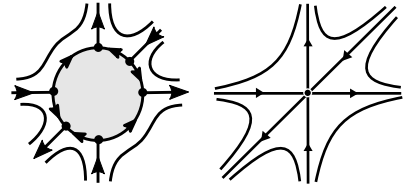
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + 2xy^2}{x^3 - y^3} \xrightarrow{z=y/x} xz' = \frac{z^4 + 2z^2}{1 - z^3} \rightarrow \frac{1}{z} + \ln(z^2 + 1) + \arctan z = C - \ln x. \quad (z \text{ no despejable})$$

La estructura del punto no se vería modificada si incluyésemos en el sistema cualquier término de orden mayor que 3.



Miremos ahora ejemplos de 4.1. Con las técnicas de esta sección podemos precisar la estructura del 1 y 4 de allí (sistemas homogéneos). Veamos el 1 (es análogo el 4):

Ej 5. $\begin{cases} x' = x^2 - 2xy \\ y' = y^2 - 2xy \end{cases} \Delta = 3xy(y-x), \lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1, \lambda_\infty = 1 \rightarrow$
 v_i simples, $\Delta < 0$ si $x > 0$ y $0 < y < x$



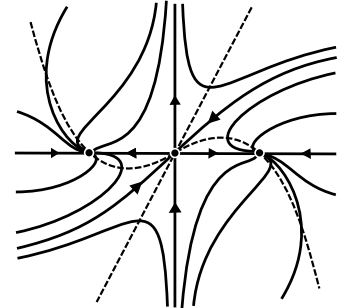
Y volvemos a encontrarnos con la estructura precisada en 4.1.
 Y ahora también sabemos que el origen no se vería afectado si añadimos cualquier término de orden mayor que 2, como en

$\begin{cases} x' = x^2 - 2xy - x^4 \\ y' = y^2 - 2xy \end{cases}$ Este sistema, además del origen, tiene 2 nodos de 1 tangente en $(\pm 1, 0)$ [estable e inestable], los dos con vector propio horizontal.

El origen mantiene los 6 sectores hiperbólicos, dos de las rectas del homogéneo se han conservado, pero la $y=x$ se ha deformado con el término $-x^4$, como muestran estos valores del campo \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} x^2 - x^4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(x, x) = -x^2 \begin{pmatrix} 1 + x^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además, \mathbf{v} horizontal también en $y=2x$ y vertical en $y = \frac{1}{2}(x - x^3)$.



Pero **no tenemos teoría** aún para analizar los 3 casos del ejemplo 2: $x'' = -2x^3$, $x'' = 2x^3$, $x'' = \frac{3}{2}x^2$. pues en los tres es $\Delta = -y^2$ y a este vector propio múltiple está asociado el autovalor $\lambda = A(1, 0) = 0$. [Lo mismo sucede para toda ecuación con matriz de aproximación lineal no nula $x'' = B^2(x, x') + \dots$].

Ni tampoco para el ejemplo 3: $\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y^2 \end{cases} \rightarrow \Delta = x^2, B(0, 1) = 0$. También doble con autovalor 0.

Aunque en 4.7 daremos ideas de cómo tratar estos puntos 'mas degenerados', hagamos unos primeros cálculos para acabar la sección. Un resultado probado hace cuarenta años asegura que cualquier punto degenerado se acaba convirtiendo en puntos simples haciendo un número suficiente de blow-ups.

En la silla de 2b, como han precisado nuestros teoremas, con un blow-up no se resuelve el problema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x^3 \end{cases} \xrightarrow{x=x, y=xv} \begin{cases} x' = xv \\ xv' + x'v = xv' + xv^2 = 2x^3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = xv \\ v' = 2x^2 - v^2 \end{cases} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ no elemental.}$$

[Sí sabríamos analizar el último sistema con el teorema 2: $\Delta = 2x(x-v)(x+v)$, los tres simples].

Para llegar a puntos elementales habría que realizar otro blow-up en el mismo sentido: $x=x, v=xw$. O, en el sistema inicial, directamente $x=x, y=x^2w$. Hacemos esto último:

$$x=x, y=x^2w \xrightarrow{\quad} \begin{cases} x' = x^2w \\ x^2w' + 2xx'w = x^2w' + 2x^3w^2 = 2x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = xw \\ w' = 2 - 2w^2 \end{cases}.$$

Con un único cambio de variable hemos convertido el origen en los dos puntos elementales (ambos sillas) de este sistema; $(0, \pm 1)$. Existen, pues, variedades $w = \pm 1 + \dots$, que volviendo a nuestras variables, se convierten en $y = \pm x^2 + \dots$ (conocidas hace tiempo para este sencillo ejemplo exacto e integrable).

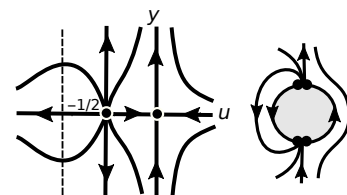
No es claro cómo reconstruir el mapa de fases inicial a partir del xw , pero sí es obvio lo que sucede llevando las variedades orientadas a la circunferencia y pensando que lo que hemos hecho es volver a estirar verticalmente el origen de xv . La estructura resulta ser como que habíamos calculado en 4.1.

[Como el inicial, los dos sistemas son resolubles: $v^2 = x^2 + \frac{C}{x^2}$, $w^2 = 1 + \frac{C}{x^4}$].

El ejemplo 3 exige dos blow-ups horizontales, o bien, un único cambio $x=y^2u, y=y$, que lleva a:

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y^2 \end{cases} \xrightarrow{x=y^2u, y=y} \begin{cases} w' = -yu - 2yu^2 \\ y' = y^2u + y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w' = -u - 2u^2 \\ y' = yu + y \end{cases}.$$

También el punto doble se ha desdoblado en otros dos elementales: $(0, 0)$ (silla) y $(-\frac{1}{2}, 0)$ (nodo inestable). Las variedades verticales que pasan por esos puntos $x = -\frac{1}{2}$ y $x=0$ dan lugar en el sistema inicial a las calculadas $x = -\frac{1}{2}y^2$ y $x=0$, recorridas ambas hacia arriba.



Pero, ¿cuántos blow-ups habrá que hacer, en general, para convertir un punto degenerado en otros elementales? ¿Qué cambio único podría conseguir lo mismo? ¿Se podrá precisar la estructura (como en el teorema 2) sin hacer explícitamente el cambio? Daremos algunas respuestas en 4.7.

4.4 Centros y focos de puntos poco degenerados

Consideremos primero el sistema analítico homogéneo con n impar:

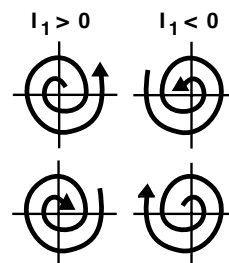
$$[H] \begin{cases} x' = A^n(x, y) = a_{n0}x^n + \dots + a_{0n}y^n \\ y' = B^n(x, y) = b_{n0}x^n + \dots + b_{0n}y^n \end{cases}$$

Escrito en polares [$c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, como en 4.3], adopta la forma:

$$[P] \begin{cases} r' = [cA^n(c, s) + sB^n(c, s)]r^n \equiv M_n(\theta)r^n \\ \theta' = [cB^n(c, s) - sA^n(c, s)]r^{n-1} \equiv m_n(\theta)r^{n-1} \end{cases} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{M_n(\theta)}{m_n(\theta)} r.$$

Suponemos que el denominador $m_n(\theta) = b_{n0}c^{n+1} + \dots - a_{0n}s^{n+1}$ **no se anula** para ningún θ (por tanto, debe ser el producto $b_{n0}a_{0n} < 0$ y n impar). Sabemos por 4.3 que no existen variedades que lleguen al origen con pendiente definida y por tanto [H] tiene un **centro** o un **foco** en el origen. Como M_n y m_n son π -periódicas, está claro que la r de las órbitas tenderá a infinito con θ , será función periódica de θ o tenderá hacia 0 al tender θ hacia infinito, según sea mayor, igual o menor que cero, respectivamente, la integral:

$$I_1 \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{M_n(\theta)}{m_n(\theta)} d\theta$$



[H] tendrá entonces un centro en el segundo caso y un foco en los otros dos. Para precisar la estabilidad del foco no basta precisar el signo de la integral. Es necesario conocer, además, el signo de $m_n(\theta)$, o lo que es lo mismo, el signo de b_{n0} o el de a_{0n} (si $a_{0n} > 0$, θ decrece con t , y crece si $a_{0n} < 0$):

Hagamos unas operaciones para facilitar el cálculo de la integral. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} m_n &= -csB_x^n + c^2B_y^n + s^2A_x^n - csA_y^n - B^n s - A^n c \\ &= A_x^n + B_y^n - c(cA_x^n + sA_y^n) - A^n c - s(cB_x^n + sB_y^n) - B^n s = A_x^n + B_y^n - (n+1)M_n \end{aligned}$$

puesto que para cualquier polinomio homogéneo $P(x, y)$ de grado n se cumple que:

$$xP_x(x, y) + yP_y(x, y) = nP(x, y)$$

Por tanto, si llamamos $E_{n-1}(x, y) \equiv A_x^n(x, y) + B_y^n(x, y)$, se tiene:

$$I_1 = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c, s)}{m_n} d\theta - \frac{1}{n+1} [\ln |m_n|]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c, s)}{m_n} d\theta$$

Olvidamos la constante positiva, hacemos el cambio de variable $z = \tan \theta$ en esta última integral, utilizamos para su denominador la notación de la sección anterior y definimos:

$$I \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{E_{n-1}(c, s)}{m_n(\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{n-1}(1, z)}{P_{n+1}(z)} dz, \quad P_{n+1}(z) = B^n(1, z) - zA^n(1, z)$$

[Si no hay órbitas de [H] que llegue al origen con pendiente definida es $P_{n+1}(z) \neq 0 \forall z$].

Recopilando lo anterior se tiene el siguiente teorema:

Teor 1.

Supongamos que $P_{n+1}(z) \neq 0 \forall z$. Entonces:
 Si la integral $I = 0$, el origen de [H] es un centro.
 Si $a_{0n} \cdot I > 0$, el origen de [H] es un foco estable.
 Si $a_{0n} \cdot I < 0$, el origen de [H] es un foco inestable.

[Si el sistema es exacto se tiene $I=0$ y el origen es un centro, como debía ocurrir. Y también deberá anularse cuando, por ejemplo, A^n sea impar y B^n par en y].

Veamos la forma particular que adopta el teorema en el caso no lineal más sencillo: $n=3$.

Sea [H3] $\begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases}$, $de < 0$. Para que tenga centro o foco debe ser:

$$P_4(z) = -dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e \neq 0 \quad \forall z \quad [\Rightarrow de < 0].$$

En este caso la integral que informa sobre la estabilidad es:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c+3h)z^2 + 2(b+g)z + (3a+f)}{-dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e} dz$$

Para hallar I debemos factorizar el denominador. Esto, en teoría, se puede hacer pues hay fórmulas para las raíces de polinomios de cuarto orden, que son poco útiles en la práctica. En esta sección nos limitamos a calcular I en casos de factorización sencilla. Y para simplificar expresiones vamos a suponer en los primeros que es $d=-1$ y $e > 0$.

El primer caso fácilmente resoluble aparece si $a=f$ y $c=h$. Entonces:

$$P_4(z) = z^4 + (g-b)z^2 + e = 0 \rightarrow z^2 = \frac{1}{2} [b-g \pm \sqrt{(g-b)^2 + 4e}].$$

Las cuatro raíces de $P_4(z)$ han de ser complejas. Esto se da en dos casos que conducen a las dos posibles factorizaciones diferentes del polinomio bicuadrado P_4 .

Si $g-b > 2\sqrt{e} \equiv 2S$, el corchete es real y negativo y hay 4 raíces imaginarias puras. Así:

$$P_4(z) = [z^2 + C][z^2 + D], \quad C, D > 0.$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hz^2 + 2Gz + F}{[z^2 + C][z^2 + D]} dz = \pi \frac{F + H\sqrt{CD}}{\sqrt{CD}[\sqrt{C} + \sqrt{D}]}$ y es $\sqrt{CD} = S$, $C + D = g - b \rightarrow \sqrt{C} + \sqrt{D} = \sqrt{g - b + 2S}$,

deducimos que $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4cz^2 + 2(b+g)z + 4a}{[z^2 + C][z^2 + D]} dz = 4\pi \frac{a + cS}{S\sqrt{g - b + 2S}} \Rightarrow sg[I] = sg[a + cS]$. (1)

Si $-2S < g - b < 2S$, z^2 es complejo, las raíces de P_4 tienen parte real y entonces:

$$P_4(z) = [z^2 + Az + C][z^2 - Az + C], \quad 4C - A^2 = g - b + 2S > 0, \quad C = S.$$

Ahora es $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hz^2 + 2Gz + F}{[z^2 + Az + C][z^2 - Az + C]} dz = \pi \frac{F + HC}{C\sqrt{4C - A^2}}$, que nos lleva a la misma condición (1).

Si $g - b = 2S$, es $P_4(z) = [z^2 + C]^2$, $C > 0$ y el valor de $I = 2\pi \frac{a + cS}{S^{3/2}}$ está recogido en (1).

Y, por último, si $g - b \leq -2S$, el denominador $P_4(z)$ posee raíces reales.

Resumiendo, si $a=f$, $c=h$ y $g-b > -2\sqrt{e}$ el teorema 1 nos precisa: $\boxed{c\sqrt{e} + a}$ $\begin{matrix} < 0 \rightarrow \text{foco E} \\ = 0 \rightarrow \text{centro} \\ > 0 \rightarrow \text{foco I} \end{matrix}$

Ahora supongamos que $P_4(z) = [z^2 + Az + C]^2$, con $4C - A^2 > 0$. Debe ser entonces:

$$h - c = 2A, \quad g - b = A^2 + 2C, \quad f - a = 2AC, \quad e = C^2 \Rightarrow$$

$$A = \frac{h-c}{2}, \quad C = \frac{1}{8} [4(g-b) - (c-h)^2] \Rightarrow 4C - A^2 = \frac{1}{4} [8(g-b) - 3(c-h)^2]$$

y han de satisfacerse las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$\boxed{f = a - \frac{c-h}{8} [4(g-b) - (c-h)^2], \quad e = \frac{1}{64} [4(g-b) - (c-h)^2]^2}. \quad (2)$$

Como es fácil de calcular una integral de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hz^2 + 2Gz + F}{[z^2 + Az + C]^2} dz = 4\pi \frac{HC - GA + F}{[4C - A^2]^{3/2}}$.

De lo anterior se deduce que: $I = 16\pi \frac{8a + (bc + gc + 3gh - 5bh) - h(c-h)^2}{[8(g-b) - 3(c-h)^2]^{3/2}}$.

Así pues, si $8(g-b) > 3(c-h)^2$ y los coeficientes del sistema satisfacen las relaciones (2), se concluye que el origen de [H3] es del tipo esquematizado a continuación:

$$\boxed{8a + (bc + gc + 3gh - 5bh) - h(c-h)^2} \quad \begin{matrix} < 0 \rightarrow \text{foco E} \\ = 0 \rightarrow \text{centro} \\ > 0 \rightarrow \text{foco I} \end{matrix}$$

Veamos que dice el teorema 1 al aplicarlo al bien conocido caso $n=1$:

Entonces el sistema es lineal: $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$ y son $P_2(z) = -bz^2 + (d-a)z + c$, $E_0 \equiv a+d$.

Para que tenga centro o foco debe ser $P_2(z) \neq 0 \forall z \Leftrightarrow (a-d)^2 + 4bc < 0$ [$\Rightarrow bc < 0$]. Como

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a+d}{-bz^2 + (d-a)z + c} dz = -sg(b) \frac{2\pi(a+d)}{\sqrt{-(a-d)^2 - 4bc}} \Rightarrow sg[bI] = -sg[a+d] \Rightarrow$$

si $a+d=0$ el origen es un centro, si $a+d < 0$ es foco estable, si $a+d > 0$ es foco inestable.

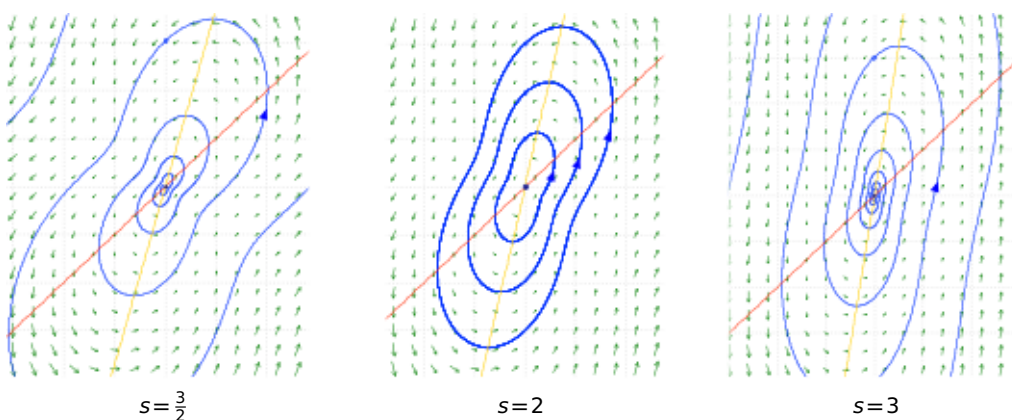
(Resultado inmediato viendo los autovalores del sistema: $\lambda = \frac{1}{2}[a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}]$).

Ej 1. $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = s^2x^3 + 2x^2y + 2sxy^2 - y^3 \end{cases} \rightarrow P_4(z) = z^4 + 2sz^2 + s^2 = [z^2 + s]^2$.

Este sistema posee un centro o un foco si $s > 0$. Para precisar su estabilidad podemos acudir a las fórmulas de los dos casos analizados. De cualquiera de ellas deducimos que:

$$0 < s < 2 \rightarrow \text{foco I} \quad s = 2 \rightarrow \text{centro} \quad s > 2 \rightarrow \text{foco E}$$

Integrando gráficamente con el ordenador para los tres valores de m indicados abajo:

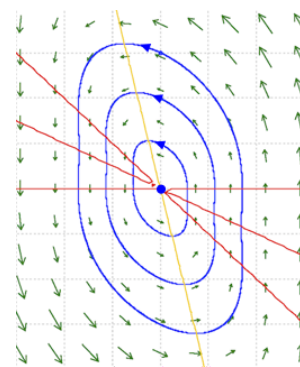


Ej 2. $\begin{cases} x' = -x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \\ y' = 4x^3 + 4x^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases} \quad P_4(z) = 2[z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2] = 2[z^2 + 1][z^2 + 2z + 2] > 0$.

Por tanto, $I = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z+1}{[z^2+1][z^2+2z+2]} dz = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+2z+2} \right] dz = 0$.

Y hay un centro en el origen, como también se observa en el dibujo aproximado de la derecha, donde la isoclina de pendiente horizontal $y=mx$ con m único cero real de m^3+5m^2+4m+4 aparece en amarillo y en rojo las de pendiente vertical: $y=0$, $y=-\frac{x}{2}$, $y=-x$.

[En la próxima sección se trata el problema general de la factorización de polinomios $P(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s$ y el cálculo de integrales de la forma I . Con esa sección también se puede ver que este sistema siempre tiene un centro si en vez del $4x^3$ aparece un término sx^3 cuando $s > 7/8$. Si $s \leq 7/8$ hay siempre variedades pasando por el origen, excepto si $s=0$ (con dos rectas de puntos críticos)].



