Ecuaciones Diferenciales I (D) **febrero00** (36% de apr./pres. [pres. 56%])

1. Sea $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$. Resolverla. Dibujar sus curvas integrales.

[2.5 puntos]

2. Dada la ecuación: $x'''' + ax'' + 4x = e^t$. **a)** Hallar una solución particular para todo valor de a .
b) Hallar su solución general para $a=-5$ y para $a=5$.
c) Dar un valor de a , si existe, para el que la ecuación sea i) inestable, ii) asintóticamente estable.

[3 puntos]

3. Sea $2tx''+(t-2)x'+3x = 0$. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que sea analítica en $t=0$. ¿Existe solución linealmente independiente de la anterior que sea analítica en $t=0$?

[2 puntos]

4. Sea (S) $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y - x^3 \end{cases}$. **a)** Dibujar el mapa de fases de (S).
b) Calcular la solución de (S) que cumple $x(0)=0$, $y(0)=1$ **.**

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (D) **septiembre00** (45% de apr./pres. [pres. 45%])

1. Sea (E) $\frac{dy}{dt} = \sqrt{y + \frac{t^2}{2}}$. **a)** Resolver (E) utilizando el cambio de variable $u(t) = \sqrt{y(t) + \frac{t^2}{2}}$.
b) Dibujar aproximadamente las soluciones de (E) .

[2.5 puntos]

2. Hallar la solución del sistema $\begin{cases} x' = 2x+y+z \\ y' = x+2y+z \\ z' = x+y+2z \end{cases}$ que satisface $x(0)=1$, $y(0)=2$, $z(0)=-3$.

[2.5 puntos]

3. **a)** Hallar todos los valores de α para los que la solución analítica en $t=0$ de $t(1-t)x'' + (1-2t)x' + \alpha x = 0$ es un polinomio. **b)** Calcular para $\alpha=20$ una solución acotada en $t=0$.

[2.5 puntos]

4. **a)** Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases de las ecuaciones: (i) $x'' = xe^{-x^2}$, (ii) $x'' = -xe^{-x^2}$.
b) Precisar en cada caso si es periódica la solución que verifica $x(1)=0$, $x'(1)=2$.

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (B)

febrero01 (37% de apr./pres. [pres. 73%])

1. Sea $t\frac{dy}{dt} = (1-t)y + t^2$. Resolverla. Discutir según los valores de a cuántas soluciones cumplen $y(a)=0$. Localizar los puntos del plano en los que $y''=0$.

[2 puntos]

2. Sea [L] $\begin{cases} x' = z - t^2 \\ y' = -2cy - w \\ z' = -x + cy \\ w' = y + cz \end{cases}$.
a) Hallar para **c=0** la solución de [L] con $x(0)=1$, $y(0)=0$, $z(0)=-2$, $w(0)=0$.
b) Hallar **una** solución del sistema **homogéneo** para **c=–2** .
c) Determinar, si existe, un valor de c para el [L] sea: i) inestable, ii) asintóticamente estable.

[3 puntos]

3. Sea $tx'' - x' + 4t^3x = 0$. **a)** Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial que se anule en $t=0$ e identificarla con una función elemental. **b)** Hallar la solución general de la ecuación [un posible camino es hacer el cambio de variable independiente de la forma $s=t^n$ que sugiere la solución calculada en **a)**].

[2.5 puntos]

4. Sea $\begin{cases} x' = 1 + y - x^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$. Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.
Precisar para qué valores de b es periódica la solución del sistema con $x(0)=0$, $y(0)=b$.

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (B)

septiembre01 (70% de apr./pres. [pres. 61%])

1. **a)** Resolver la ecuación de Bernouilli: [B] $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{t}\left[y - y^{2/3}\right]$.
b) Precisar cuántas soluciones de [B] satisfacen: i) $y(-1)=1$; ii) $y(0)=1$; iii) $y(1)=0$.

[2.5 puntos]

2. Sea [L] $x''' + ax'' + 3x' + 9x = e^t$. **a)** Para **a=–5** hallar la solución general de [L] .
b) Discutir la estabilidad de [L] según los valores de la constante a .

[2.5 puntos]

3. Sea $2t^2x'' + t(t+1)x' - (2t+1)x = 0$. Hallar una solución no nula que sea analítica en $t=0$.
¿Están acotadas todas las soluciones de la ecuación cuando $t\to 0$?

