Ecuaciones Diferenciales I - 2009/10

(problemas y problemas adicionales con puntos no elementales o estabilidad no fácil no recogidos)

Problemas 4.

4.6. Dibujar el mapa de fases de los sistemas: h) $\begin{cases} x' = x-y \\ y' = y-x \end{cases}$

4.10. a) Sea $x''=ax-(x')^2$. Discutir la estabilidad de su solución $x\equiv 0$ [para $a=0$ dibujar el mapa de fases]. b) Hallar para $a=0$ la solución de la ecuación que satisface $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

4.19. Sea $\begin{cases} x' = y-xy \\ y' = x^2-x \end{cases}$. Dibujar su mapa de fases. Estudiar la estabilidad de sus puntos críticos. Precisar las órbitas asociadas a soluciones periódicas y calcular su periodo.

Problemas adicionales 4

14. Estudiar, según los valores de a, la estabilidad de la solución $x=0$ de las ecuaciones:

$$x'' = a \operatorname{sen} x \cos x \qquad x'' + ax' + e^x = 1 \qquad x'' + x = a \operatorname{sen}(x') \qquad x'' + ax^n = 0 \ ,\ n\in\mathbf{N}$$

15. Sea $x''=(x-x^2)\,e^{-2x}$. a) Dibujar su mapa de fases. b) Estudiar la estabilidad de las soluciones que satisfacen i) $x(0)=x'(0)=0$, ii) $x(0)=1$, $x'(0)=e^{-1}$.

16. Sea $\begin{cases} x'=ay+bx^3 \\ y'=ax+by^3 \end{cases}$. i) Discutir según los valores de a y b la estabilidad de la solución $x=y=0$. ii) Discutir si existen soluciones no triviales que tiendan a 0 cuando $t\to\infty$.

17. Sea $\begin{cases} x' = 2x-4y+ax^3+by^2 \\ y' = 2x-2y \end{cases}$. Elegir a y b (no ambos cero) para los que haya un centro en el origen y dibujar el mapa de fases. Identificar en él órbitas asociadas a soluciones i] inestables, ii] definidas para todo t.

18. Sea [S] $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y-y^2 \end{cases}$. i] Hallar sus órbitas, localizar sus puntos de inflexión y dibujar el mapa de fases. ii] Hallar la solución de [S] con $x(0)=y(0)=2$. ¿Es estable? ¿Lo es la órbita $y(x)$ que define, vista como solución de la ecuación diferencial de las órbitas?

19. Sea [S] $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = x-y+x^2 \end{cases}$. Resolver la ecuación diferencial [o] de sus órbitas. Dibujar isoclinas y curvas integrales de [o] y el mapa de fases de [S]. Precisar si es estable el origen de [S] y si lo es la solución $y(x)$ de [o] que satisface $y(1)=1$.

20. Sea [S] $\begin{cases} x' = x^2+3y^2 \\ y' = -2xy \end{cases}$. Resolver la ecuación diferencial [o] de sus órbitas. Dibujar isoclinas y curvas de puntos de inflexión de [o] y el mapa de fases de [S]. ¿Está definida $\forall t$ la solución de [S] con $x(2)=1$, $y(2)=0$? ¿Es estable la solución de [S] con $x(2)=y(2)=0$?

22. Dibujar el mapa de fases de $\begin{cases} x' = (x-y)(1-x^2-y^2) \\ y' = (x+y)(1-x^2-y^2) \end{cases}$ tras escribir el sistema en polares.

24. Comparar las órbitas y las soluciones de los sistemas $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ y $\begin{cases} x' = y(x^2+y^2) \\ y' = -x(x^2+y^2) \end{cases}$.

25. Sea [e] la ecuación: a) $x'' = 4x-3x'$, b) $x'' = x[1-(x')^2]$, c) $x'' = 2x^3$. Para los tres casos: i] Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases. ii] Si en $t=0$ es $x=x'=1$, ¿en que instante es $x=10^{10}$? iii] Estudiar la prolongabilidad de la solución $x(t)$ de [e] que satisface $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

29. El sistema $\begin{cases} x'=x(5-x-ay) \\ y'=y(5-y-ax) \end{cases}$, $a>0$, puede describir la evolución de las poblaciones x e y de dos especies animales iguales en competición. Clasificar los puntos críticos elementales para $a>0$. Dibujar los mapas de fases si $a=\frac{2}{3}$, $a=1$ y $a=4$, e interpretarlos comparando los resultados.

Problemas del tema 4 de los viejos apuntes de EDOs no trasladados a los EDI

1. Dibujar el mapa de fases: $\begin{array}{l} x' = x^3 y \\ y' = -y + x^2 y^2 \end{array}$.

11. Sea $V(x,y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 + 4x + 4y + 4$.
Dibujar las curvas de nivel de V y el mapa de fases del sistema $\begin{array}{l} x' = -V_x \\ y' = -V_y \end{array}$.

19. Dibujar el mapa de fases del siguiente sistema debido a Poincaré (el uso de polares es útil):

$$\begin{array}{l} x' = x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) - y(x^2+y^2-2x-8) \\ y' = y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) + x(x^2+y^2-2x-8) \end{array}$$ (portada de los apuntes de EDOs).

25. Probar que son periódicas las soluciones de $\begin{array}{l} x' = y^m \\ y' = -x^n \end{array}$, m, n impares.

28. Sea la ecuación $x'' = ax - 2x' + (x')^2$. Para $a=0$: Resolver la ecuación diferencial de las órbitas, dibujar el mapa de fases y hallar la solución de la ecuación que satisface $x(0)=1$, $x'(0)=2$.
Para todo a : discutir la estabilidad de la solución trivial $x=0$.

34. Sea el sistema $\begin{array}{l} x' = x^a \\ y' = y^a \end{array}$. Dibujar su mapa de fases basándose en la ecuación de sus órbitas.
Estudiar para qué valores de a la solución del sistema con $x(0)=y(0)=1$ explota en tiempo finito.

40. Estudiar para qué valores de A , B y C las siguientes funciones son definidas positivas en un entorno del origen:

$$U(x,y)=Ax^4+Bx^2y^2+Cy^4 \qquad U(x,y)=Ax^3+By^3 \qquad U(x,y)=Ax^2+Cy^2+Bx^3$$

41. Estudiar la estabilidad del origen con funciones de Lyapunov:

$$x'' + (x')^3 + 2x = 0 \qquad \begin{array}{l} x' = -x^3 + xy^2 \\ y' = -4x^2 y - y^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x' = y^3 + x^3 - x^4 \\ y' = -x + y \end{array}$$

46. Considérese el péndulo rotatorio con rozamiento: $x'' = \operatorname{sen} x(-1+w^2 \cos x) - ax'$, $a>0$.
Estudiar la estabilidad de la solución $x=0$ (para $w=1$ hacer uso de una función de Lyapunov).
Dibujar e interpretar el mapa de fases con $a=1$ y $w=0$ (péndulo simple con rozamiento).

51. Construir una teoría para el dibujo de órbitas de ecuaciones autónomas de primer orden $y'=f(y)$ en la "recta de fases". Estudiar el caso particular en que f es periódica, representando entonces el "mapa de fases" sobre una circunferencia.