Ej 3. $\begin{cases} x' = -x^4y + ax^3y^2 - y^5 \\ y' = 3x^5 + 6x^4y + 2x^3y^2 + ax^2y^3 \end{cases} \rightarrow P_6(z) = z^6 + 3[z+1]^2 > 0$ para todo z .

Tenemos que $a_{05} = -1 < 0$ y que $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_4(1,z)}{P_6(z)} dz = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{az^2+1}{P_6(z)} dz$.

Por el teorema 1 está claro que si $a \geq 0$ el origen es un foco inestable. Pero para discutir lo que sucede si $a < 0$, al no disponer de una expresión exacta de I (que es lo habitual), tenemos que evaluar numéricamente las integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{P_6(z)} dz \approx 1.7456, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P_6(z)} dz \approx 1.0857$$

El cambio de estabilidad (el centro) se da, pues, aproximadamente para $a \approx -1.615$.

Pasemos ya a considerar el sistema general y lo escribimos en polares:

$$[S] \begin{cases} x' = A^n(x, y) + A^{n+1}(x, y) + \dots \\ y' = B^n(x, y) + B^{n+1}(x, y) + \dots \end{cases} \rightarrow$$

$$[P] \begin{cases} r' = M_n r^n + M_{n+1} r^{n+1} + \dots, M_k = cA^k(c, s) + sB^k(c, s) \\ \theta' = m_n r^{n-1} + m_{n+1} r^n + \dots, m_k = cB^k(c, s) - sA^k(c, s) \end{cases}$$

Suponiendo que m_n no se anula [es decir que $P_{n+1}(z) = B^n(1, z) - zA^n(1, z) \neq 0 \forall z, n$ impar] y operando como en los centros lineales de 3.5:

$$[e] \frac{dr}{d\theta} \equiv R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + \dots = \frac{M_n r + M_{n+1} r^2 + \dots}{m_n + m_{n+1} r + \dots} = \frac{M_n}{m_n} r + \frac{m_n M_{n+1} - M_n m_{n+1}}{m_n^2} r^2 + \dots$$

Desarrollando la solución analítica $r(\theta)$ con $r(0) = r_0$: $r(\theta) = u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + u_3(\theta)r_0^3 + \dots$

Y haciendo $\theta = 0$: $r_0 \equiv u_1(0)r_0 + u_2(0)r_0^2 + u_3(0)r_0^3 + \dots \Rightarrow u_1(0) = 1, u_k(0) = 0$ si $k > 1$.

Sustituyendo $r(\theta)$ en [e] se obtiene este sistema recursivo para el cálculo de los $u_k(\theta)$:

$$u_1' = R_1 u_1, u_1(0) = 1;$$

$$u_2' = R_1 u_2 + R_2 u_1^2, u_2(0) = 0; \quad u_3' = R_1 u_3 + 2R_2 u_1 u_2 + R_3 u_1^3, u_3(0) = 0 \dots$$

El u_1 resulta ser mucho más complicado que la sencilla constante del caso no degenerado:

$$u_1(\theta) = e^{S_1(\theta)}, \text{ con } S_1(\theta) = \int_0^\theta R_1$$

Resolviendo las siguientes ecuaciones lineales:

$$u_2(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta u_1 R_2, \quad u_3(\theta) = u_1(\theta) \int_0^\theta [u_1^2 R_3 + 2u_2 R_2], \dots$$

se irían obteniendo los u_k en términos de primitivas (no calculables elementalmente).

Para ver si $\mathbf{0}$ es centro o foco debemos hallar, para r_0 pequeño, el signo de:

$$r(2\pi) - r(0) = [u_1(2\pi) - 1]r_0 + u_2(2\pi)r_0^2 + u_3(2\pi)r_0^3 + \dots$$

Y este signo lo da $S_1(2\pi)$ si es no nulo, es decir, el signo de la I_1 del principio de la sección.

Por tanto, **el sistema se comporta como la aproximación homogénea cuando $I \neq 0$** .

Lo difícil es ver lo que ocurre cuando $I = 0$, saber si el centro se conserva o si pasa a ser un foco estable o inestable (no hay un coeficiente de Lyapunov sencillo como el de 3.5).

Ej 1*. $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + 2x^2y + 4xy^2 - y^3 - 9x^4 \end{cases}$ [Sistema del ejemplo 1 con un término $-9x^4$, para el caso de centro de la aproximación homogénea].

No sabemos si el origen seguirá siendo centro o pasará a ser un foco.

[Para los otros valores de $m > 0$ sería un foco del mismo carácter].

Aparece un nuevo punto crítico (elemental) en $(1, 1)$:

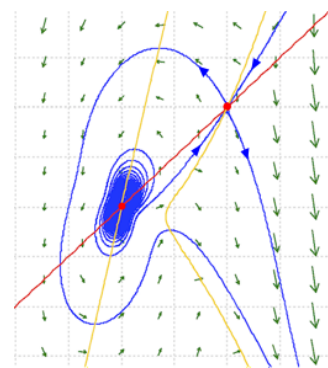
$$f = (x - y)(y^2 + 2xy + 2x^2) = 0 \rightarrow y = x \rightarrow 9x^3(1 - x) = 0.$$

La aproximación lineal en ese punto es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -16 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{es silla con } \lambda = 15 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda = -3 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La inclinación de los vectores propios sugiere que $\mathbf{0}$ se inestabiliza al añadir el nuevo término, y es lo que se observa numéricamente.

Las órbitas se alejan (lentamente) del origen.



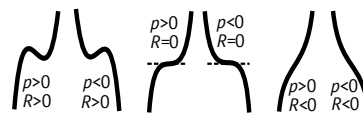
No son los analizados en esta sección todos los centros o focos degenerados, desde luego. Ya hemos visto en 4.1 ejemplos (que deben estar asociados a 'vectores propios múltiples' con $\lambda = 0$ que no hemos analizado) como el centro de la ecuación exacta $x'' + 2x^3 = 0$.

4.5 Polinomios de grado 3 y 4 e integrales racionales

Aunque no haya fórmulas para las raíces de los de grado mayor que 5 veamos algunos resultados para los de grado 3 y 4. Tratemos primero el **caso cúbico** en que sí las hay (complicadas):

$$P_3(z) = pz^3 + qz^2 + rz + s, \quad p \neq 0.$$

Como $P'_3(z) = 3pz^2 + 2qz + r$ puede tener 2 raíces reales, 1 doble o ninguna (según sea $R \equiv q^2 - 3pr >, = \text{ó} < 0$), la gráfica de P_3 puede tener dos extremos, un punto de inflexión de tangente horizontal o ser estrictamente monótona.



Si P_3 tiene raíz múltiple debe anularse el polinomio y su derivada, es decir:

$$\begin{cases} pz^3 + qz^2 + rz + s = 0 \\ 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases} \text{ sistema que es equivalente al } \begin{cases} qz^2 + 2rz + 3s = 0 \\ 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases}.$$

Eliminando la z entre ambas ecuaciones se obtendría la expresión de su **discriminante** D_3 que indica la existencia de esas raíces múltiples, pero un antiguo resultado ya asegura que un sistema del tipo:

$$\begin{cases} cz^2 + bz + a = 0 \\ fz^2 + ez + d = 0 \end{cases} \text{ tiene solución en } z \text{ si y sólo si se anula su } \mathbf{resultante:} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ e & f & g & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \end{vmatrix}.$$

En nuestro caso será $D_3 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3s & 2r & q & 0 \\ r & 2q & 3p & 0 \\ 0 & 3s & 2r & q \\ 0 & r & 2q & 3p \end{vmatrix} = \boxed{q^2r^2 - 4pr^3 - 4q^3s + 18pqrs - 27p^2s^2}$.

Llamando $S \equiv 27p^2s - 9pqr + 2q^3$, este D_3 se puede escribir más compacto: $D_3 = \frac{1}{27p^2} [4R^3 - S^2]$.

Se puede probar además que las raíces de P_3 vienen dadas por las siguientes fórmulas:

Si $D_3 = 0$, hay una raíz doble dada por $z_d = \frac{1}{3p} [-q + \sqrt[3]{\frac{S}{2}}]$ y otra simple $z_s = \frac{1}{3p} [-q - 2\sqrt[3]{\frac{S}{2}}]$.

[Si es además $R=0$ (y también $S=0$) habrá raíz triple $z_t = -\frac{q}{3p}$].

Si $D_3 < 0$, existe una única raíz real de P_3 : $z_r = -\frac{q}{3p} - \frac{1}{3p} \left[\frac{S - \sqrt{S^2 - 4R^3}}{2} \right]^{1/3} - \frac{1}{3p} \left[\frac{S + \sqrt{S^2 - 4R^3}}{2} \right]^{1/3}$.

[Y las otras dos serán complejas conjugadas].

Por último, si $D_3 > 0$ ($\Rightarrow R > 0$), hay tres raíces reales distintas de P_3 que se pueden expresar:

$$z_{1,2,3} = -\frac{q}{3p} + \frac{2\sqrt{R}}{3p} \cos \frac{\phi + 2k\pi}{3}, \quad k=0, 1, 2, \text{ siendo } \phi = \arccos \left(\frac{-S}{2R^{3/2}} \right).$$

Sin calcular el D_3 es fácil decidir cuántas raíces reales tiene cualquier P_3 , por ser su gráfica sencilla (es fácil encontrar sus extremos, lo que no pasa en polinomios de mayor orden).

Ej 1. $Q(z) = 2z^3 - z^2 - 12z + 6$ (sin raíces) enteras tiene tres, pues

$$Q'(z) = 2(3z^2 - z - 6) = 0 \rightarrow z_{\pm} = \frac{1}{6} [1 \pm \sqrt{73}] \text{ y es } Q(z_-) > 0, Q(z_+) < 0.$$

Podemos localizar mejor esas 3 raíces utilizando el teorema de Bolzano:

$$Q(-3) = -21, Q(-2) = 10, Q(0) = 6, Q(1) = -5, Q(2) = -6, Q(3) = 15.$$

Están en $[-3, -2]$, en $[0, 1]$ y en $[2, 3]$.

Con las fórmulas de arriba: $R = 73, S = 430, D_3 = 12696 \rightarrow 3$ raíces reales.

$$\phi \approx 1.922726 \rightarrow z_{1,2,3} \approx 2.449491, -2.449490, 0.5000027$$

[Los errores de redondeo aconsejan acudir a métodos numéricos incluso para un P_3 . El 'solve' de Maple, que sabe factorizar directamente el polinomio $Q(z) = (2z-1)(z^2-6)$, sí devuelve las cifras exactas de $1/2$ y $\sqrt{6}$].

En los polinomios cúbicos ligados a los P_4 que pronto veremos interesará más el caso $D_3 > 0$, pero en las aproximaciones homogéneas aparecían reales de cualquier tipo. Un ejemplo dependiente de s :

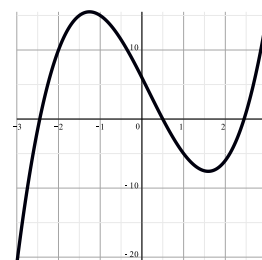
Ej 2. $P(z) = z^3 - 6z^2 + 9z + s$ $R = 9, S = 27(s+2), D_3 = -27s(s+4)$. Volvemos a comprobar fórmulas:

Raíces múltiples si $s = -4 \rightarrow \sqrt[3]{S/2} = -3, z_d = 1, z_s = 4$, o si $s = 0 \rightarrow \sqrt[3]{S/2} = 3, z_d = 3, z_s = 0$.

Las fórmulas se comportan peor con las raíces no múltiples, por ejemplo, si $s = 16$, para el que P es factorizable por ser $z = -1$ raíz $[(z+1)(z^2 - 7z + 16)]$, se deduce de arriba:

$$z_r = 2 - [9 - 4\sqrt{5}]^{1/3} - [9 + 4\sqrt{5}]^{1/3} \approx 2 - 0.3819660158 - 2.618033989 = -1.0000000053.$$

Si $s = 2$ (no factorizable) es $z_r = 2 - [2 - \sqrt{3}]^{1/3} - [2 + \sqrt{3}]^{1/3} \approx -0.195823345$ (como numéricamente).



Avancemos ahora en el estudio general de los sistemas cuadráticos siguiendo las ideas finales de 4.3. Recordemos que estos sistemas no pueden presentar centros o focos y que otra situación en que no se acababa el análisis era cuando era $P_3 \equiv 0$.

Para el homogéneo $[H_2] \begin{cases} x' = ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = ex^2 + fxy + gy^2 \end{cases}$, el sistema algebraico $[z\lambda] \begin{cases} a+bz+cz^2 = \lambda \\ e+fz+gz^2 = \lambda z \end{cases}$

nos proporcionaba sus 'vectores propios' $(1, z)$ y sus 'autovalores' λ .

Lo más sencillo era resolver $P_3(z) = cz^3 + (b-g)z^2 + (a-f)z - e$ y a partir de esos z deducir los λ .

[Suponemos desde ahora que $c \neq 0$, pues si no el anterior sería un fácil polinomio de grado 2].

Pero, aunque ahora parezca poco práctico, podemos encontrar una 'ecuación de autovalores' hallando la resultante en z del $[z\lambda]$. La obtendremos, pues, calculando el determinante:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c & 0 \\ e & f-\lambda & g & 0 \\ 0 & a-\lambda & b & c \\ 0 & e & f-\lambda & g \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Q_3(\lambda) = c\lambda^3 + [g(b-g) - c(a+2f)]\lambda^2 + [(b+2g)(ag-ce) - (2a+f)(bg-cf)]\lambda + (bg-cf)(af-be) - (ag-ce)^2 \equiv c\lambda^3 + q_\lambda\lambda^2 + r_\lambda\lambda + s_\lambda = 0.$$

Recordemos que las complicaciones aparecían si había z múltiples o $\lambda=0$ y que no se completaba la clasificación de un punto con esa aproximación homogénea cuando se daban a la vez. Aunque en la tesis se llega a caracterizaciones más precisas nos conformamos aquí con este resultado:

$$\text{Hay } z \text{ múltiple si } D_z = (a-f)^2(b-g)^2 - 18(a-f)(b-g)ce - 27c^2e^2 - 4c(a-f)^3 + 4e(b-g)^3 = 0. \\ \lambda=0 \text{ es autovalor si } s_\lambda = 0 \text{ y será autovalor doble si } r_\lambda = s_\lambda = 0.$$

[Si hay z múltiples habrá λ múltiples, pero lo contrario no es necesario pues podrían provenir de distintos z , por eso sus discriminantes no son iguales: $D_\lambda = (agc - fgc + bg^2 - c^2e)^2 D_z$].

Ej 3. Sea $\begin{cases} x' = y^2 - x^2 + R(x, y) \\ y' = 2y^2 + fxy + ex^2 + S(x, y) \end{cases}$, R y S con términos de orden 3 y mayores.

¿Para que valores de e y f no bastaría la aproximación homogénea para caracterizar el origen?

Nuestro P_3 será: $z^3 - 2z^2 - (f+1)z - e$. Y calculando se obtiene:

$$s_\lambda = (f+e+2)(f-e-2), \quad r_\lambda = f^2 - 2f - 4e - 8, \quad D_z = 4f^3 + 16f^2 - 36ef - 27e^2 + 20f - 68e + 8.$$

$$\text{Para } f=e+2 \text{ pasan a ser } r_\lambda = (e+2)(e-4) \text{ y } D_z = (4e+9)(e-4)^2.$$

$$\text{Y cuando } f=-e-2 \text{ son } r_\lambda = e(e+2) \text{ y } D_z = -(4e-1)e^2.$$

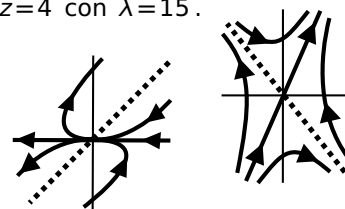
Los únicos valores para los que no basta $[H_2]$ parecen ser $e=4, f=6$ y $e=0, f=-2$.

En efecto, en el primero caso son $z=-1$ doble con $\lambda=0$ y $z=4$ con $\lambda=15$.

Y en el segundo: $z=1$ doble con $\lambda=0$ y $z=0$ con $\lambda=-1$.

Factorizando sus $[H_2]$ se ven sus rectas de puntos críticos y se dibujan fácilmente sus mapas:

$$\begin{cases} x' = (y+x)(y-x) \\ y' = 2(y+x)(y+2x) \end{cases} \quad \begin{cases} x' = (y+x)(y-x) \\ y' = 2y(y-x) \end{cases}$$



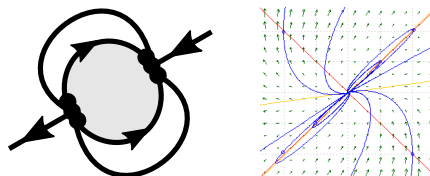
Los problemas para otros valores de e y f hallados son sólo aparentes:

Si $e=-2, f=0$ hay $\lambda=0$ doble, pero están asociados a distintos $z=\pm 1$.

Si $e=\frac{1}{4}, f=-\frac{9}{4}$ hay $\lambda=0$ y $z_d=-\frac{1}{2}$ no asociados entre sí. [Y análogo si $e=-\frac{9}{4}, f=\frac{1}{4}$].

¿Existirá algún z triple? Debe ser $R=7+3f=0, f=-\frac{7}{3}$

y también será $D_z=0 \rightarrow e=\frac{8}{27}$. Para esos valores se encuentra un $z=\frac{2}{3}$ triple asociado a $\lambda=-\frac{5}{9}$.



El esquema y dibujo de pplane son los de la derecha:

$$\text{Comparemos de nuevo con } n=1, [H_1] \begin{cases} x' = ax+by \\ y' = ex+fy \end{cases}, [z\lambda] \begin{cases} a+bz=\lambda \\ e+fz=\lambda z \end{cases} \rightarrow P_2(z) = bz^2 + (a-f)z - e. \\ Q_2(\lambda) = \lambda^2 - (a+f)\lambda + af - be.$$

Ahora ambos discriminantes coinciden: $D_z = D_\lambda = (a-f)^2 + 4be$, y es $s_\lambda = af - be$.

Hay $\lambda=0$ si se anula el determinante de los coeficientes del sistema.

Hay λ doble si $D_\lambda = 0$ y en ese caso, si $b \neq 0$, es el $z_d = \frac{f-a}{2b}$ con $\lambda_d = \frac{a+f}{2}$ (nodo si $a+f \neq 0$).

Pero vamos a dedicar más espacio en esta sección a los **polinomios de cuarto grado**. En particular a aquellos con sus cuatro raíces complejas. Nuestra notación será:

$$P_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s, \quad m \neq 0.$$

Antes de avanzar hacia el problema general repasamos un par de casos sencillos.

Las raíces del famoso polinomio bicuadrado $P_4(z) = mz^4 + qz^2 + s$ se hallan con $Y = z^2$.

Ej 4. $P(z) = z^4 - 2z^2 - 15 \xrightarrow{Y=z^2} Y^2 - 2Y - 15 = 0, Y = 1 \pm \sqrt{1+15} = 5, -3, z = \pm\sqrt{5}, \pm i\sqrt{3}.$

Las raíces de $P_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + pz + m$ se pueden calcular mediante el cambio $Y = z + \frac{1}{z}$:

$$m\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + p\left(z + \frac{1}{z}\right) + q = m\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + p\left(z + \frac{1}{z}\right) + q - 2m = 0 \rightarrow mY^2 + pY + q - 2m = 0.$$

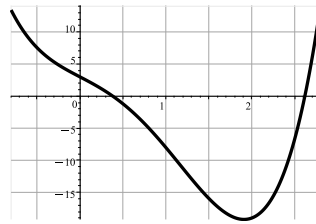
Halladas sus raíces Y_{\pm} , bastará resolver los dos polinomios de segundo grado: $z^2 - Y_{\pm}z + 1 = 0$.