[2.5 puntos]

4. Sea (E) $x'' = x - x^2 - xx'$. Dibujar el mapa de fases de (E).
¿Hacia qué tiende la solución $x(t)$ de (E) con $x(1)=2$, $x'(1)=0$ cuando $t\to\infty$?

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (B) **febrero02** (38% de apr./pres. [pres. 56%])

1. Sea $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+2xy}{x^2+2y^2}$. **a)** Probar que tiene un factor integrante que depende de y .
b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación que sean rectas.
c) Hallar la o las soluciones (si existen) que satisfacen i) $y(1)=0$, ii) $y(1)=1$.

[2.75 puntos]

2. Sea $\begin{cases} x'=x-4y+2z \\ y'=x-3y+z \\ z'=x-2y+1 \end{cases}$. Hallar la solución del sistema que satisface $x(0)=2$, $y(0)=z(0)=1$, y determinar la estabilidad de esta solución.

[2.5 puntos]

3. Sea $tx''+[1-t^2]x'+ptx=0$. Precisar, resolviendo por series en torno a $t=0$, todos los valores de la constante p para los que hay soluciones polinómicas y escribir uno de estos polinomios para $\mathbf{p=4}$.

[2 puntos]

4. Sea (E) $x''=(ax-x')(2+x')$. **a)** Clasificar según los valores de a los puntos críticos elementales de (E).
b) Para **a=3/2** , dibujar el mapa de fases de (E) y hallar la solución $x(t)$ de (E) con $x(1)=0$, $x'(1)=-2$.

[2.75 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (B) **septiembre02** (41% de apr./pres. [pres. 43%])

1. Sea $y'=|t|-y$. **a)** Precisar cuántas soluciones satisfacen $y(0)=0$.
b) Dibujar aproximadamente sus soluciones.
c) Escribir la solución con $y(0)=1$ para todos los valores de t que esté definida.

[2.5 puntos]

2. Sea $x'''+2x''+(1+a)x'+4a^2x=e^{-t}$.
a) Para **a=0** , hallar la solución de la ecuación que satisface $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=-1$.
b) Para **a=1/2** , hallar **una** solución de la ecuación.
c) Precisar para qué valores de a la ecuación es asintóticamente estable.

[2.5 puntos]

3. Sea $2t^2[1+t^2]x''-t[3+7t^2]x'+2[1+2t^2]x=0$.
a) Hallar una solución que no sea analítica en $t=0$.
b) Hallar la solución general de la ecuación en términos de funciones elementales.

[2.5 puntos]

4. Sea [S] $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y-y^2+x^4 \end{cases}$. Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar el mapa de fases de [S].
Dato: $y=\pm x^2$ son soluciones de la ecuación de las órbitas.

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (B) — **febrero03** (35% de apr./pres. [pres. 68%])

1. Sea $y' = (y-t+1)^2$. **a)** Hallar su solución general. **b)** Dibujar aproximadamente sus soluciones. **c)** Precisar cuántas soluciones satisfacen: i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=-2$.

[2.5 puntos]

2. Sea [S] $\begin{cases} x' = 4y+z \\ y' = z-4 \\ z' = az-2x \end{cases}$. **a)** Para **a=5** hallar la solución del sistema que cumple x(0)=–2, y(0)=3, z(0)=0 . (Ayuda: el sistema posee una solución constante). **b)** Discutir la estabilidad de [S] según los valores de la constante a .

[3 puntos]

3. Sea $t^2x'' + tx' + [t - \frac{1}{4}]x = 0$.

a) Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución acotada en $t=0$.

b) Deteminar si hay soluciones linealmente independientes de la anterior de la forma $x = t^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$.

[2 puntos]

4. Sea $\begin{cases} x' = 4x-2y \\ y' = 2x-xy \end{cases}$. Clasificar sus puntos críticos y dibujar su mapa de fases.

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (B) — **septiembre03** (58% de apr./pres. [pres. 59%])

1. Sea $y' = 1 + \frac{2}{y-t}$. **a)** Hallar su solución general y la o las soluciones que satisfagan $y(1)=-1$. **b)** Dibujar aproximadamente sus curvas integrales.

[2.puntos]

2. Sea $x''' + 5x'' + 4x' + cx = t$. **a)** Hallar una solución particular para todo valor de la constante real c . **b)** Hallar la solución general para c=–10 . **c)** Discutir la estabilidad de la ecuación según los valores de c .