Ej 5. $P(x) = 3x^4 - 7x^3 - 7x + 3 = 0 \xrightarrow{Y=x+\frac{1}{x}} 3Y^2 - 7Y - 6 = 0$

$$\rightarrow Y_{\pm} = 3, -\frac{2}{3}, z^2 - Y_{\pm}z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{1}{2}\left[Y_{\pm} \pm \sqrt{Y_{\pm}^2 - 4}\right].$$

$$Y_+ \text{ da dos raíces reales: } \frac{1}{2}[3 + \sqrt{5}] \text{ y } \frac{1}{2}[3 - \sqrt{5}],$$

$$\text{e } Y_- \text{ devuelve sus dos complejas: } \frac{1}{3}[-1 \pm 2\sqrt{2}i].$$



Para el caso general empezamos simplificando el **discriminante** D_4 de P_4 que se calcularía así:

$$\begin{cases} mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = 0 \\ 4mz^3 + 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases}, \begin{cases} pz^3 + 2qz^2 + 3rz + 4s = 0 \\ 4mz^3 + 3pz^2 + 2qz + r = 0 \end{cases}, D_4 = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 4m & 3p & 2q & r & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 3p & 2q & r & 0 \\ 0 & 0 & 4m & 3s & 2q & r \\ p & 2q & 3r & 4s & 0 & 0 \\ 0 & p & 2q & 3r & 4s & 0 \\ 0 & 0 & p & 2q & 3r & 4s \end{vmatrix}.$$

Llamando $L \equiv 4ms, K \equiv pr, N \equiv mr^2 + p^2s$, se comprueba que $D_4 = 4Lq^4 - 4Nq^3 + (K^2 - 20LK - 8L^2)q^2 + 18(2L+K)Nq - 27N^2 + 4(L-K)^3$.

Podemos también dar expresiones más cortas en términos de objetos más sencillos. Por ejemplo, si

Si $R \equiv q^2 + 12ms - 3pr = q^2 + 3(L-K)$,
 $S \equiv 2q^3 - 72msq - 9prq + 27(mr^2 + sp^2) = 2q^3 - 9(2L+K)q + 27N$,
 el discriminante adopta esta forma compacta: $D_4 = \frac{1}{27}[4R^3 - S^2]$.

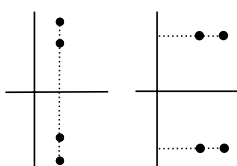
Discutamos el número de raíces reales y complejas de P_4 . Si $D_4 \neq 0$ (si no las hay múltiples) no es complicada la clasificación. Con el método de Sturm (que relaciona el número de raíces en un intervalo con el número de cambios de signo en sus extremos de una secuencia de polinomios, construida de forma similar al algoritmo de Euclides) se llega a:

Si $U \equiv 8mq - 3p^2, V \equiv 4mq^3 - p^2q^2 - 2mq(7pr + 8ms) + 6p^2ms + 3p^3r + 18m^2r^2 = \frac{1}{3}[UR + 2mS]$,

entonces $\begin{cases} \text{si } D_4 > 0 \text{ y } V, U < 0 \text{ tiene 4 raíces reales distintas el } P_4, \\ \text{si } D_4 < 0 \text{ posee 2 raíces reales distintas y 2 complejas} \\ \text{y si } D_4 > 0 \text{ y } V \geq 0 \text{ ó } U \geq 0 \text{ hay 4 raíces complejas distintas.} \end{cases}$

Del resto de los casos (con raíces múltiples) sólo citamos el resultado que más nos interesa precisar para los cálculos sobre centros y focos:

P_4 tiene raíces dobles complejas si $R \neq 0, U > 0$ y $D_4 = V = 0 \Leftrightarrow 0 = V = W$, siendo $W \equiv 4mpq - p^3 - 8m^2r$.



[En caso de ser las cuatro raíces complejas conjugadas, se prueba (ya en la próxima página) que cuando es $W = 0$ son iguales o bien sus partes reales o bien sus partes imaginarias].

[Las raíces dobles son siempre calculables y se llega a la fórmula:

$$z_d = \frac{1}{4m}(-p \pm \sqrt{-U}), \text{ válida incluso si } U \leq 0 \text{ y son reales].$$

Queremos calcular las raíces intentando escribir P_4 como producto de dos polinomios de grado dos:

$$P_4(z) = mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s = m[z^2 + Az + C][z^2 + Bz + D].$$

Se tiene entonces que: $p = m(A+B)$, $q = m(C+D+AB)$, $r = m(AD+BC)$, $s = mCD$.

Si dispusiéramos de AB o bien de $Z=C+D$, para calcular C, D o A, B bastaría resolver un polinomio de segundo grado. Y no es difícil dar una ecuación de tercer grado para hallar cada una.

Pero se usará la más simple $Q(Y) \equiv Y^3 - 3RY - S = 0$ que se comprueba para $Y = m[2(C+D) - AB]$.

Si hemos calculado la Y se obtienen, por ejemplo, A y B simplemente resolviendo el sistema:

$$A+B = \frac{p}{m}, AB = \frac{2q-Y}{3m}, \text{ cuyas soluciones son } A, B = \frac{1}{6m}[3p \pm \sqrt{12mY - 3U}].$$

Y para encontrar C y D será mejor usar ya los valores de q y r de arriba en función de A y B .

[Como P_4 tiene raíces múltiples si las tiene Q sus discriminantes deben reflejarlo. Es $D_Q = 27^2 D_4$].

[La prueba de la geometría de $W=0$: $4mpq - p^3 - 8m^2r = m^3[A-B][(4C-A^2) - (4D-B^2)]$].

Si $D_Q > 0$, hay 3 valores reales de Y por los tres modos distintos en que se pueden agrupar las 4 raíces de P_4 . Si son reales no importa la elección, pero con 4 complejas sólo una Y da factorización real. Se verá en la próxima página que se debe elegir para ello la Y_1 mayor.

(Llamaremos $Y_1 \geq Y_2 \geq Y_3$ y es claro que se tiene $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0$, $Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 = -3R$).

Factoricemos nuestros primeros polinomios siguiendo estos caminos. Para hacerlo exactamente debe ser el Q de tercer orden resoluble, pero hemos reducido bastante el problema.

Ej 6. Sea $P_4(z) = z^4 + 12z^2 - 64z + 132$. Vamos hallando $U = 96 = 2^5 \times 3$, $R = 1728 = 2^6 \times 3^3$, $S = 0$.

A partir de ellos o desde sus definiciones: $V = 55296 = 2^{11} \times 3^3$, $D_4 = 764411904 = 2^{20} \times 3^6$.

Por tanto posee 4 complejas. Y debía tener 3 raíces reales el Q cúbico aquí muy sencillo:

$$Q(Y) = Y^3 - 5184Y, Y = 72, 0, -72. \text{ Luego } A, B = \frac{1}{6}[\pm \sqrt{576}]. A = 4 \text{ y } B = -4. \text{ De aquí:}$$

$$\begin{matrix} C+D=16+12 \\ 4C-4D=-64 \end{matrix} \rightarrow C=6, D=22, P_4(z) = [z^2 + 4z + 22][z^2 - 4z + 6] \rightarrow z = 2 \pm \sqrt{2}i, -2 \pm 3\sqrt{2}i.$$

[Elijiendo $Y=0$ los polinomios factorizados serían complejos: $A, B = \pm 2\sqrt{2}i$].

Ej 5*. Sea ahora el $P(z) = 3z^4 - 7z^3 - 7z + 3$ de la página anterior. Es $R = -39$, $S = 7938 \Rightarrow D_4 < 0$.

Las raíces de Q son en este caso 18 (que da $A, B = \frac{2}{3}, -3$) y las dos complejas $-9 \pm 6\sqrt{10}i$.

Entonces es $C=D=1$ y la expresión $[3z^2 + 2z + 3][z^2 - 3z + 1] = 0$ da las raíces halladas.

La teoría dada de polinomios de grado 4 es, desde luego, para aplicarla al estudio de sistemas del tipo

$$[H_3] \begin{cases} x' = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \\ y' = ex^3 + fx^2y + gxy^2 + hy^3 \end{cases} \text{ con } d \neq 0 \rightarrow [z\lambda] \begin{cases} a + bz + cz^2 + dz^3 = \lambda \\ e + fz + gz^2 + hz^3 = \lambda z \end{cases}.$$

Los vectores propios de $[H_3]$ los da el polinomio: $P_4(z) = -dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e = 0$.

No vamos a escribir aquí la larga expresión de su $Q_4(\lambda)$. Como única muestra escribimos desarrollado el s_λ (la resultante para $\lambda=0$) y una forma simplificada de expresarlo.

$$s_\lambda = a^3h^3 - 2a^2h^2fc + ahf^2c^2 + ah^2fb^2 + a^2hcg^2 - a^2h^2bg - ahcfbg - a^2g^3d - h^2b^3e + 3a^2hfgd - 2ahf^2bd - af^2cgd + afbg^2d + 3ah^2cbe - 2ahc^2ge - hc^2fbe + hcb^2ge + af^3d^2 - 3a^2h^2ed + ahcfed + 2acg^2ed - ahbged + fcbged + 2hfb^2ed - b^2g^2ed + c^3he^2 - 3hcbe^2d - c^2ge^2d - 3afged^2 - f^2bed^2 + 3ahe^2d^2 + cfe^2d^2 + 2bge^2d^2 - e^3d^3.$$

Si llamamos $T = ah - de$, $I = bg - cf$, $O = ag - ce$, $M = bh - df$, $E = af - be$, $J = ch - dg$, se puede

comprobar que: $s_\lambda = T^3 - T^2I - (3T+I)EJ + M^2E + O^2J = \begin{vmatrix} T & M & J \\ O & T+I & M \\ E & O & T \end{vmatrix}$. [Es $EJ + IT = MO$].

Nuestro objetivo principal en esta sección será ir más allá de los cálculos sobre **centros y focos** de la sección anterior 4.4, avanzando en cálculo de la integral que los caracterizaba.

Queremos ahora dar el valor (o al menos el signo) de integrales racionales generales de la forma:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hz^2 + 2Gz + F}{mz^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s} dz, \text{ con el denominador } P_4 \text{ sin raíces reales. Suponemos que } m, s > 0.$$

Se llega a esta primera expresión en términos de la factorización $P_4(z) = m[z^2 + Az + C][z^2 + Bz + D]$:

$$\text{Llamando } \gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4A - C^2}, \delta = \frac{1}{2}\sqrt{4D - B^2} \text{ y } E = \gamma\delta \text{ es } I = \frac{2\pi}{m} \frac{H(C\delta + D\gamma) - G(A\delta + B\gamma) + F(\gamma + \delta)}{E[2(C+D) - AB + 4E]}.$$

[Las raíces del polinomio son $z_{1,2} = \frac{1}{2}(-A \pm i\sqrt{4C - A^2}) = \alpha \pm \gamma i$ y $z_{3,4} = \frac{1}{2}(-B \pm i\sqrt{4D - B^2}) = \beta \pm \delta i$, y en función de ellas la factorización pasa a ser $P_4(z) = m(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \gamma^2)(z^2 - 2\beta z + \beta^2 + \delta^2)$].

Queremos expresar I en términos de los coeficientes de P_4 y de las raíces del polinomio cúbico $Q(y)$. Para ello multiplicamos numerador y denominador por el número positivo $\gamma + \delta$ y observamos que:

$$\begin{aligned} 3m^2(\sqrt{4C - A^2} + \sqrt{4D - B^2})^2 &= m^2[12(C+D) + 6AB + 12E - 3(A+B)^2] = 8mq - 3p^2 - 4mY_3, \\ \frac{3}{2}m^2(A\sqrt{4D - B^2} + B\sqrt{4C - A^2})(\sqrt{4C - A^2} + \sqrt{4D - B^2}) &= m^2[6(AD + BC) - (A+B)(\frac{3AB}{2} - 6E)] = 6mr - pq - pY_3, \\ m^2(C\sqrt{4D - B^2} + D\sqrt{4C - A^2})(\sqrt{4C - A^2} + \sqrt{4D - B^2}) &= m^2[8CD - (A+B)(AD + BC) + (C+D)(AB + 4E)] \\ &= \frac{1}{9}[2(Y_3 + q)(Y_3 - 2q) + 9pr], \end{aligned}$$

pues, en términos de las raíces de P_4 , las tres de Q son las siguientes y cumplen estas igualdades:

$$\begin{aligned} Y_1 &= m[2(C+D) - AB] = 2m[(\alpha - \beta)^2 + \gamma^2 + \delta^2], \quad Y_2 = m[6\gamma\delta - (\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 - \delta^2], \\ Y_3 &= -m[6\gamma\delta + (\alpha - \beta)^2 + \gamma^2 + \delta^2] = m[\frac{1}{2}AB - (C+D) - 6E]. \\ Y_1 - Y_2 &= 3m[(\alpha - \beta)^2 + (\gamma - \delta)^2] \quad (=0 \text{ si raíces dobles}), \\ Y_1 - Y_3 &= 3m[(\alpha - \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2] = \frac{3m}{2}[2(C+D) - AB + 4E], \quad Y_2 - Y_3 = 12mE, \\ (Y_1 - Y_3)(Y_2 - Y_3) &= 3(Y_3^2 - R) \quad (\text{el denominador positivo de la } I \text{ de arriba}), \end{aligned}$$

Por tanto, una fórmula del tipo que deseábamos puede ser:

$$\text{Si } N_2(Y) \equiv H[2(Y+q)(Y-2q) + 9K] - 6G[6mr - pq - pY] + 3F[U - 4mY] \text{ será } I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{N_2(Y_3)}{[Y_3^2 - R]\sqrt{U - 4mY_3}}.$$

[Recordamos que $K = pr$, $U = 8mq - 3p^2$, $R = q^2 - 3K + 12ms$ y que Y_3 es la menor raíz de Q].

El signo de I lo da $N_2(Y_3)$ (y la estabilidad del foco degenerado si estamos con ello). Será un **centro si se anula**. Deducimos una **condición necesaria** para ello sólo en términos de los parámetros de la integral (de los coeficientes del sistema). Como Y_3 debe anular N_2 y Q será 0 la **resultante** en Y de ambos polinomios. Hallándola y factorizándola con ordenador aparece como producto de la W ligada a las z_d dobles (y con I calculable si es $W=0$, por ser factorizable Q) y de nuestra I_0 :

$$\text{Si } W \neq 0, I = 0 \Rightarrow I_0 \equiv 4(mF^2 - sH^2)[(K + 2L)G - 2q^2G + (rH + pF)q - 2(mrF + psH)] + 16(mrF - psH)qG^2 - 4(mr^2 - p^2s)(3HF + 2G^2)G + (rH - pF)[4(K + 2L)G^2 - 2(rH + pF)qG + (rH + pF)^2].$$

[Que sea $I_0 = 0$ no implica, desde luego, que $I = 0$, pues N_2 puede ser anulado por otras raíces de Q . Era esperable la simetría con que se presentan en I_0 las parejas de constantes $m - s$, $r - p$ y $H - F$].

Recordemos que, en caso de venir I de un sistema $[H_3]$ con $de < 0$ y sin λ reales, la integral era:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c+3h)z^2 + 2(b+g)z + (3a+f)}{-dz^4 + (h-c)z^3 + (g-b)z^2 + (f-a)z + e} dz. \text{ Sustituyendo esas constantes (y sin el 8 común) se tiene:}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= 4(b+g)[(3a+f)^2d + (c+3h)^2e]ed - (ac+cf+fh-3ah)[2(c+3h)(3a+f) + 8(b+g)^2]ed \\ &+ (a-f)(3a+f)^3d^2 - (c-h)(c+3h)^3e^2 + 4(b+g)(ab+fb-2ag)^2d + 4(b+g)(cg+hg-2hb)^2e \\ &+ 2(3a+f)[2(cf+2hf-3ah)(ag+fg-2ab) - (a-f)(3a+f)(c+3h)(b-g)]d \\ &+ 2(c+3h)[2(cf+2ac-3ah)(cb+hb-2hg) - (c-h)(c+3h)(3a+f)(b-g)]e \\ &+ (ac+cf+fh-3ah)[4(ac-fh)^2 - (b+g)[(b-g)(ac+cf+fh-3ah) - 2(a-f)(cg+hg-2hb)]]. \end{aligned}$$

[Si $[H_3]$ es exacto ($3a+f=b+g=c+3h=0$) o simétrico ($a=c=f=h=0$) se anula I_0 como debía].

El N_2 en términos de los coeficientes, una vez quitado el 2 común es:

$$N_0 = (c+3h)Y^2 + 2[3d(3a+f) - cb - 2cg + 3hb]Y + 6d(fg + 3ab + 5bf - 9ag) - 9(c-h)(ca + cf + hf - 3ah) + (b-g)(cb + 3hg + 5cg - 9hb).$$

Los primeros ejemplos que vemos son de los que ya hablamos en la sección anterior:

Ej 7. $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 \\ y' = s^2x^3 + 2x^2y + 2sxy^2 - y^3 \end{cases}$ Era $P_4(z) = [z^2 + s]^2$ y vimos que su origen era: foco I si $0 < s < 2$, centro si $s = 2$ y foco E si $s > 2$.

Resulta ser $I_0 = 0$ (sin ser centro para todo s) y $N_2(Y) = -8(Y - 4s)(Y + 2s + 12)$.

Se puede factorizar $Q(Y) = (Y - 4s)^2(Y + 8s)$. Si $s > 0$ es $Y_3 = -8s$. $N_2(Y_3) = -s(s - 2)^\dagger$.

Ej 8. $\begin{cases} x' = -x^2y - 3xy^2 - 2y^3 = -y(x + y)(x + 2y) \\ y' = sx^3 + 4x^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases}$ $P_4(z) = 2z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + s$. En 4.4 hallamos su centro si $s = 4$ y anunciamos que lo sería $\forall s > 7/8$.

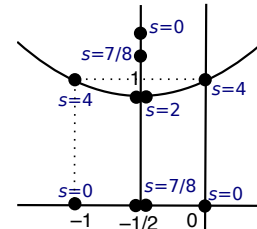
Para él son: $U = 48$, $R = 12(2s - 1)$, $S = 432(1 - s)$, $V = 192(2 - s)$, $D_4 = 256(s - 2)^2(8s - 7)$.

Y además: $W = 0$, $I_0 = 0$, $N_2 \equiv 0$, $Q(Y) = [Y - 6][Y^2 + 6Y + 72(1 - s)]$.

Hay pues dos raíces complejas y dos reales, dos complejas y una real doble o cuatro complejas si, respectivamente, es $s <, =, > 7/8$, siendo compleja doble si $s = 2$. Como en el tercer caso es $N_2 \equiv 0$ el origen es centro. [Las partes reales o las imaginarias son iguales como debían].

Si $s \leq 2$ es $Y_1 = 6$ y sabemos escribir su factorización:

$$P_4(z) = 2[z^2 + z + 1 + \sqrt{1 - s/2}][z^2 + z + 1 - \sqrt{1 - s/2}].$$

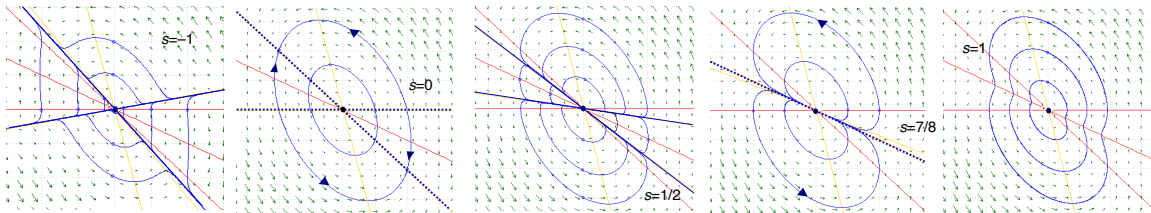


Discutir los casos con $s \leq 7/8$ nos lleva a la sección 4.3. Para $s < 0$ y $0 < s < 7/8$ hay dos órbitas rectas, que orientadas con sus 'autovalores' y viendo el signo de Δ dan lugar a 4 sectores hiperbólicos y a 4 elípticos.

Si $s = 0$ son rectas de puntos críticos $y = 0, -x$. Dividiendo por el factor común a f y g queda el centro de $x' = -x - 2y$, $y' = 4x + y$. El mapa de fases es el suyo, con las rectas de puntos y el cambio de sentidos.

Si $s = 7/8$ es factor repetido $(x + 2y)$. Analizando $x' = -xy - y^2$, $y' = (7x^2 + 18xy + 4y^2)/8$ se tiene su dibujo.

[Si se hubiera calculado el $s_\lambda = s^2(8s - 7)$ ya se habría sabido cuándo aparecían los autovalores 0].



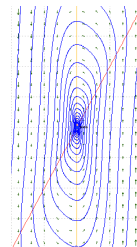
Ej 6*. $\begin{cases} x' = 8x^3 - y^3 \\ y' = 132x^3 - 56x^2y + 12xy^2 \end{cases}$ En el ejemplo 6 vimos que era $P_4(z) = [z^2 + 4z + 22][z^2 - 4z + 6]$ y que su $Q(Y) = Y(Y - 72)(Y + 72)$.

El hecho ser $I_0 = 2621440$ nos asegura ya que es un foco. Para ver su carácter basta sustituir la $Y_3 = -72$ en su $N_2(Y) = 384(Y + 48)$. Es, pues, foco estable.

Hemos avanzado mucho desde que necesitábamos ver el signo de la I inicial:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{24 - 32z}{z^4 + 12z^2 - 64z + 132} dz = \frac{1}{18} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{11z + 94}{z^2 + 4z + 22} - \frac{11z + 6}{z^2 - 4z + 6} \right] dz = \dots = -\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$$

(valor que nos devuelve, desde luego, la fórmula con N_2 de la página anterior).

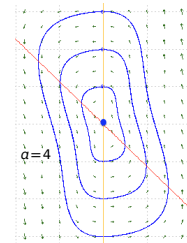


Un nuevo ejemplo con P_4 perteneciente a otra familia de casos factorizables (si $mr^2 = p^2s$, entre ellos están los bicuadrados y simétricos; si $p \neq 0$ una raíz de Q es $Y = \frac{6mr}{p} - q$).

Ej 9. $\begin{cases} x' = (a - 8)x^3 + 2xy^2 - y^3 \\ y' = 16x^3 + ax^2y + 2xy^2 \end{cases}$ $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 8z + 16$ y es $U, V, D_4 > 0$. $Q(Y) = 0$ si $Y = 28, -2, -26$, $I_0 = 0$ si $a = 4, 7, 12$.

Para $Y = -26$ resulta ser $N_2 = 1296(a - 4)$. Si $a = 4$ es centro (el del dibujo).

Es foco E, I si $a <, > 4$. Factorizando: $[z^2 + 2z + 2][z^2 - 4z + 8]$, $z = -1 \pm i$, $z = 2 \pm 2i$.



Último ejemplo (sin valores exactos).

Ej 10. $\begin{cases} x' = ax^3 + xy^2 - y^3 \\ y' = 2x^3 + ax^2y - xy^2 \end{cases}$ $P_4(z) = z^4 - z^3 - z^2 + 2$. $U = -11$, $V = 39$, $D_4 = 892$. $Q(Y) = Y^3 - 75Y - 196$, $I_0 = 32(10a^3 + 19a^2 + 4a + 1)$.

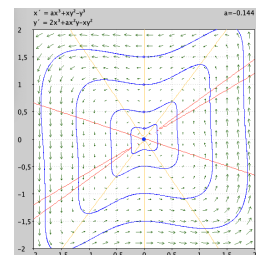
Hay centro o foco para todo a , y sólo puede ser centro para los ceros de I_0 .

Numéricamente se ve que $I_0 = 0$ si $a_{123} \approx -0.14401547, 0.43028993, 1.61372554$.

La Y_3 de Q es -6.793205564 (calculable con $10 \cos[(\arccos \frac{98}{125} + 2\pi)/3]$).

Sólo se anula $N_2(Y) = (Y - 1)(Y + 5) - 6a(4Y + 11)$ para Y_3 si $a = a_1$.

[Ese sería el valor para el que $\int_{-\infty}^{\infty} (z^2 - 2z)/P_4 = -a \int_{-\infty}^{\infty} 4/P_4$].



4.6 Ejemplos con ciclos límite

Por ahora sólo en el ejemplo 6 de 3.4 nos han aparecido ciclos límite: el sistema cuya r en polares cumplía la sencilla ecuación: $r' = ar - r^3$. Era $r = \sqrt{a}$ para $a \in (0, 2)$ ciclo límite (estable, como se suele llamar, por tender todas las órbitas cercanas hacia él).

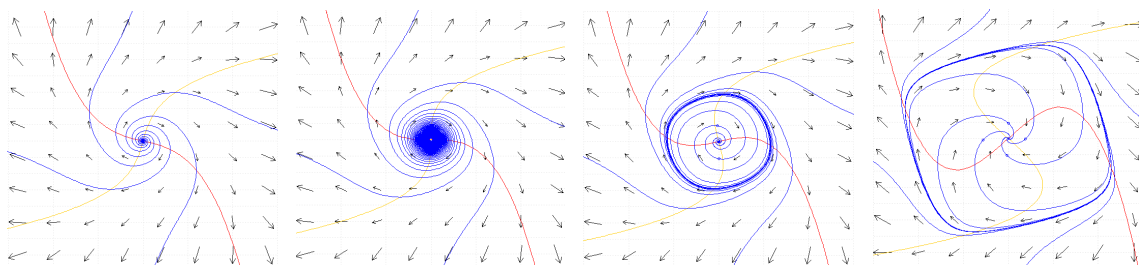
Pero en general, las polares serán más complicadas. ¿Cuándo surgirán ciclos límite? Parece que cuando haya dos tendencias opuestas, un punto crítico que empuje hacia afuera y que el infinito lo haga hacia dentro (o al revés) y sin que existan más puntos que puedan atraer las órbitas.

[Recordemos que (lo argumentamos en 4.1) en un sistema exacto no puede haber ciclos límite].

Construyamos otro ciclo límite (ahora inestable) a partir del ejemplo 5 de 3.4: $x' = y - x^3$, $y' = -x + y^3$. Los términos cúbicos inestabilizaban el centro. Si los lineales tiran hacia el origen lo conseguiremos.

Ej 1.
$$\begin{cases} x' = ax + y + x^3 \\ y' = -x + ay + y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} r' = ar + r^3(c^4 + s^4) = ar + \frac{1}{4}r^3(3 + \cos 4\theta) \\ \theta' = -1 + r^2 sc(s^2 - c^2) = -1 - \frac{1}{4}r^2 \sin 4\theta \end{cases} \quad \mathbf{M}(0,0) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = a \pm i.$$

Para $a \geq 0$ el origen será foco inestable y no pueden existir más puntos críticos (ya que es $r' > 0$). Si $a < 0$ esperamos ciclo límite. Con el pplane obtenemos estos mapas para $a = 1/4, 0, -1/4, -1$:



En ellos se observa el ciclo previsto para $a < 0$, cuya amplitud va creciendo al irse haciendo el origen cada vez más repulsor. [Cuando a es gordo y negativo surgen otros 6 puntos críticos nuevos].

[La aparición de ciclos al cruzar los λ el eje imaginario es la llamada bifurcación de Hopf].

Citemos, sin demostración, teoremas generales para el habitual [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$, $f, g \in C^1$.

El primero es coherente con los ejemplos vistos hasta ahora:

Teor1. Cualquier órbita cerrada de [S] debe encerrar, por lo menos, un punto crítico. Si sólo encierra uno, este punto no puede ser un punto silla.

El siguiente es el teorema más famoso sobre el tema (de Poincaré-Bendixon). Su resultado es previsible, pero sus hipótesis son, en general, difíciles de aplicar en la práctica.

Teor P-B. Sea D un conjunto cerrado que no contiene ningún punto crítico. Si una $\mathbf{x}(t)$ solución de [S] permanece en D para todo $t \geq t_0$ entonces o es ella misma una solución periódica o tiende en espiral hacia una órbita cerrada cuando $t \rightarrow \infty$.

[El resultado es totalmente análoga para $t \leq t_0$ y $t \rightarrow -\infty$].

Como una curva cerrada contiene un punto crítico y éste no puede estar en D , los conjuntos del teorema deberán tener algún hueco (o sea, no serán simplemente conexos).

Probemos con el teorema de P-B la existencia del ciclo límite del ejemplo 1 para el valor $a = -1$:

Nuestro conjunto D va a ser la corona $1 \leq r \leq \sqrt{2}$. Como se tiene

$$\frac{1}{2} \leq R(\theta) \equiv \frac{1}{4}(3 + \cos 4\theta) \leq 1 \Rightarrow r' = r(r^2 R(\theta) - 1) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } r=1 \\ \geq 0 & \text{si } r=\sqrt{2} \end{cases}$$

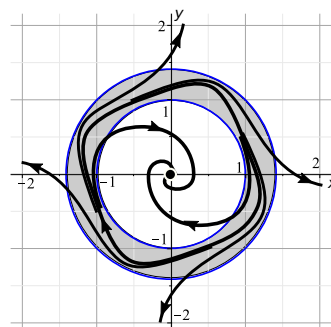
las órbitas avanzarán hacia el interior de D cuando $t \rightarrow -\infty$.

Además no hay puntos críticos en D (ni lejos), pues debería ser $3 + \cos 4\theta + \sin 4\theta = 0$. O, complicado, utilizando las cartesianas:

$$x' = 0 \rightarrow y = x - x^3 \rightarrow x(x^8 - 3x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 2) = 0,$$

y se puede demostrar que ese paréntesis siempre es positivo.

Hemos, pues, probado que existe al menos un ciclo límite en D .

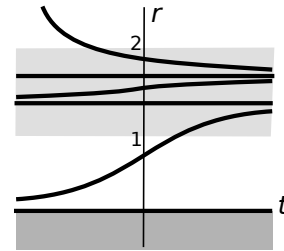


Que P-B no asegura la unicidad del ciclo lo prueba el siguiente ejemplo de sencilla expresión polar.

Ej 2. $\begin{cases} r' = r(r^2 - 2)^2(3 - r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$ [En cartesianas $\begin{cases} x' = -y + x[12 - 16(x^2 + y^2) + 7(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3] \\ y' = x + y[12 - 16(x^2 + y^2) + 7(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3] \end{cases}$].

Dibujando las soluciones de la autónoma de r' se ve que la corona $1 < r < 2$ es un conjunto D de Poincaré-Bendixon, pues la distancia al origen crece para $r=1$ y decrece para $r=2$.

Pero en D no hay un único ciclo límite, sino dos: el estable $r = \sqrt{3}$ y el semiestable $r = \sqrt{2}$ (se acercan a él en espiral las órbitas de su interior, pero las de su exterior, que vienen de él para $t \rightarrow -\infty$, se van en el infinito al otro ciclo límite estable).



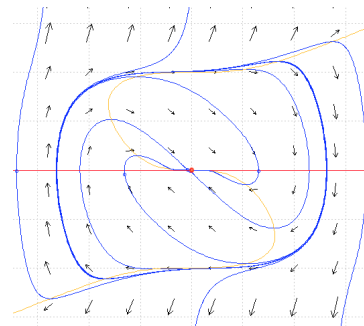
Hablamos una vez más de prolongabilidad: si $r \leq \sqrt{3}$ están definidas las soluciones $\forall t$, pero las de fuera (que se acercan al ciclo límite y están definidas para todo $t \geq 0$) han llegado desde el infinito en tiempo finito a causa del término $-r^7$ de la ecuación.

Dos últimos ciclos límite, pero rodeando puntos no elementales.

El primero se basa en el ejemplo de 3.6, vuelto a ver en 4.2, donde comprobamos que tenía un nodo estable en el origen asociado a un $\lambda = 0$. Para conseguir el ciclo, hacemos el infinito atractor sumando un término y^5 (un rozamiento positivo para velocidades grandes), que no modificará la estructura del origen.

Ej 3. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - x^3 + y^5 \end{cases}$ El pplane nos muestra el ciclo esperado (inestable), cuyos cortes aproximados con el eje x son ± 1.3 y ± 1 con el y .

En el origen sigue estando el mismo nodo de antes. No debe un ciclo límite rodear siempre a un foco



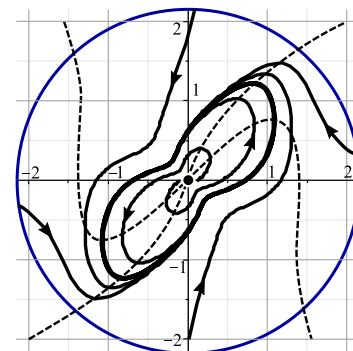
Ej 4. $\begin{cases} x' = 2x^3 - xy^2 - y^3 - x^5 \\ y' = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - y^3 - y^5 \end{cases}$ Los términos cúbicos, como vimos en el ejemplo 1 de 4.4, dan lugar a un foco inestable. Sumamos esos términos de orden 5 para hacer respulsor al infinito.

El dibujo lo hacemos esta vez a partir del que proporciona Maple. Como las curvas definidas implícitamente por $f=0$ y $g=0$ se cortan sólo en el origen, sigue siendo el único punto crítico. Y, como ya sabíamos, seguirá siendo el foco inestable de la aproximación homogénea. Las órbitas se irán de un entorno del origen (ese entorno será el hueco del conjunto D de P-B).

Faltaría comprobar que hay una región que atrapa también a las órbitas que vienen el infinito. Simplificando las polares:

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{2}r^3(1 + 3 \cos 2\theta + \sin 2\theta) - \frac{1}{8}r^5(5 + 3 \cos 4\theta) \\ \theta' = r^2 + \frac{1}{4}r^4 \sin 4\theta \end{cases}$$

Como el término en r^5 es negativo, para grandes r será $r' < 0$.



Hemos hablado de ciclos límites estables e inestables. En los estables las órbitas que parten cerca se aproximan asintóticamente a ellos. Pero esto no significa que las soluciones correspondientes lo sean. De hecho cualquier solución periódica de un sistema autónomo no puede ser asintóticamente estable: cualquier pareja de puntos sobre la órbita cerrada, periodo tras periodo, estarán a la misma distancia y esta nunca tenderá a 0. Sí son claramente inestables las soluciones asociadas a ciclos inestables o semiestables ya que las soluciones se alejan seguro si lo hacen las órbitas.

4.7 Volviendo a la estabilidad

Empecemos con **puntos críticos**. Decía el teorema de 3.2: si los autovalores de \mathbf{M} tienen $\text{Re}\lambda < 0$, \mathbf{x}_0 es asintóticamente estable. Si alguno de los λ tiene $\text{Re}\lambda > 0$, \mathbf{x}_0 es inestable. En 4.2 comprobamos que la segunda parte era cierta cuando un $\lambda = 0$. Y ahora sabemos que un punto con $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_1 < 0$ puede ser inestable (si el punto resulta ser silla o silla-nodo), o ser AE (si es un nodo), o incluso EnoA, como en un caso del siguiente ejemplo.

Ej 1. $x'' = bx - 2x' + (x')^2$. Discutamos, según b , la estabilidad de su solución $x=0$.

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = bx - 2v + v^2 \end{cases} \rightarrow \mathbf{M}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - b = 0 \rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1+b}$$

Si $b > 0$ el origen es inestable, pues hay $\lambda > 0$ (y el otro es < 0 ; es un punto silla).

Si $b < 0$, ambos autovalores tienen $\text{Re}\lambda < 0$ y $x=0$ es AE (en concreto, si $b < -1$ es un foco E, si $b = -1$ es un nodo de una tangente E y si $-1 < b < 0$ es un nodo E).

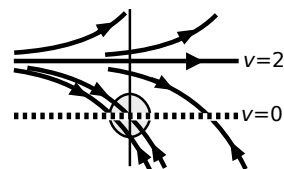
[Como ya dijimos, las raíces de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tienen $\text{Re}\lambda < 0$ si y sólo si $a, b > 0$, con lo que nos podíamos haber ahorrado hasta el cálculo de los λ].

Si $b = 0$ son $\lambda = 0, -2$ y el teorema citado no nos dice nada. Dibujemos su mapa de fases.

Para $\begin{cases} x' = v \\ v' = -2v + v^2 \end{cases}$ la recta $v=0$ está formada por puntos críticos (no elementales, claro).

Pero sus órbitas son muy sencillas: $\frac{dv}{dx} = v - 2 \rightarrow v = 2 + Ce^x$.

Con ellas, los puntos y el sentido de las ecuaciones tenemos el mapa. Se observa que el origen (y cualquiera de los otros) es EnoA: las órbitas que parten lo suficientemente cerca no se salen de un entorno, pero no tienden, salvo dos, hacia el punto.



La complicación es mucho mayor en puntos con $\lambda = 0$ doble. Hasta en los poco degenerados de 4.3. Incluso un sistema **homogéneo** puede tener cualquier tipo de estabilidad. En uno de $n = 2$, un 'autovalor' real no nulo da inestabilidad (la recta asociada se recorre en el mismo sentido a cada lado del origen). Si $n = 3$ un ' λ ' positivo lo hace I. Sabemos sólo que es AE si hay ' λ ' reales y todos son < 0 . Parece muy difícil precisarlo usando su largo $Q_4(\lambda)$. Si no hay λ reales, hemos visto lo complejo que es distinguir entre centros y focos. Y si hay $\lambda = 0$ influyen los términos de mayor orden y tenemos pocas formas de analizarlos.

Como sabemos, si $n > 1$ (a diferencia de las ecuaciones de primer orden) el hecho de que las soluciones que partan cerca del punto estén definidas $\forall t$ y que tiendan hacia él no implica que el punto sea AE. O sea, que existen puntos que son atractores pero que son inestables. De hecho el ejemplo 1 de 4.3 (allí precisamos su estructura local) lo es:

Ej 2. $\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$ Probemos que todas sus soluciones $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ si $t \rightarrow \infty$ con un dibujo global de sus órbitas. \mathbf{v} es vertical si $x=0$ (órbita), si $y=0$ o si $y=2x$ (y llevando esto a $g=0$ vemos que no hay más puntos críticos).

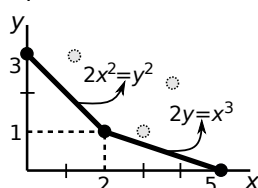
Además \mathbf{v} es horizontal sobre la curva $g(x,y) = 2x^2y - y^3 - x^5 = 0$, que pasa por $(0,0)$ y es simétrica respecto a él. Y pasa por $\pm(1,1)$.