[2.5 puntos]

3. Sea $4t^2x'' - 3x = t^2$. **a)** Calcular el desarrollo hasta orden 4 en torno a $t=1$ de la solución de la **ecuación homogénea** que cumple x(1)=0 , x'(1)=1 .

b) Hallar la solución general de esta ecuación de Euler **no homogénea**.

[3 puntos]

4. Sea [S] $\begin{cases} x' = 4x+2y \\ y' = x+5y \end{cases}$. [elegir entre **b₁)** y **b₂)**]

a) Dibujar el mapa de fases de [S].

b_1) Hallar la solución de [S] que satisface $x(0)=2, y(0)=-1$.

b_2) Hallar la expresión de las órbitas de [S].

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (C) — **febrero04** (36% de apr./pres. [pres. 68%])

1. Sea $y' = \frac{y^2}{t}$. **a)** Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. **b)** Hallar (si existen) todas las soluciones de la ecuación que satisfacen: i) $y(-1) = 1$; ii) $y(1) = 0$; iii) $y(0) = 1$.

[2.5.puntos]

2. Hallar la solución del sistema $\begin{cases} x' = -2z \\ y' = x \\ z' = x-2z \end{cases}$ con $x(0)=1$, $y(0)=0$, $z(0)=1$, y estudiar su estabilidad.

[2.5 puntos]

3. Sea $3[1+t^2]x'' + 2tx' = 0$. **a)** Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución no trivial que se anule en $t=0$. **b)** Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $t\to\infty$.

[2.5 puntos]

4. Sea $\begin{cases} x' = x+2y \\ y' = 4x-y-3x^2 \end{cases}$. Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (C) — **septiembre04** (57% de apr./pres. [pres. 53%])

1. Sea $y' = y-y^3$. **a)** Hallar su solución general. **b)** Precisar cuántas soluciones cumplen: i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=-1$. **c)** Dibujar aproximadamente sus soluciones. **d)** Determinar la estabilidad de la solución que satisface $y(0)=1$.

[3.puntos]

2. Sea $x^{(n)} + 6x' + 20x = \cos 3t$. **a)** Hallar su solución general para n=3 . **b)** Estudiar la estabilidad de la ecuación para n=2, n=3 y n=4 .

[2.5 puntos]

3. Sea $tx'' + x = 0$. Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial que se anule en $t=0$, encontrando la expresión de su término general.

[2 puntos]

4. Sea [S] $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 1+3x^2-y^2 \end{cases}$. Hallar sus órbitas, precisando en particular la que pasa por $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$, y dibujar su mapa de fases.

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (C) febrero05 (37 % de apr./pres. [pres. 56 %])

1. Hallar la solución del sistema $\begin{cases} x'=y \\ y'=4x+z \\ z'=-z+4e^{-2t} \end{cases}$ con $\begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=1 \\ z(0)=-4 \end{matrix}$, y estudiar su estabilidad.

[2.5 puntos]

2. Resover $x''+x=2(\cos t)^{-3}$ con $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

[1.5 puntos]

3a. Sea la ecuación [e] $(1+x^3y)+(x^4+x^3y)\frac{dy}{dx}=0$. **a]** Hallar la solución general de [e] sabiendo que tiene un factor integrante que sólo depende de x . **b]** Precisar cuántas soluciones de [e] cumplen $y(1)=1$ y dar su expresión lo más simplificada posible.

[1.75 puntos]

3b. Dibujar el mapa de fases de [S] $\begin{cases} x'=x^4+x^3y \\ y'=-1-x^3y \end{cases}$. (Utilizar los cálculos realizados en **3a.**).

[1.75 puntos]

4. Sea $t^2(1+t)x''+t(3+2t)x'+x=0$.

a] Hallar, trabajando por series en $t=0$, una solución no trivial que no contenga el $\ln t$.

b] Probar que todas sus soluciones están acotadas cuando $t\to\infty$.

[2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (C) septiembre05 (58 % de apr./pres. [pres. 41 %])

1. Sea la ecuación $y'=\frac{1-2ty^3}{3t^2y^2}$.

a] Hallar su solución general por dos caminos diferentes.

b] Precisar cuántas soluciones cumplen $y(1)=1$ y escribirlas explícitamente. [2 puntos]

2. Sea $x^{IV}+4x'''+cx''+4x'+x=16\,e^t$.

a] Discutir su estabilidad según los valores de la constante c .

b] Para $c=6$, hallar la solución que satisface $x(0)=x''(0)=0$, $x'(0)=x'''(0)=2$.

c] Hallar **una** solución de la ecuación para cada uno de los valores de c . [3 puntos]

3. Sea $(1+t^2)x''+tx'-x=0$.

a] Hallar hasta orden t^6 el desarrollo en serie de la solución con $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

b] Probar que posee soluciones que tienden hacia 0 cuando $t\to\infty$. [2.5 puntos]

[Por si a alguien le es útil: $\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$] .