Tiene pendiente vertical y horizontal, respectivamente, si

$$g_y = x(4y - 5x^3) = 0, \quad y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}x \rightarrow \pm \left(\frac{2}{3}6^{1/4}, \frac{2}{9}6^{3/4}\right) \approx \pm(1.04, 0.85).$$

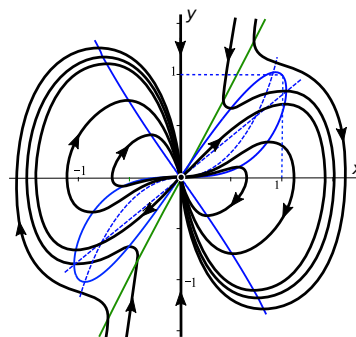
$$g_x = 2x^2 - 3y^2 = 0, \quad y = \frac{5}{4}x^3 \rightarrow \pm \left(\frac{2}{5}30^{1/4}, \frac{2}{25}30^{3/4}\right) \approx \pm(0.94, 1.03).$$

En $(0,0)$ es $g_y = g_x = 0$. El análisis local clásico de curvas de este tipo se hace usando la **polygonal de Newton** como resumimos.



Dibujamos un punto en el plano xy para cada término de la curva y una polygonal que deje al resto de términos por encima (en este caso no hay, pero unos tienes puntos los sugieren). Las ramas de la curva que pasan por $(0,0)$ las dan los términos sobre cada segmento de la polygonal:

$$2x^2y - y^3 = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{2}x + \dots, \quad 2x^2y - x^5 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^3 + \dots$$



Analizando el sentido de \mathbf{v} y probando que no hay órbitas que se van a infinito (usando polares o esperando a las técnicas de 4.9), se concluye que todas las soluciones tienden hacia el origen que es un **atractor global inestable** (es claro que órbitas cercanas al origen se alejan de él).

Pasemos a tratar ahora la aún más complicada estabilidad de **soluciones no constantes**. Insistimos en la idea de que si las órbitas de dos soluciones se alejan, las soluciones también lo hacen (y la inestabilidad 'se ve' en un mapa de fases), pero que si esas órbitas se acercan indefinidamente a otra, las soluciones pueden no hacerlo y no se deduce la estabilidad.

Por ejemplo, observando el mapa de fases, es clara la inestabilidad de la solución del ejemplo 1 con $x(0)=0, x'(0)=2$ y de la del ejemplo 2 con $x(0)=0, y(0)=1$. Estudiemos ahora tres sistemas para enfatizar la segunda afirmación, cada uno con una estabilidad diferente:

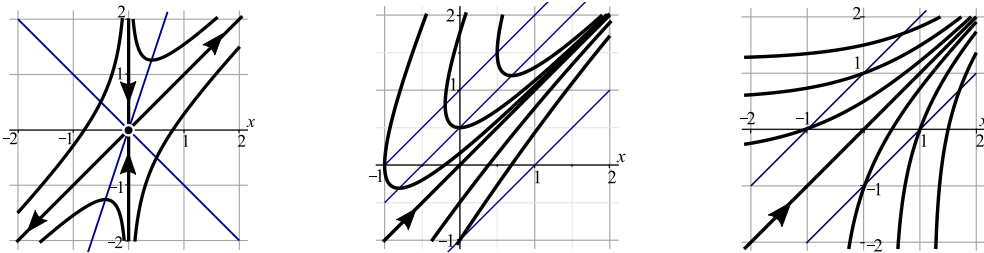
Ej 3. Dibujemos su órbitas y estudiemos la estabilidad de la solución \mathbf{x} con $x(0)=y(0)=1$ para:

$$\text{a) } \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x - y \end{cases} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}. \quad \text{b) } \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 2x - 2y + 1 \end{cases} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}. \quad \text{c) } \begin{cases} x' = e^{-x} \\ y' = e^{-y} \end{cases} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \ln(t+1) \\ \ln(t+1) \end{pmatrix}.$$

[Las soluciones salen de comprobar que $y=x$ es órbita y resolver las ecuaciones resultantes].

a) es lineal con silla en el origen. No tienen puntos críticos ni b) (lineal) ni c) (no lineal resoluble).

Los respectivos mapas de fases son fáciles de dibujar (por ejemplo, utilizando isoclinas):



La solución general en cada caso es: a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^{-t} + t \\ c_1 + c_2 2e^{-t} + t \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \ln(t+c_1) \\ \ln(t+c_2) \end{pmatrix}$.

Y en los tres las órbitas tienden a $y=x$ si $t \rightarrow \infty$. En los lineales se deduce de las soluciones y en el no lineal es consecuencia de sus calculables órbitas: $y = \ln(e^x + C)$.

Pero sabemos que todas las soluciones del lineal a) son I ($\lambda=2, -1$) y que todas las de b) son EnoA ($\lambda=0, -1$). Y a partir de las soluciones se prueba que la solución pedida para c) es AE.

Tratemos ahora la estabilidad de **soluciones periódicas**. Argumentamos en 4.5 que ninguna puede ser AE. Sabemos que todas las soluciones de un sistema lineal con $\lambda = \pm qi$ (los centros) son EnoA. Pero muchas veces en un sistema no lineal una solución periódica es I.

Ej 4. $\begin{cases} x' = y - xy \\ y' = x^2 - x \end{cases} = y(1-x) = -x(1-x)$ El origen es centro de AL y los $(1, b)$ son infinitos puntos críticos con $\lambda=0, -b$.

$$\text{Órbitas: } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \rightarrow x^2 + y^2 = C. \quad \mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x(x-1) \end{pmatrix}.$$

Observemos primero la estabilidad de sus soluciones constantes.

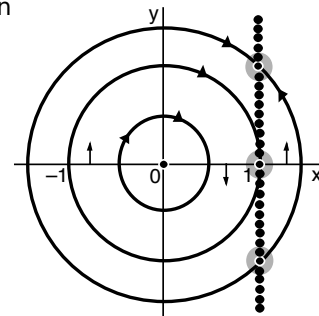
$(0, 0)$ e $(1, b), b > 0$ son EnoA. Los $(1, b), b \leq 0$ son inestables.

Es periódica cada solución asociada a una circunferencia que pase por $(a, 0), a < 1$. La órbita por $(-1, 0)$ nace y muere en $(1, 0)$ y se recorre en tiempo infinito. Su solución es I, pues no se parece a las periódicas de dentro. El periodo T_a de estas tenderá a infinito al acercarse a ella (y debe tender hacia el de la AL si $a \rightarrow 0$).

Este sistema es resoluble y da lugar a una integral calculable, con lo que podemos comprobar las afirmaciones hechas sobre los periodos:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x' = \pm(1-x)\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{dx}{dt}, \quad T_a = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{(1-x)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \rightarrow 2\pi \text{ si } a \rightarrow 0. \\ \rightarrow \infty \text{ si } a \rightarrow 1.$$

¿Son estables cada una estas soluciones periódicas no triviales? No, no lo es ninguna de ellas. Dos soluciones que partan de $(a, 0)$ y $(a^*, 0)$ con a y a^* muy próximos, por tener periodos distintos, se irán alejando progresivamente una de la otra (la de dentro corre más).



4.8 Utilizando la poligonal de Newton

Supongamos el habitual sistema analítico [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ y que el origen es punto crítico.

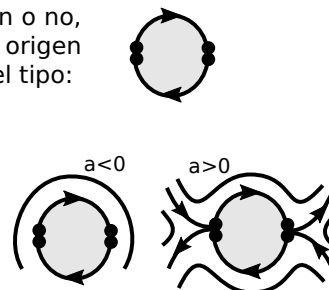
¿Como analizar de forma directa el punto cuando no es suficiente la sección 4.3? En particular, si $v=0$ es múltiple con 'autovalor' cero, como en los ejemplos del final de 4.3, discutidos a base de blow-ups.

Ej 1. $\begin{cases} x' = y - xy \\ y' = 2ax^3 \end{cases}$ Es $\Delta = -y^2$ con $\lambda = 0$. Aunque no sepamos si existen o no, busquemos variedades horizontales pasando por el origen probando en la ecuación de las órbitas soluciones del tipo:

$$y = c_s x^s + \dots \rightarrow 2ax^3 = (1-x)[c_s x^s + \dots][s c_s x^{s-1} + \dots] = s c_s^2 x^{2s-1} + \dots$$

$$\rightarrow s=2, 2a=2c_2^2, y = \pm \sqrt{a} x^2 + \dots, \text{ para } a \leq 0.$$

Yendo al sistema: $x' = \pm \sqrt{a} x^2 + \dots$ que da el esquema de la derecha para $a > 0$ (silla, pues normalmente el comportamiento es similar a cada lado de la variedad) y sugiere que si $a < 0$ no llegan variedades al origen (centro o foco, de hecho el primero, por la simetría que hay).



Pero no necesitamos utilizar series para obtener esa información. Observemos que **determinar el c_s probando** $y = c_s x^s + \dots$ **en la ecuación de las órbitas** de un sistema [S]:

$$g(x,y) - f(x,y) \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow g(x, c_s x^s + \dots) - f(x, c_s x^s + \dots) [s c_s x^{s-1} + \dots] = 0$$

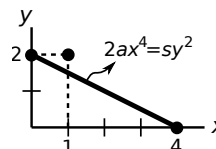
es equivalente a determinar lo probando ese desarrollo en la ecuación algebraica:

$$H_s(x,y) \equiv xg(x,y) - syf(x,y) = 0 \rightarrow g(x, c_s x^s + \dots) - s f(x, c_s x^s + \dots) [c_s x^s + \dots] = 0$$

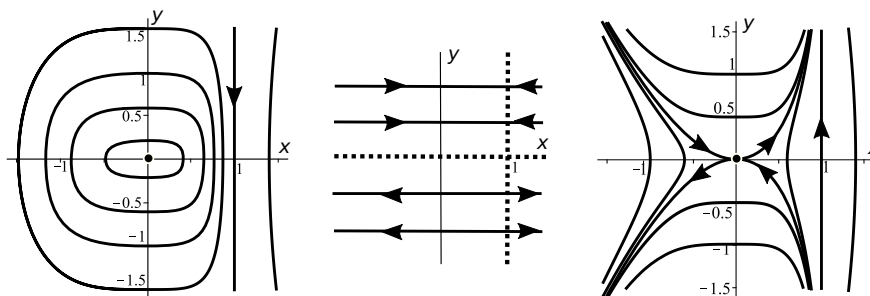
y esto es, precisamente, lo que nos aporta la **poligonal de Newton**.

En nuestro ejemplo, $2ax^4 - sy(y-xy) = 0$ da los puntos de la derecha, y el segmento devuelve las órbitas $2ax^4 = sy^2, s=2, y = \pm \sqrt{a} x^2 + \dots$.

Observemos que **el término** $-xy$ del sistema (asociado a un punto por encima de la poligonal) **no influye** nada en la estructura del origen.



Las órbitas son calculables (ecuación separable) y podríamos comprobar estas estructuras. Y aunque no fuese resoluble, un cambio $x = x, y = x^2 v$ (mejor que dos blow-ups) la confirmaría. Con algún cálculo más (o el Maple) se tienen los mapas de fases para $a = -1, a = 0$ y $a = 1$:



[Con los mismos cálculos (por dar el mismo segmento) volvemos a obtener la estructura del sencillo sistema exacto $x' = y, y' = 2ax^3$ analizado en 4.1 y 4.3, para $a = \pm 1$, por otras vías].

Ej 2. $\begin{cases} x' = 2x^2 y - xy^2 \\ y' = 2x^2 y - y^3 - x^5 \end{cases}$ Veamos que nos dice la poligonal para el atractor inestable visto en la sección anterior (y primer ejemplo de 4.3).

Llevamos $H_s = 2x^3 y - xy^3 - x^6 - s(2x^2 y^2 - xy^3)$ al diagrama xy .

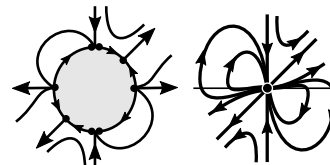
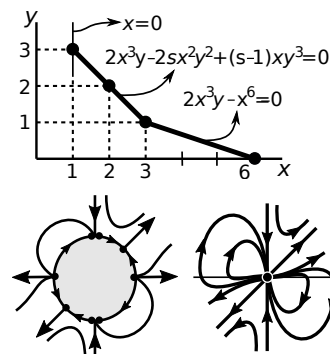
Que no hay puntos sobre el eje y nos dice que $x=0$ es órbita.

Del segmento de pendiente -1 ($s=1$): $2x^3 y - 2x^2 y^2 = 0 \rightarrow y = x$.

Notemos que **para** $s=1$ (ramas de la curva de la forma $y = Kx$) H_s **pasa a ser el $\Delta(x,y)$ de la aproximación homogénea**.

Y el otro segmento (con $s=3$) nos da: $2x^3 y - x^6 = 0, y = \frac{1}{2} x^3 + \dots$, que debimos calcular en 4.3 llevando series $y = c_2 x^2 + \dots$ a la ecuación de las órbitas y que ahora costó muy poco encontrar.

Orientando las variedades reencontramos el atractor inestable.



Pasemos a los resultados generales. Las demostraciones se pueden encontrar en mi tesis.

Sea $H_s(x,y) = xg(x,y) - syf(x,y)$ y fijémonos en el segmento k-simo de su poligonal (de pendiente $-1/s_k$ y que dará lugar a las ramas $y = m_k x^{s_k} + \dots$). Llamemos:

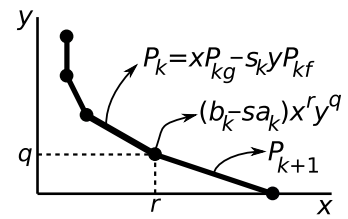
$$P_k(x,y) = xP_{kg}(x,y) - s_k P_{kf}(x,y)$$

a los términos de H_s asociados a puntos sobre el segmento, siendo P_{kg} y P_{kf} los términos que provienen de g y de f .

El punto de H_s que pertenece a dos segmentos consecutivos (de pendientes $-1/s_k$ y $-1/s_{k+1}$) será de la forma $(b_k - sa_k)x^r y^q$, siendo $b_k x^{k-1} y^q$ un término de g y $b_k x^k y^{q-1}$ de f .

Suponemos en toda la sección que P_k **no se anula idénticamente para ningún k** .

Las ramas de $H_{s_k} = 0$ de la forma $y = m_{ik} x^{s_k} + \dots, x \geq 0$ o $y = m_{jk} (-x)^{s_k} + \dots, x \leq 0$, vienen dados por las raíces de $P_k(x,y) = 0$. Este teorema asegura variedades de $[S]$ de esa forma.



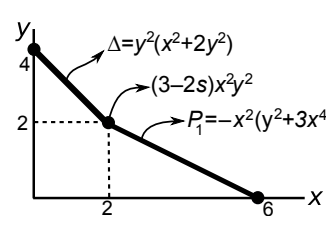
Teor1. Si $y = m_{ik} x^{s_k}, x \geq 0$, es raíz real simple de $P_k(x,y) = 0$ o múltiple con $P_{kf}(1, m_{ik}) \neq 0$ entonces existe una variedad de $[S]$ de la forma $y = m_{ik} x^{s_k} + \dots, x \geq 0$. Análogo resultado se tiene para $y = m_{jk} (-x)^{s_k} + \dots, x \leq 0$.

Como dijimos, para $s_k = 1$ el P_k resulta ser el conocido $\Delta = xB - yA$ y las variedades (válidas para $x \geq 0$ y $x \leq 0$) son las rectas del teorema de 4.3. Los $P_k(1, m_{ik})$ ocupan el papel de los λ de allá. Notemos también que el 'segmento' de Δ puede reducirse a un punto.

La demostración es similar a la de aquel teorema haciendo blow-ups del tipo $y = x^{s_k} v$ o bien, si $s_k = \omega/\beta$, haciendo $x^\beta = u, y = u^\omega v$, ya que aparecen puntos con a lo más un autovalor cero.

Pero aquí surgen complicaciones que no se daban en el caso homogéneo: puede haber variedades llegando al origen que no son del tipo de las del teorema anterior, no es tan fácil ver lo que ocurre entre dos variedades consecutivas,... Consideremos este ejemplo:

Ej 3. $\begin{cases} x' = 2x^2 y - 2y^3 \\ y' = 3xy^2 - 3x^5 \end{cases}$

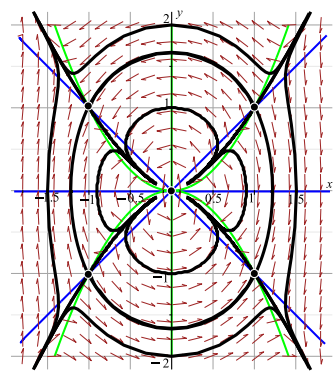


Δ da $y=0$ doble con $\lambda=0$ y el teorema 1 no da variedades cuadráticas por ser complejas las soluciones de $y^2 + 3x^4$.

Si no llegan órbitas al origen, sería un centro (sistema con simetrías).

Pero son variedades exactas $y = \pm (\pm x)^{3/2}$, que llevan a 4 sectores elípticos.

La existencia de variedades la dará la circunferencia ampliada y orientada con el signo del P_1 .



Un sistema con el mismo Δ y similar $P_1 = x^2(y^2 + 3x^4)$ que sí presenta un centro, como se puede comprobar, es $x' = -2y^3, y' = xy^2 + 3x^5$. Aquí no hay cambios de sentido.

El teorema 2 generaliza el teorema 2 de 4.3 y precisa la estructura del origen también en gran parte de los casos con $y=0$ o $x=0$ múltiples y con $\lambda=0$ y sin necesidad de hacer ningún blow-up:

Teor2. Suponemos que $P_k \neq 0 \forall k$ y que todas las raíces reales $y = m_{ik} x^{s_k}, y = m_{jk} (-x)^{s_k}$ de cada $P_k(x,y) = 0$, con $m_{ik}, m_{jk} \neq 0$, son simples o múltiples con $P_{kf} \neq 0$. Entonces la estructura local del $\mathbf{0}$ queda determinada por los signos de los P_k y el flujo sobre cada variedad [dado por $x' = P_{kf}(x, m_{ik} x^{s_k})$ o $x' = P_{kf}(x, m_{jk} (-x)^{s_k})$, o calculando más términos de su desarrollo en el caso de que se anule P_{kf}].

[Se puede refinar el teorema y no se precisa el signo de cada P_k para dar el flujo entre variedades: basta el signo de Δ y ver si el valor de los b_k/a_k de los puntos que dan vértices de la poligonal está o no comprendido entre los s_k contiguos (en el ejemplo 3 era $1 < 3/2 < 2$). Si no es así (por ejemplo si $a_k = 0$ o $b_k = 0$) se hereda el sentido de Δ , y si ocurre hay variedades $y = cx^{b/a} + \dots$

Esto se ve en la larga prueba, que va analizando los sistemas obtenidos haciendo los blow-ups horizontales o verticales necesarios que acaban en puntos 'poco degenerados' de los de 4.3].

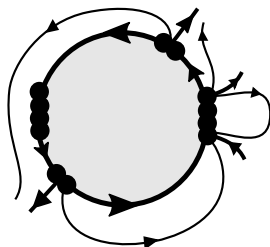
El teorema sigue dejando casos sin analizar y que exigirían en principio hacer explícitamente blow-ups, método clásico para analizar estos puntos degenerados (algunas ideas de cómo proceder se dan en la tesis): si algún $P_k \equiv 0$ (en particular si es $\Delta \equiv 0$), si hay P_k múltiples con $P_{kf} = 0$ o cómo distinguir centros de focos en caso de que la poligonal informe de que ninguna variedad real llega al origen (como vimos no basta para ello que ningún P_k tenga raíces reales).