4. Sea [S] $\begin{cases} x'=x^2y \\ y'=x^4-1 \end{cases}$. **a]** Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases de [S]. [Comprobar que una separatriz pasa por el punto $(3,4)$ y que hay una órbita que pasa por $(-3,0)$ y $(-1,4)$].

b] Hallar la solución de [S] que cumple $x(1)=y(1)=0$. [2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (C) febrero06 (34 % de apr./pres. [pres. 70 %])

1. Sea la ecuación $y' = \frac{2t(1-y)}{y+t^2}$.

a] Hallar la solución (lo más simplificada que se pueda) con: i) $y(0)=1$, ii) $y(0)=-1$.

b] Estudiar si existe solución satisfaciendo $y(1)=-1$. [2 puntos]

2. Sea $t(1+t)x'' + (2+3t)x' + x = 0$.

a] Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial que esté acotada en $t=0$.

b] Probar que no todas sus soluciones son analíticas en $t=-1$.

c] Comprobar **a]** y **b]** utilizando el hecho de que $x = \frac{1}{t}$ es solución. [3 puntos]

3. a] Hallar **una** solución de la ecuación $x''' + x'' + 2x' + 8x = e^{at}$ para: i) $a=1$, ii) $a=-2$.

b] Precisar la estabilidad de la solución hallada en cada caso. [1.5 puntos]

4a. Determinar la estabilidad de la solución de $x' = x+x^2$ que cumple $x(0)=-2$. [1 punto]

4b. Sea [S] $\begin{cases} x' = x+x^2 \\ y' = 2x+y \end{cases}$. i) Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases de [S].

ii) Hallar $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to\infty} y(t)$, si $\binom{x(t)}{y(t)}$ es la solución de [S] con $\mathbf{x}(0)=\binom{-2}{3}$. [2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (C) septiembre06 (46 % de apr./pres. [pres. 63 %])

1. Hallar la solución de $\begin{cases} x' = y-2 \\ y' = 2x-y \end{cases}$ con $\begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=4 \end{matrix}$, y precisar su estabilidad. [2.5 puntos]

2. Sea $x'' + [2-2t]x' + [1-2t]x = 0$.

a] Hallar el desarrollo en serie hasta t^4 de la solución que satisface $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

b] Hallar esta solución en términos de una integral, sabiendo que $x=e^{-t}$ es otra solución.

c] Utilizar **b]** para comprobar **a]**. [2.5 puntos]

3. Sea (E) $\frac{dv}{du} = \frac{2u-v}{v}$. **a]** Hallar su solución general y la particular que cumple $v(1)=1$.

b] Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. [2.5 puntos]

4. Clasificar los puntos críticos y dibujar el mapa de fases de [e] $x'' = x^3 - x - xx'$.

[Ayudas: Comprobar que hay órbitas que son parábolas.

Haciendo $u = \frac{1}{2}[x^2-1]$ en la ecuación de las órbitas se obtiene la (E) del problema **3**]. [2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I $\binom{\text{A}}{\text{C}}$ febrero08 $\left(\begin{array}{l}\textbf{50\% de apr./pres. [pres. 55\%]}\\ \textbf{58\% de apr./pres. [pres. 76\%]}\end{array}\right)$

1. Sea $y'=-3y+3ty^{2/3}$. Hallar su solución general y una o dos soluciones (si las hay) con: i) $y(1)=0$, ii) $y(0)=1$. [2 puntos]

2. Sea $\begin{cases} x'=2-y \\ y'=-2y+cz \\ z'=2x-y \end{cases}$. **a]** ¿Para qué valores de c es asintóticamente estable? **b]** Resolver si $c=-1$ con $x(0)=0$, $y(0)=0$, $z(0)=-4$. [3 puntos]

3. **a]** Dibujar el mapa de fases de (E) $x''=2x^3-2x$. **b]** ¿Para qué valores de b es periódica la solución $x(t)$ de (E) que cumple $x(0)=0$, $x'(0)=b$? **c]** ¿Qué ecuación de primer orden satisface la solución $x(t)$ de (E) con $x(0)=0$, $x'(0)=1$? [2.5 puntos]

4. Sea $3tx''+(2-6t)x'+2x=0$. **a]** Hallar una solución que no sea analítica en $t=0$. **b]** Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial que sea analítica en $t=0$. [2.5 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I $\binom{\text{A}}{\text{C}}$ septiembre08 $\left(\begin{array}{l}\textbf{33\% de apr./pres. [pres. 36\%]}\\ \textbf{75\% de apr./pres. [pres. 27\%]}\end{array}\right)$

1. Sea $y'=1+\frac{y}{t}-\frac{y^2}{t^2}$. **a]** Hallar su solución general y la(s) solución(es), si existe(n), con: i) $y(1)=1$, ii) $y(1)=-1$. **b]** Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. [2.5 puntos]

2. Sea $x'''+3x''+4x'+bx=2$. **a]** Discutir su estabilidad según los valores de b . **b]** Hallar una solución particular para todo valor de la constante b . **c]** Hallar si $b=2$ la solución con $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x''(0)=0$. [3 puntos]

3. Sea [S] $\begin{cases} x'=x+2y-3 \\ y'=4x-y-3 \end{cases}$. **a]** Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. **b]** ¿Para qué valores de a tiende a $-\infty$ cuando $t\to\infty$ la $y(t)$ de la solución de [S] con $x(7)=0$, $y(7)=a$? [2.5 puntos]

4. Sea [e] $2t^2x''+t(1+t^2)x'-x=0$. **a]** Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución de [e] que no sea analítica en $t=0$. **b]** ¿Cuántas soluciones de [e] satisfacen: i) $x(0)=x'(0)=3$; ii) $x(3)=x'(3)=0$? [2 puntos]

Ecuaciones Diferenciales I (C-p) febrero09 (35% de apr./pres. [pres. 76%])

[Este examen final puntúa sobre 8; cada uno de los problemas vale 2 puntos].

1. Sea $\frac{dy}{dt}=\frac{(y-t)^2}{t^2}+1$. **a]** Hallar sus rectas solución y resolverla como: i) homogénea, ii) Riccati.
b] Discutir cuántas soluciones hay con: i) $y(0)=2$, ii) $y(1)=2$, iii) $y(2)=2$, hallándolas si existen.

2. Sea $\begin{cases} x'=-3x+4y+cz \\ y'=-x+y-z \\ z'=x-2y \end{cases}$. **a]** Para $c=-2$, hallar la solución con $x(0)=0$, $y(0)=1$, $z(0)=2$.
b] Discutir la estabilidad del sistema según los valores de $c\in\mathbf{R}$.

3. Sea $tx''+(2t^2-1)x'-4\alpha tx=0$.
a] Precisar para qué valores de α hay soluciones que son polinomios que se anulan en $t=0$.
b] Para $\alpha=1$, hallar una solución analítica en $t=0$ y determinar si todas las soluciones lo son.
c] Para $\alpha=0$, hallar la solución general sin utilizar series.

4. Sea (E) $x''=1-x^2-(x')^2$. **a]** Resolver la ecuación de las órbitas de (E).
b] Dibujar el mapa de fases y decidir si es periódica la solución de (E) con $x(0)=x'(0)=1$.

Ecuaciones Diferenciales I (C-p) septiembre09 (50% de apr./pres. [pres. 44%])

1. Sea $\frac{dy}{dt}=\frac{2+t-y}{e^{y-t}+1}$. **a]** Hallar su solución general (en forma implícita) calculando un factor integrante $g(t)$ y por otro método diferente. [2.5 puntos]
b] ¿Cuántas soluciones hay con $y(0)=0$? Dar su forma explícita si existen.
[Ayuda: ¿Qué forma tienen todas sus isoclinas? ¿Cuál es la asociada a la pendiente $K=1$?].

2. Sea $x'''+2x''+ax'=4e^t+2t$. **a]** Para $a=1$, hallar su solución con $x(0)=-2$, $x'(0)=x''(0)=0$.
b] Discutir la estabilidad de la ecuación según los valores de a. [3 puntos]

3. Sea $tx''-2x'+4e^tx=0$. **a]** Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $t=0$. **b]** ¿Están acotadas en $t=0$ todas las soluciones? [2 puntos]

4. Sea [S] $\begin{cases} x'=xy-x \\ y'=2y-3x \end{cases}$. **a]** Dibujar el mapa de fases de [S].
b] Hallar la solución de [S] que cumple $x(2)=0$, $y(2)=1$. [2.5 puntos]