Pero hagamos varios ejemplos que muestren la utilidad de los teoremas de la página anterior. El primero presenta varias situaciones descritas en el teorema 1 (y ninguna variedad ligada a ángulos).

Ej 4.
$$\begin{cases} x' = 2xy^4 - y^5 + 3x^5y \\ y' = xy^4 - x^{10} \end{cases}$$

Además del origen no elemental tiene un par de sillas: una en $(1, -1)$ y otra aproximadamente en $(2.03, 4.93)$. Se dibuja para el $(0, 0)$ otra vez la poligonal asociada:

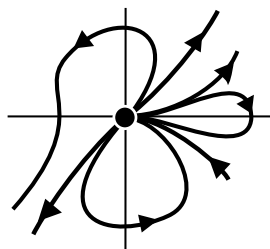
Y una vez más dibujamos la circunferencia orientada con Δ en la que iremos plasmando las variedades que encontremos.



Existe variedad del tipo $y=x+\dots$ pues, a pesar de ser doble, su λ es no nulo, es decir, para ella es $x'=x^5+\dots$

(esto lo sabíamos desde 4.3).

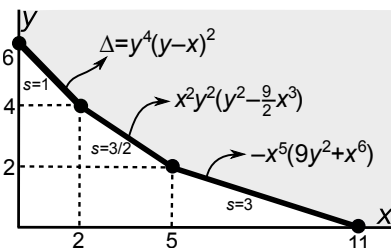
El segundo segmento de la poligonal da las variedades simples $y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}x^{3/2}+\dots$ y el flujo sobre ellas lo obtenemos llevándolas a la primera ecuación del sistema: $x'=\pm\frac{9}{\sqrt{2}}x^{13/2}+\dots$



Que no existen variedades $y=cx^3+\dots$ lo da el tercer segmento y, viendo el signo de los dos P_k (o teniendo en cuenta los comentarios tras el teorema) comprobamos que no hay otro tipo de variedades y que el sector entre las dos simples de orden $3/2$ es elíptico y no hiperbólico. Tenemos, por tanto, que la estructura del origen es la esquematizada a la izquierda.

Comprobar numéricamente esta estructura no es sencillo cerca del origen, por la presencia de potencias altas que retrasan el avance de las órbitas.

El dibujo de abajo del Phase Plane incluye la silla de $(1, -1)$ con $\lambda=2, -19$.

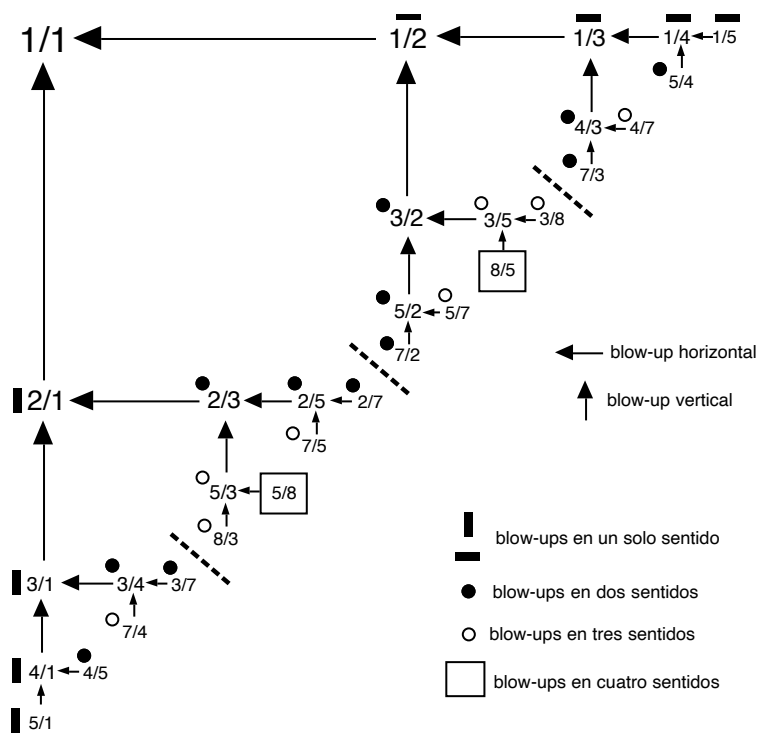
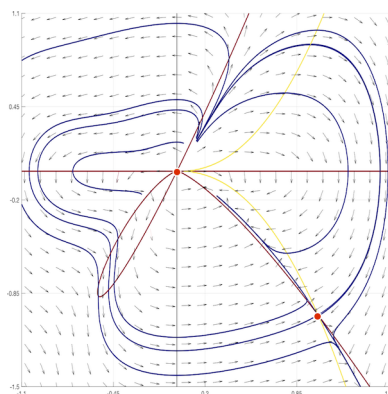


Precisar la estructura del origen mediante blow-ups es un trabajo largo. Para llevar el segmento inicial de pendiente $-2/3$ (de potencias $3/2$) a uno de pendiente -1 al que se puedan aplicar las técnicas de 4.3 hay que hacer el habitual vertical $x = xv$, $y = xv$ y luego otro horizontal $x = uv$, $v = v$ para descomponer el origen en puntos simples. Si lo hacemos (y simplificamos las potencias habituales) se llega a:

$$\begin{cases} u' = u(6u - v + 4v^2 - 2v^3 + u^5v^2) \\ v' = v(v - 3u - 2v^2 + v^3 - u^5v^2) \end{cases} \rightarrow \Delta = uv(2v - 9u)$$

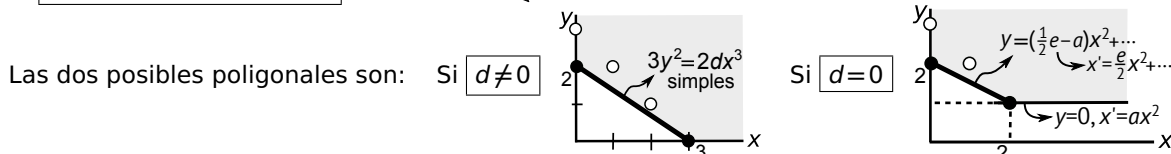
Sus variedades $v = \frac{2}{9}u + \dots$ devuelven nuestras $y^2 = \frac{2}{9}x^3 + \dots$

Esquematizamos ahora los blow-ups elementales necesarios para las potencias que exigen un número de ellos ≤ 4 :



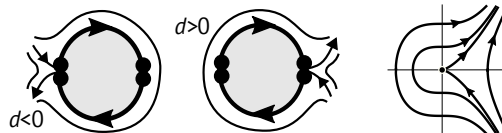
Clasifiquemos ahora el origen de los sistemas cuadráticos, caso de que sea punto crítico aislado con aproximación lineal no nula, pero con ambos autovalores 0. Supuestos en forma canónica serán:

Ej 5. $\begin{cases} x' = y + ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = dx^2 + exy + fy^2 \end{cases} \rightarrow \Delta = -y^2$  $H_s = dx^3 + (e-sa)x^2y + (f-sb)xy^2 - scy^3 - sy^2$.



En el caso $d \neq 0$ la discusión es muy sencilla.

Aparecen 'ángulos' a la izquierda o la derecha (como el del ejemplo 2 c) de 4.1), orientadas sus variedades con $x' = \pm \sqrt{|x|}^{3/2} + \dots$

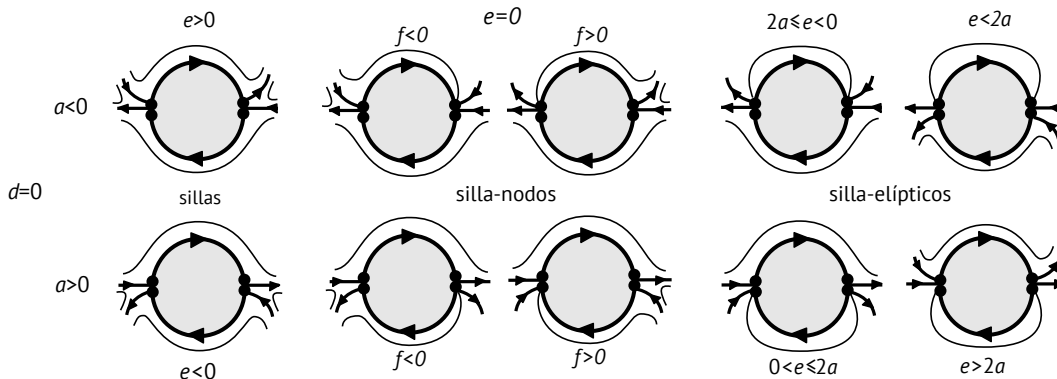


Para $d=0$ observemos primero que debe ser $a \neq 0$, pues si no sería $y=0$ recta de puntos críticos. Hay dos variedades simples salvo si $e=2a$ y el flujo sobre ambas queda determinado si $e \neq 0$. Si $e=2a$ pasa a ser doble $y=0$, pero está asociada a $x' = ax^2 + \dots$ (es $P_f \neq 0$).

Si $e=0$ se necesita un término más de la variedad para orientarla. Llevamos $y = -ax^2 + c_3x^3 + \dots$ a la ecuación de las órbitas (ya considerando $d=e=0$): $(y+ax^2+bxxy+cy^2) \frac{dy}{dx} = fy^2 \rightarrow$

$$[c_3x^3 + \dots - bax^3 + \dots][-2ax + \dots] = f[a^2x^4 + \dots], \quad c_3 = ab - \frac{1}{2}af \rightarrow x' = -\frac{1}{2}afx^3 + \dots$$

que ya determina el flujo (si $d=e=f=0$ el origen no sería aislado). Con todo lo anterior se tiene:



A la derecha los mapas de

$$\begin{cases} x' = y + x^2 \\ y' = exy + 2y^2 \end{cases}$$

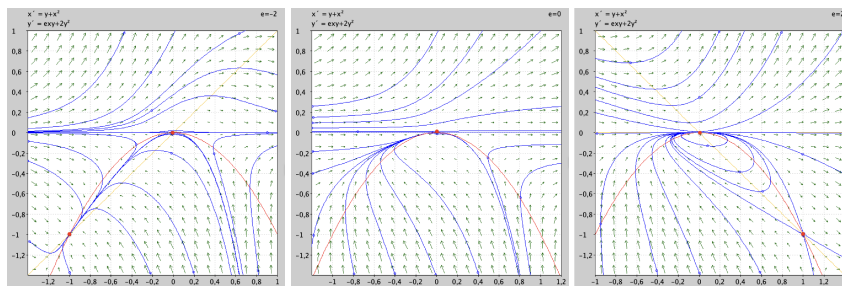
para $e=-2$, $e=0$ y $e=2$.

La variedad para $e=0$ es

$$y = -x^2 - x^3 + \dots,$$

y las órbitas si $e=2$ son:

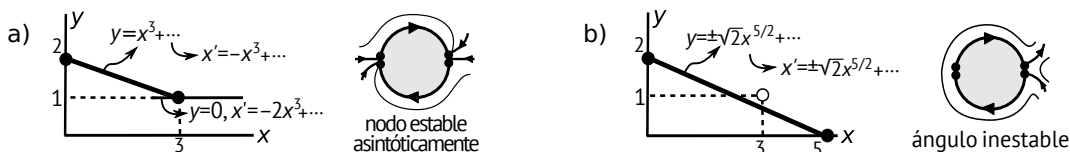
$$\frac{x^2}{y} + 2x - \ln|y| = C.$$



Un punto elemental asintóticamente estable o inestable conserva su estabilidad al añadir términos no lineales. Pero los importantes para los no elementales son precisamente los de la poligonal y términos de mayor orden en ella pueden influir más en la estructura que otros de orden menor.

Ej 6. a) $\begin{cases} x' = y - 2x^3 \\ y' = -3x^2y \end{cases}$, b) $\begin{cases} x' = y + x^3 \\ y' = -3x^2y + 5x^4 \end{cases}$

La estabilidad asintótica del origen del sistema a) con términos hasta orden 3 cambia al incluir el de orden 4:



[Algo similar ocurre con el punto elemental $x' = y + y^2$, $y' = -x + y^2$ centro de la aproximación lineal y foco estable por los términos cuadráticos ($I_3 = -2 < 0$), pero que cambia de carácter si añadimos un término cúbico. El origen es un foco inestable de $x' = y + y^2 + x^3$, $y' = -x + y^2$, pues $I_3 = 1 > 0$].

4.9 Análisis del infinito

Investiguemos el comportamiento 'en el infinito' de las órbitas del sistema polinomial:

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) = A^n(x, y) + \dots + A^m(x, y) \\ y' = g(x, y) = B^n(x, y) + \dots + B^m(x, y) \end{cases}, \text{ donde } m > n \geq 0.$$

Veremos que las técnicas serán muy similares a las del origen. Como sucedía allí, podremos concluir el análisis, salvo en casos muy excepcionales, sin realizar cambios de variable.

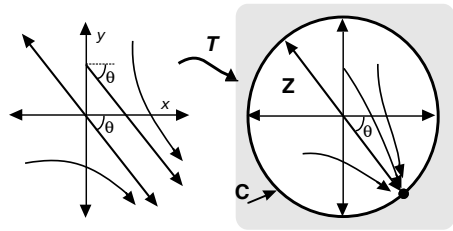
Nuestro objetivo será hacer un modelo de las órbitas de [S] sobre el círculo abierto unidad \mathbf{Z} , para el que cada punto de la circunferencia exterior \mathbf{C} representará un 'punto del infinito' asociado a una determinada dirección de llegada al infinito.

La forma más natural de convertir todo \mathbf{R}^2 en \mathbf{Z} es hacer esta transformación de coordenadas en el plano:

$$\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z} \quad (x, y) \rightarrow (x_*, y_*) \quad \text{con } x_* = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, y_* = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

O, de forma más clara, \mathbf{T} lleva puntos de coordenadas polares (r, θ) a puntos de \mathbf{Z} de coordenadas (r_*, θ) con

$$r_* = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (\text{es decir: } r = \frac{r_*}{\sqrt{1-r_*^2}}, \text{ para } r_* < 1).$$



\mathbf{T} lleva cada órbita Γ de [S] a otra curva Γ_* sobre \mathbf{Z} . Queremos describir las Γ_* cerca de \mathbf{C} , que nos informarán de las Γ cerca del infinito. Una curva que llega al infinito con pendiente m definida ($\theta = \arctan m$ definida) es transformada por \mathbf{T} en otra de \mathbf{Z} que tiende al punto de \mathbf{C} de coordenadas polares $(1, \theta)$. De otra forma: una curva de \mathbf{Z} que llega a un $(1, \theta)$ de \mathbf{C} corresponde a una curva del plano xy que llega al infinito con una pendiente $\tan \theta$.

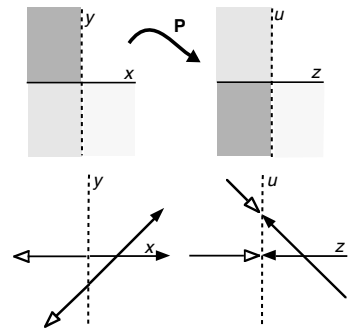
Para estudiar las órbitas inducidas por \mathbf{T} en \mathbf{Z} cerca de \mathbf{C} el cambio \mathbf{T} lleva a expresiones analíticamente poco sencillas, por lo que mejor el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{P}: \mathbf{R}^2 - \{x=0\} \rightarrow \mathbf{R}^2 - \{z=0\} \quad (x, y) \rightarrow (z, u) \quad \text{con } z = \frac{1}{x}, u = \frac{y}{x} \quad (x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z}).$$

que actúa en el plano de la siguiente forma fácil de comprobar:

- lleva los cuadrantes 1, 2, 3, 4 a los cuadrantes 1, 3, 2, 4.
- lleva rectas de pendiente m a rectas que 'pasan' por el punto $(z, u) = (0, m)$: $y = mx + b \rightarrow u = bz + m$, de modo que una serie de puntos que tiende a $+\infty$ [$-\infty$] sobre la recta se convierte en otra que tiende a $(0, m)$ por la derecha [izquierda].
- lleva curvas $y = cx^s + o(x^s)$ si $x \rightarrow \infty$ a las $u = cz^{1-s} + o(z^{1-s})$ cuando $z \rightarrow 0^+$, así que, para $z \rightarrow 0^+$:

$$\text{si } s > 1, u \rightarrow \pm\infty; \quad \text{si } s = 1, u \rightarrow c; \quad \text{si } \begin{matrix} 0 < s < 1 \\ s = 0 \\ s < 0 \end{matrix}, u \rightarrow 0 \text{ con pendiente } \begin{matrix} \text{horizontal} \\ c \\ \text{vertical} \end{matrix}.$$



- las curvas que llegan a un punto $(z, u) = (0, m)$ por la derecha [izquierda] provienen de curvas del plano xy con pendiente m en $+\infty$ [$-\infty$] y serán curvas en \mathbf{Z} que llegarán al punto del infinito $r = 1, \theta = \arctan m$ [$\theta = \arctan m + \pi$] (los cortes de $y = mx$ con la circunferencia \mathbf{C}).

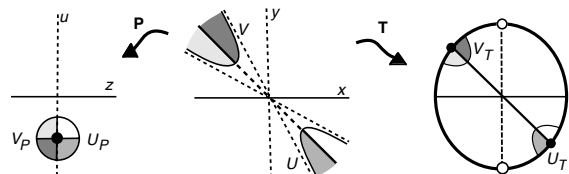
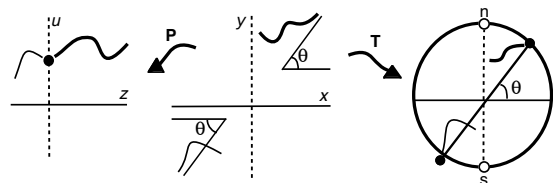
[A cada dos puntos de \mathbf{C} opuestos (salvo a n ó s) está asociado un único punto del eje u].

- un entorno circular de $(z, u) = (0, m)$ viene de dos entornos hiperbólicos de la recta $y = mx$

$$[(u - m)^2 + z^2 \leq R \Leftrightarrow R^2 x^2 - (y - mx)^2 \geq 1]$$

en el infinito y estará pues asociado a un par de semientornos de los puntos del infinito.

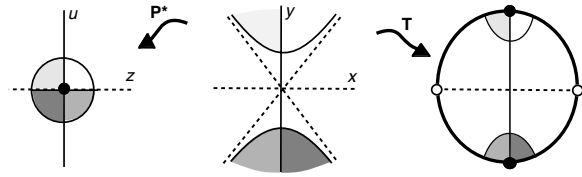
La descripción, pues, de un conjunto de curvas en U_p y V_p es una descripción de curvas de U_T y V_T , es decir, de curvas del plano "próximas en $+$ y $-$ infinito" a una determinada recta.



El cambio \mathbf{P} no informa sobre los polos norte y sur de \mathbf{Z} . Para completar la información hacemos un cambio \mathbf{P}^* , similar a \mathbf{P} , definido cambiando los papeles de x e y :

$$\mathbf{P}^*: \mathbf{R}^2 - \{y=0\} \rightarrow \mathbf{R}^2 - \{u=0\}, \quad z = \frac{x}{y}, \quad u = \frac{1}{y}.$$

$$(x, y) \rightarrow (z, u)$$



Ahora será el eje $u=0$ el asociado a la curva de puntos del infinito y un entorno del origen llevará a dos semientornos de los polos.

Con estas ideas vamos a obtener información sobre las órbitas de $[S]$ cerca del infinito. Los cálculos son parecidos a los de secciones previas, por lo que no daremos muchos detalles. Por ejemplo, para realizar el **análisis homogéneo** similar al de 4.3 hacemos los cambios \mathbf{P} y \mathbf{P}^* en $[S]$, dividimos por el factor común que aparece y obtenemos, respectivamente:

$$[\mathbf{P}] \begin{cases} z' = -zA^m(1, u) - \dots - z^{m-n+1}A^n(1, u) \\ u' = [B^m(1, u) - uA^m(1, u)] + \dots + z^{m-n}[B^n(1, u) - uA^n(1, u)] \end{cases}$$

$$[\mathbf{P}^*] \begin{cases} z' = [A^m(z, 1) - zB^m(z, 1)] + \dots + u^{m-n}[B^n(z, 1) - zA^n(z, 1)] \\ u' = -uB^m(z, 1) - \dots - u^{m-n+1}B^n(z, 1) \end{cases}$$

Sus puntos críticos respectivos en $z=0$ y en $u=0$ dan las únicas posibilidades de llegar a esos ejes, y englobando los resultados de ambos sistemas en una única expresión se obtiene que **las únicas posibles direcciones de llegada al infinito las dan las raíces de**

$$\otimes(x, y) \equiv xB^m(x, y) - yA^m(x, y).$$

Y argumentando como en 4.3 se obtiene este teorema muy similar al de allí:

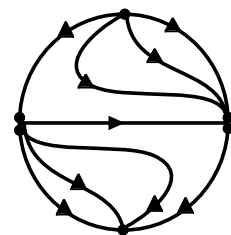
Teor 1.

Suponemos $\otimes(x, y) \neq 0$ y que $\otimes(x, y) = 0$ posee raíces reales $y = u_1x, \dots, y = u_qx$ [y quizás $x=0$]. Si para las u_i que no sean simples es $A^m(1, u_i) \neq 0$ [$B^m(0, 1) \neq 0$], existen en $[S]$ variedades $y = u_i x + o(x)$, $|x| \rightarrow \infty$ [ó $x = o(y)$, $|y| \rightarrow \infty$] que llegan al infinito con pendiente definida u_i [∞] y la estructura de las órbitas de $[S]$ cerca de la \mathbf{C} del infinito queda precisada con el signo de $\otimes(x, y)$ y el flujo sobre cada una de estas variedades, que vendrá dado por $x' = A^m(x, u_i x)$ si $A^m(1, u_i) \neq 0$, o, si es 0, se precisa con algún término más del desarrollo $y = u_i x + c_0 + c_{-1}x^{-1} + \dots$

[Con el teorema queda muchas veces determinada la estructura del infinito de $[S]$ si hay órbitas que llegan hasta \mathbf{C} . Si $\otimes(x, y)$ no tiene raíces reales (m será impar) se distingue entre las tres posibilidades cerca del infinito (que las órbitas sean cerradas, que se acerquen o que se alejen en espiral de \mathbf{C}) haciendo $\rho = 1/r$ en la expresión polar de $[S]$ y usando las técnicas de 4.4 y 4.5].

Ej 1. $\begin{cases} x' = 1 + x^2 + xy \\ y' = xy - y^2 \end{cases} \quad \otimes = -2xy^2, \quad y=0 \text{ doble} \rightarrow x' = x^2 + o(x^2),$
 $x=0 \text{ simple} \rightarrow y' = -y^2 + o(y^2).$

La estructura de las órbitas en el infinito queda fijada sólo con lo anterior: el signo de \otimes nos da la orientación de \mathbf{C} , las ecuaciones en x' e y' orientan las órbitas que llegan o salen de puntos del infinito y queda precisada la estructura local de dichos puntos [los asociados a $y=0$ son silla-nodos y los de $x=0$ son nodos]. Como además el sistema no tiene puntos críticos en \mathbf{R}^2 podemos completar el esquema de las órbitas en \mathbf{Z} .



Ej 2. $\begin{cases} x' = xy - x^3 + xy^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases}$ (ej 4. de 4.2) $\otimes = xy(x^2 - y^2) = 0, \quad y=0, \quad x=0, \quad y=\pm x.$
 $y=0 + o(x) \rightarrow x' = -x^3 + o(x^3).$

Para $x=0$ simple es $B^3(0, y) \equiv 0$. La variedad centro es $x=0 \rightarrow y' = -y$.

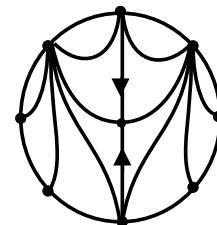
Como $A^3(x, \pm x) \equiv 0$ necesitamos más términos de los desarrollos. Se lleva a la ecuación de las órbitas: $y = c_1x + c_0 + c_{-1}x^{-1} + \dots$

$$[c_1 - c_{-1}x^{-2} + \dots][c_1x^2 - x^3 + c_1^2x^3 + 2c_0c_1x^2 + \dots] = x^2 - c_1x + \dots$$

Igualando las potencias de mayor orden: $x^3 \rightarrow c_1(c_1^2 - 2) = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_1 = \pm 1.$
 $x^2 \rightarrow c_1^2(1 + 2c_0) = 1, \quad c_0 \text{ imposible}, \quad c_0 = 0.$

La variedad asociada a $y=0$ no era centro y podía no admitir desarrollo pero el punto elemental estaba ya analizado. Para las otras dos tenemos: $y = \pm x + O(1/x) \rightarrow x' = \pm x^2 + O(x).$

Con esta información y la obtenida en 4.2 completamos el dibujo de las órbitas en \mathbf{Z} .



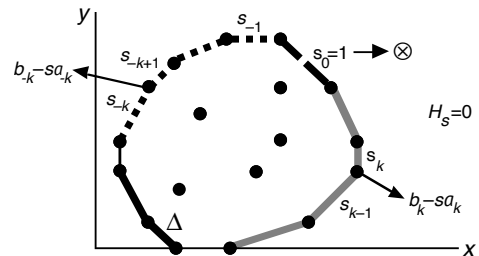
No es mucho más complicado el estudio, utilizando la **poligonal de Newton exterior**, de algunos casos no recogidos en el teorema 1: si hay $y=0$ múltiples con $A^m(1,0)=a_{m0}=0$ o bien $x=0$ múltiples con $B^m(0,1)=b_{0m}=0$.

[Y, aun siendo más largo, si la múltiple fuese $y=uix$, el cambio $x=x, w=y-uix$ llevaría el problema al primero de los anteriores, aunque (aquí y en el origen) puede ser preferible 'separar' (si se puede) variedades llevando series a la ecuación de las órbitas].

Para ello basta construir la poligonal asociada a la conocida $H_s(x,y)=xg(x,y)-syf(x,y)=0$ que rodea ahora por fuera al resto de puntos del sistema:

Como sabemos, la parte inferior izquierda informa de la estructura del origen (y su parte con $s=1$ da Δ).

Estudiando cómo los cambios \mathbf{P} y \mathbf{P}^* transforman la poligonal (que se convierte en otras analizables con lo visto en 4.8) se comprueba que $s_0=1$ da ahora \otimes , la parte derecha informa de las órbitas que llegan al infinito con pendiente horizontal y la izquierda superior sobre las que llegan con pendiente vertical.

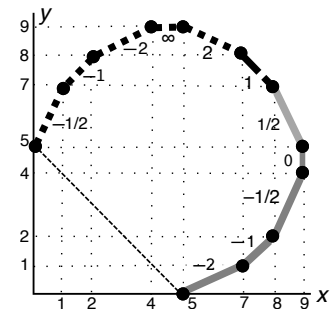


Un segmento de pendiente $-1/s_k$ de la parte derecha dado por un $P_k(x,y)=xP_{kg}-s_kyP_{kf}$, con raíz simple $y=mx^{s_k}$ [o múltiple con $P_k(1,m)\neq 0$] da lugar a una variedad que alcanza el infinito con tangente horizontal: $y=mx^{s_k}+o(x^{s_k})$.

Análogamente, si $y=mx^{s-k}$ es raíz simple o con $P_{-kf}\neq 0$ de un $P_{-k}=0$ existe variedad que se acerca al infinito (con tangente vertical) $y=mx^{s-k}+o(x^{s-k})$.

Como en el análisis del origen, el conocimiento de las variedades orientadas más el signo de \otimes basta en muchas ocasiones para precisar la estructura del infinito. Y como allí, se complican las cosas si el cociente de los coeficientes asociados a un punto común a dos segmentos sucesivos de la poligonal derecha cumple $b_k/a_k \in [s_k, s_{k-1}]$. Y en la parte izquierda los problemas aparecen cuando $b_{-k}/a_{-k} \in [s_{-k+1}, s_{-k}]$, entendiéndose este orden:

$$-2 \leq -1 \leq -\frac{1}{2} \leq 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \leq 2 \leq \pm\infty \leq -2 \leq -1 \leq -\frac{1}{2}.$$



[Observemos que, a diferencia del origen, puede haber problemas aunque a . o b . sean 0].

Si b_{\bullet}/a_{\bullet} pertenece al intervalo abierto aparecen como en el origen infinitas variedades de la forma $y=O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ (asociadas a nodos) que llegan al infinito. Cuando $b_{\bullet}/a_{\bullet}=s_{\bullet}$ ó $s_{\bullet-1}$ (ó $s_{\bullet+1}$ a la izquierda) deberemos orientar además otra circunferencia con el signo de P_{\bullet} .

Resumamos lo anterior (más detalles en la tesis) en un teorema similar a de la sección 4.8:

Si $y=m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}$, $x \geq 0$, es raíz real simple de $P_{\bullet}=0$ o múltiple con $P_{\bullet f}(1, m_{\bullet\bullet}) \neq 0$, existe en $[S]$ variedad de la forma $y=m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}+o(x^{s_{\bullet}})$, con $x \rightarrow \infty$ (para s_k) o con $x \rightarrow 0$ (para s_{-k}). Análogo resultado se tiene cambiando x por $[-x]$.

Teor 2. Si ningún $P_{\bullet} \equiv 0$ y cada raíz de $P_{\bullet}=0$ (con $m_{\bullet\bullet} \neq 0$) es simple o con $P_{\bullet f}(1, m_{\bullet\bullet}) \neq 0$ la estructura de las órbitas de $[S]$ en el infinito queda determinada por

- el flujo para $|x|$ o $|y|$ grande sobre cada variedad
- el signo de \otimes y el signo de los P_{\bullet} para los que sea $\frac{b_{\bullet}}{a_{\bullet}}=s_{\bullet}$ ó $s_{\bullet \pm 1}$ ($\bullet < > 0$).

Como en el origen, para determinar el flujo sobre las variedades $y=m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}}$ basta hallar $P_{\bullet f}(x, m_{\bullet\bullet}x^{s_{\bullet}})$ (o el $P_{\bullet g}$ correspondiente) si no se anula; si se anula y la raíz es simple la variedad será esencialmente centro y se podrán calcular más términos de su desarrollo.

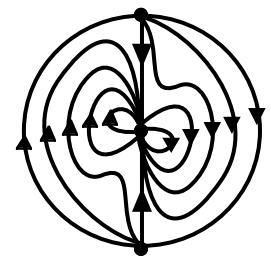
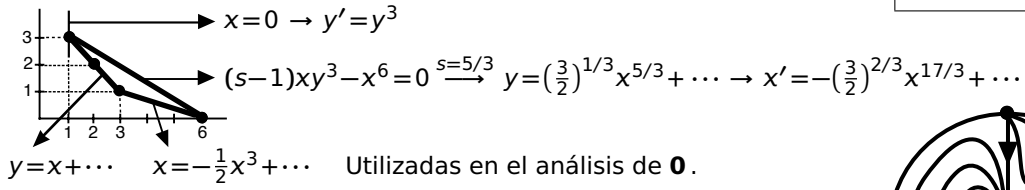
La forma de las órbitas entre dos variedades consecutivas, se deduce del signo de \otimes (sin olvidar las posibles variedades $y=O(|x|^{b_{\bullet}/a_{\bullet}})$ asociadas a nodos descritas y el cambio de flujos 'verticales' que acarrearán), si $b_{\bullet}/a_{\bullet} \neq s_{\bullet}$ ó $s_{\bullet \pm 1}$ (si no, habrá que fijar también el signo de P_{\bullet}).

Sólo quedan por analizar con este teorema los casos análogos a los citados en la sección anterior 4.8: si existen $m_{\bullet\bullet}$ múltiples con $P_{\bullet f}=0$, si algún $P_{\bullet} \equiv 0$ y si no hay variedades que lleguen al infinito con pendiente definida.

Este caso (como se puede leer en la tesis) se podría reducir a las situaciones de los teoremas 4.4 y 4.5 en el caso de que la poligonal exterior se redujese a un único segmento apoyado en los ejes. No sabemos como distinguir el centro o foco del infinito si no es esa la situación.

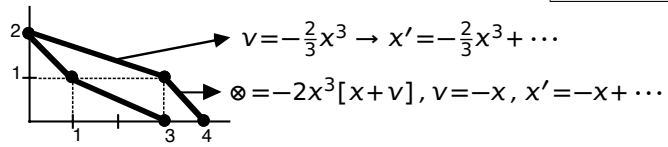
Ej 3. Volvemos por última vez a nuestro atractor inestable mirando su infinito:

$$\begin{cases} x' = 2x^2y - xy^2 \\ y' = 2x^2y - y^3 - x^5 \end{cases}$$

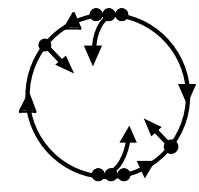


Llevando estas variedades a \mathbf{Z} completamos el análisis del infinito y, con lo visto ya en tres secciones anteriores, completamos el retrato de fases global de la figura. En este dibujo se observa más claramente que el origen es un **atractor inestable**: todas las soluciones tienden hacia él cuando $t \rightarrow \infty$, pero $x=y=0$ no es una solución estable.

Ej 4. $x'' + (2x^2 - 3)x' - x^2 + 2x^3 = 0$, es decir, $\begin{cases} x' = v \\ v' = 3v + x^2 - 2x^3 - 2x^2v \end{cases}$



El infinito es repulsor.



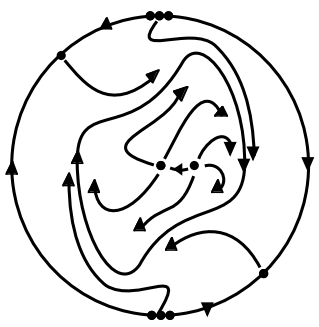
Sus puntos críticos finitos son $(0, 0)$ [un silla nodo, con variedad centro $y = -x^2/3$ y el otro $\lambda = 3$] y el $(1/2, 0)$ [nodo inestable de autovalores $\lambda_1 \approx 2.28$ y $\lambda_2 \approx 0.22$].

Comprobemos que existe (al menos) un ciclo límite (la ecuación es similar a la de Van del Pol).

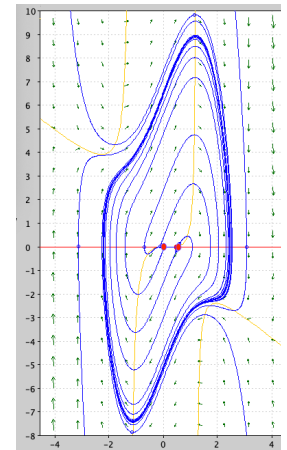
La energía total del sistema sin rozamientos es: $U(x, y) = \frac{v^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$.

Y su derivada a lo largo de las soluciones del sistema: $\dot{U} = v^2(3 - 2x^2)$.

Como $\dot{U} > 0$ si $|x| < \sqrt{3/2}$, y, por ejemplo, $U = 1/6$ está contenida en la banda (pues corta $v=0$ en $x=1$ y en otro punto entre -1 y $-1/2$), esa curva cerrada es cruzada por las órbitas del sistema de dentro hacia fuera. Las órbitas no pueden irse al infinito, ni hacia ninguno de los dos puntos críticos finitos y deben aproximarse a un ciclo límite.

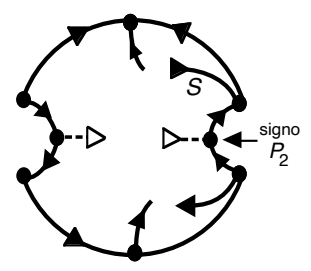
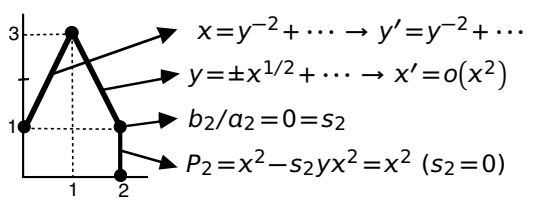


A la izquierda se presenta un esquema de las órbitas en \mathbf{Z} y a la derecha el dibujo elaborado a partir de las soluciones numéricas del pplane que muestra el único ciclo.



Ej 5. $\begin{cases} x' = 1 + x^2 - xy^2 \\ y' = x \end{cases}$

$\otimes = xy^3$
 $A^3(x, 0), B^3(0, y) \equiv 0$

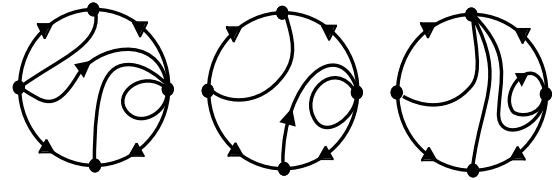


En el ejemplo 'se va' un término de la poligonal (lo que suele suceder si algún s_i es 0 ó ∞ , como en este caso con un segmento vertical) y es necesario considerar, además del de \otimes el signo de algún P_i .

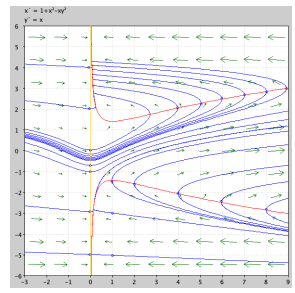
Necesitamos más términos de las variedades $O(x^{1/2})$ para precisar el flujo sobre ellas.

Probando series obtenemos: $y = x^{1/2} - 1 + \dots \rightarrow x' = x^{3/2} + o(x^{3/2})$.

Queda fijada la estructura del infinito. Como no hay puntos críticos finitos tenemos, en principio, tres posibilidades para el mapa global, dependiendo de cuál sea el origen de la separatriz S .



El dibujo aproximado del pplane indica que puede ser el primer caso.



Acabamos el libro con un ejemplo que usa técnicas de varias secciones. Empezamos clasificando un sistema homogéneo cúbico dependiente de un parámetro r y lo perturbamos después con un $-4y^5$.

Ej 6. [H] $\begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 \end{cases}$

Con la notación de 4.5: $P_4(z, r) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + rz + 4$.
 $U = 28$, $V = 2(r-4)(9r-22)$, $D_4 = (284 + 27r)(8-r)(4-r)^2$.

P_4 tiene pues 4 raíces complejas si $r_n \equiv -\frac{287}{27} < r < 8$ y 2 reales y 2 complejas para los demás r .

Una condición necesaria para ser centro la proporcionaba $I_0 = -(8+r)(4+r)(4-r)(8-r)$.

Con más precisión, lo dice el signo de $N_2(Y, r) = 4(Y+5)(Y-3r+5)$ en Y_3 , menor raíz del polinomio:

$Q(Y, r) = Y^3 - 3(73-6r)Y - 27r^2 + 90r + 758$, factorizable en los tres casos sugeridos por el I_0 :

$Q(Y, -8) = (Y-5)(Y^2 - 5Y - 338)$, $Q(Y, -4) = (Y+17)(Y^2 - 17Y - 2)$, $Q(Y, 4) = (Y+14)(Y-7)^2$.

[H] será **centro** para $r = -4$, **focoE** si $r_n < r < -4$ y **focol** si $-4 < r < 8$.

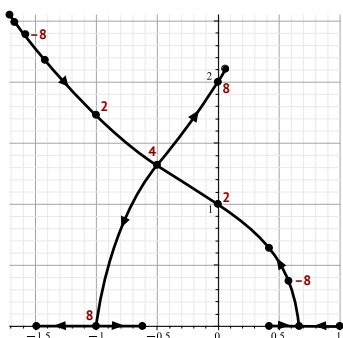
Con el dibujo de la derecha de $Q=0$ y de $N_2=0$ se reafirma lo anterior.

Y no hemos necesitado evaluar las integrales $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z^2 + 2z + r}{P_4(z, r)} dz$.

Sabemos factorizar el P_4 en muchas ocasiones. O pedirlo a Maple, que también sabe hallar raíces numéricas. Por ejemplo cuando $D_4 = 0$:

$(z - \frac{2}{3})^2(z^2 + \frac{10}{3}z + 9)$, $(z^2 + z + 2)^2$, $(z^2 + 4)(z + 1)^2$ [$r_n, 4, 8$].

[Abajo se muestra la evolución de los autovalores con r]:



Vemos ahora los casos con raíces **reales**, asociados al 'autovalor' $\lambda = -z^2(z+1)$.

Si $r = r_n$, el $z_d = \frac{2}{3}$ está asociado a $\lambda = -\frac{20}{27}$.

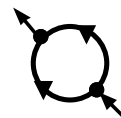
Si $r = 8$, el $z_d = -1$ doble tiene además $\lambda = 0$ y habrá una recta de puntos críticos.

Dividiendo por el factor común $x+y$ queda:

$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = 4x^3 + 4xy + y^2 \end{cases}$, $P_3 = (z^2 + 4)(z + 1)$, $z = -1 \rightarrow \lambda = -1$.

Si $r < r_n$, las dos z_1, z_2 son positivas y serán sus $\lambda < 0$.

Si $r > 8$, son $z_1 < -1 < z_2 < 0$ y así serán $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.



[Una forma corta de comprobar los dos últimos casos es mirar los cortes de $z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 4$ y $-rz$].

Aunque no la hemos necesitado para concluir nuestro análisis, veamos que nos informaría la 'ecuación de autovalores' de 4.5, que para este ejemplo sí calculamos completa:

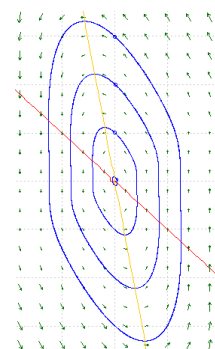
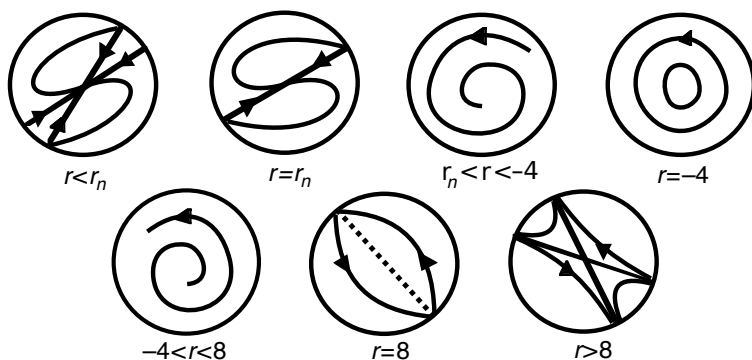
$Q_4(\lambda) = \lambda^4 + (16-3r)\lambda^3 + (3r^2-21r+56)\lambda^2 + (8-r)(r^2+4r-24)\lambda + 16(8-r) = 0$.

Se deduce inmediatamente la presencia del único $\lambda = 0$ (y que es doble) para $r = 8$. También es claro que si $r > 8$, por ser $s_\lambda < 0$ hay necesariamente algún $\lambda > 0$ y el origen es inestable.

No es nada fácil, en general, probar con el Q_4 una EA (tampoco habla de lo que pasa si no hay z reales). Pero aquí, aunque no informe del intervalo $(r_n, 8)$, sí podemos comprobar que si $r < r_n$ sus dos raíces λ son negativas. Basta ver que todos los coeficientes son positivos (para unos es obvio y el r_λ lo es a la izquierda de -8). La ley de Descartes de los signos impide que haya positivas.

Su discriminante $D_\lambda = (284+27r)(8-r)(4-r)^2(r^3+44r^2-256r-256)^2$ vuelve a darnos los r que vienen de z dobles de arriba y otros que no nos aportan información útil por estar asociados a z complejos.

Hemos concluido el análisis de [H] cuyo mapa, por ser homogéneo, es global:



El centro con pplane si $r = -4$:

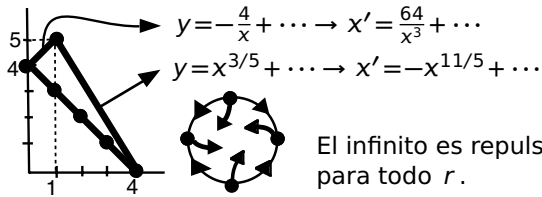
Como sabemos, si perturbamos [H] con términos de mayor orden la estructura del origen se mantiene, excepto si $r = -4$ y $r = 8$, en que hay que seguir calculando. Lo mismo sucede con el infinito si añadimos términos de grado 2 o menor. Se ve que el origen, único punto crítico finito, es asintóticamente estable para $r < -4$ (o sea, el infinito repele si $r < -4$).

El término que añadimos va a tender a inestabilizar el infinito como veremos con su análisis:

$$[P] \begin{cases} x' = -xy^2 - y^3 \\ y' = 4x^3 + rx^2y + 5xy^2 + y^3 - 4y^5 \end{cases}$$

$$\otimes = -4xy^5. \quad x=0 \rightarrow y' = -4y^5 + \dots$$

Para $y=0$ necesitamos la poligonal.



$(\pm \frac{1}{2}\sqrt{r-8}, \mp \frac{1}{2}\sqrt{r-8})$ son nuevos puntos críticos que se suman al origen para $r > 8$. Ambos son focos estables si $8 < r < \frac{17}{2}$ y nodos estables si $r \geq \frac{17}{2}$ [$\lambda^2 + (r-8)^2\lambda + \frac{1}{8}(r-8)^3 = 0$].

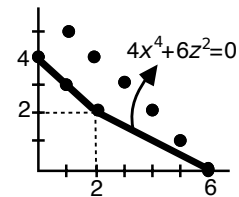
Vamos ya con los casos dudosos. Si $r = -4$ el empuje del infinito hará que el centro pase a ser foco estable (de lenta aproximación al origen). Se comprobará numéricamente (en la tesis, con más teoría, se da una prueba analítica). Entonces para todo $r \leq -4$ el origen será globalmente asintóticamente estable (atraerá a toda órbita). Además esperamos que si $r \in (-4, 8)$, el foco inestable, único punto crítico que sabemos que se conserva, hará que aparezca un ciclo límite.

Para $r=8$ el sistema se puede escribir $\begin{cases} x' = -(y+x)y^2 \\ y' = (y+x)(y+2x)^2 - 4y^5 \end{cases}$,

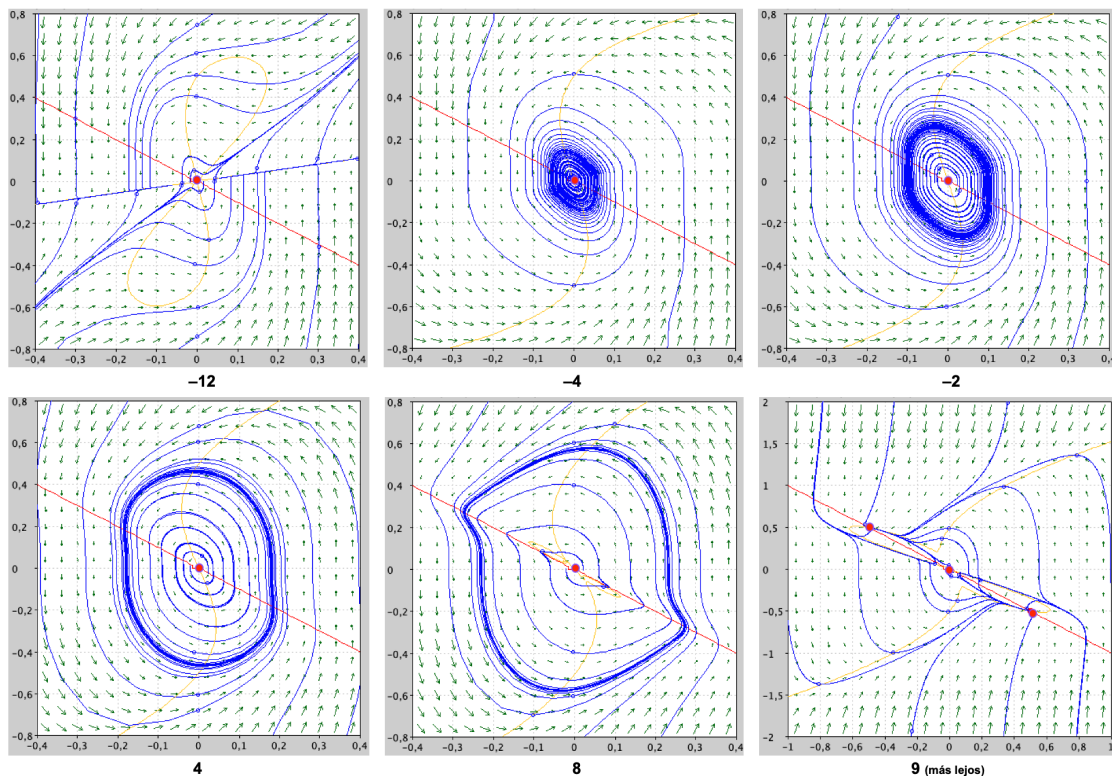
que haciendo $z=y+x$, para llevar el problema a $y=0$, pasa a ser:

$$\begin{cases} x' = -z(z-x)^2 \\ y' = 4xz^2 - 4(z-x)^5 \end{cases} \rightarrow \Delta = z^2[4x^2 + (z-x)^2].$$

El origen será un centro o un foco de los complicados. Como es foco inestable si $-4 < r < 8$, es de esperar que lo siga siendo para $r=8$.



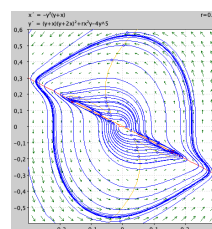
Pasamos a presentar los dibujos de mapas de fases del pplane de [P] para diversos valores de r (las escalas no son las mismas en ambos ejes):



Si $r = -12$ hay nodo estable, en -4 se ve el foco estable previsto, $r = -2, 4, 8$ poseen ciclos límite y para $r = 9$ se observan los dos nodos estables, se mantiene la silla del [H] y ya no existen ciclos.

La integración numérica no deja claro si pudiera aparecer algún otro ciclo límite para valores de r algo superiores a 8.

A la derecha se muestra el dibujo para 8.1, donde quizás haya uno inestable que rodea la silla y los dos focos estables.



Bibliografía

Elemental

- BD **W.E.Boyce-R.C.DiPrima**. ECUACIONES DIFERENCIALES y problemas con valores en la frontera. Limusa, 1994.
- PI **O.Plaat**. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. Reverté, 1974.
- Ro **S.L.Ross**. ECUACIONES DIFERENCIALES. Reverté, 1981.
- Si **G.Simmons**. ECUACIONES DIFERENCIALES, con aplicaciones y notas históricas. McGraw-Hill, 2002.
- Br **M.Braun**. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. Interamericana, 1990.
- EI **Elsogoltz**. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. Mir, 1977.
- HS **M.Hirsch-S.Smale**. Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal. Alianza, 1983.
- FV **C.Fernández-F.J.Vázquez-J.M.Vegas**. Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Thomson, 2003.
- Gu **M.Guzmán**. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Alhambra, 1987.

Avanzada

- Us **J.V.Uspensky**. Theory of equations. McGraw-Hill, 1948.
- Le **S. Lefschetz**. Differential equations: Geometric theory. Interscience, 1963.
- AL **A.A.Andronov-E.A.Leontovich-I.I.Gordon-A.G.Maier**. Qualitative theory of second-order dynamic systems. Wiley, 1973.
- CH **S.N.Chow-J.K.Hale**. Methods of bifurcation theory. Springer, 1982.
- GH **J.Guckenheimer-P.Holmes**. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer, 1983.
- DL **F.Dumortier-J.Llibre-J.C.Artés**. Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Springer, 2006.
- Pe **L.Perko**. Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, 2001.
- St **S.H.Strogatz**. Nonlinear Dynamics and Chaos. Limusa-Wiley, 1994.
- JS **D.W.Jordan-P.Smith**. Nonlinear Ordinary Differential Equations. Oxford University Press, 2007.
- T **Tesis**. Métodos simples para el análisis de puntos degenerados de sistemas analíticos planos. 1998

Sobre los capítulos 1 y 2 (en la bibliografía elemental).

Las secciones **1.1** y **1.2** se pueden encontrar en casi todos los libros elementales.

Hay resultados de existencia y unicidad (**1.3**) en todos ellos y varios demuestran el TEyU. La muy larga y avanzada demostración del TE está en Gu. La prolongabilidad sólo suele ser tratada en los libros más rigurosos (como FV y Gu). Algo se dice sobre el tema en Ro, PI y HS.

La teoría general de estabilidad (**1.4**) está en libros más avanzados, como el Gu, y se suele estudiar en el marco general de los sistemas de ecuaciones. La mayoría de los libros elementales (por ejemplo BD y PI) se suelen limitar a tratar la estabilidad de soluciones constantes de sistemas autónomos. Algunos de ellos (como FV) estudian también la estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes de cualquier orden. De dependencia continua hablan Ro, EI, HS, FV y Gu.

La sección **1.5** sigue, en general, al PI. Ideas interesantes (más avanzadas) se dan en FV.

Los teoremas generales de **2.1** se pueden estudiar en Gu.

Casi todos los libros empiezan estudiando directamente las más sencillas ecuaciones lineales y pasan a ocuparse después de los sistemas, lo que tal vez resulte más pedagógico (este libro, para ahorrar tiempo, lo hace en **2.2** al revés, pero es interesante leer alguna vez este otro camino). Además suelen incluir repasos, más o menos detallados, de la teoría de matrices (por ejemplo, BD, PI, HS o FV), pero aquí es casi innecesaria por no pasar de las 2×2 . Y es sencilla también la estabilidad de **2.3**

En este libro (que no sale del plano y se centra en ecuaciones autónomas), se eliminaron las secciones que trataban la dimensión n general y que estaban en los **Apuntes de Ecuaciones Diferenciales I**. Tampoco hay cálculo numérico, teoremas de estabilidad tipo Routh-Hurwitz, transformada de Laplace o soluciones periódicas de EDOs lineales. Ni un capítulo completo de soluciones por medio de series que, con el grado en Física, pasó a los Métodos Matemáticos II. Estos asuntos son tratados en algunos de los libros elementales anteriores. En los apuntes de EDI se tienen los detalles bibliográficos.

[Muchos libros incluyen aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a problemas reales. Tal vez las más curiosas se ven en el Br. Hay información sobre la historia de las ecuaciones diferenciales en Gu, en BD y en Si. Otro tema relacionado con las EDOs, el cálculo de variaciones, se trata en EI y Si. Y las ecuaciones en diferencias ocupan casi la mitad del libro FV].

Sobre los capítulos 3 y 4 (citando ya bibliografía avanzada).

Para iniciarse en la teoría básica de los mapas de fases (**3.1**, **3.2**, **3.3** y **3.4**) es muy recomendable el PI, donde se estudia con bastante detalle, ejemplos y también rigor. Por ejemplo contiene la complicada demostración del teorema 1 de 3.2. Pero también son interesantes las diferentes formas de tratarlos de BD, Ro, Br y HS. En varios de ellos se puede encontrar además el estudio inicial de las funciones de Lyapunov de **3.6** y de los ciclos límite de **4.6**.

La sección **3.5** ya hay que buscarla en material más avanzado. Aquí se obtiene de la tesis T, que se inspiró en (y detalló y simplificó) las formas de calcular el I_3 en AL. [Otras formas de calcularlo se basan en funciones de Lyapunov].

El otro teorema que no se ve en libros elementales (ni en los avanzados nuestros) es el de Lasalle de **3.6**. Pero no es difícil encontrar referencias (algunas en lenguaje más complicado) en internet.

Las variedades centro de **4.2** se estudian en CH o GH, aunque en este libro nos centremos, como en la T, simplemente en ver su aplicación a puntos críticos del plano con un $\lambda=0$.

Todo el lenguaje de 'vectores propios' y 'autovalores' de sistemas homogéneos y los teoremas directos de **4.3** son propios de la T, aunque los blow-ups llevasen décadas haciéndose para analizar puntos críticos. Se pueden ver como son tratados en Le, AL, DI, Pe...

La T es también la única fuente de los centros degenerados de **4.4**. Aunque se había escrito que la estabilidad dependía de integrales no se había entrado en la práctica en su cálculo real y casi nada se había hablado de su perturbación con términos de mayor orden.

Un antiguo libro en el que ver resultados sobre resolventes, discriminantes, método de Sturm, cálculo de raíces... es U. Pero todas las técnicas de trabajar con polinomios de grado 4 y este cálculo de sus integrales (en **4.5**) fueron creadas para la T (quizás podían haber aparecido otras similares sobre tema tan clásico). Las 'ecuaciones de autovalores' y condiciones para ser centro tampoco existían.

Mucho hay escrito (incluso en libros elementales) sobre ciclos límites, el teorema de Poincaré-Bendixon y su creación con bifurcaciones de Hopf (**4.6**), pero no se habían generado inestabilizando puntos no elementales, como varios ejemplos del libro.

Los ejemplos de atractor inestable (**4.7**) que estaban publicados eran más complicados (este apareció solo, creando ejemplos de análisis del origen descubrí posteriormente que lo era).

Aunque la poligonal de Newton (**4.8**) es más típica de libros de geometría hay un breve resumen en el capítulo 2 de CH. La idea de utilizarla para encontrar las variedades que llegan al origen y describir la estructura de puntos degenerados es propia de la T, aunque (como descubrí posteriormente) había aparecido alguna vez en relación al tema de forma menos práctica. En libros de los citados se puede ver lo largo que resulta analizar puntos críticos si sólo se hacen blow-ups.

Había muchas publicaciones estudiando puntos del infinito (los de **4.9**) como las del grupo de UAB cuyos trabajos me llevaron a acercarme al tema. Por eso recomiendo leer el capítulo 5 del DL. Pero mucho se utilizaban los cambios de variable y nada las técnicas directas aquí presentadas inspiradas en el origen (aproximación homogénea y poligonal).

Hay muchos otros temas relacionados con los sistemas autónomos que tratan los libros citados y que no aparecen en la tesis ni en este libro (teorías de bifurcación, el caos de las dimensiones superiores...). Puede ser este texto un buen aperitivo para iniciar su estudio.

Y acabo las referencias bibliográficas enlazando el útil programa en java con el que estuve trabajando en los últimos años para dibujar rápidamente mapas de fases el **pplane**. En la tesis usaba un viejito problema para Mac que se discontinuó (el DEgraph) y existen versiones posteriores de pplane, pero exigen la instalación previa de Matlab.