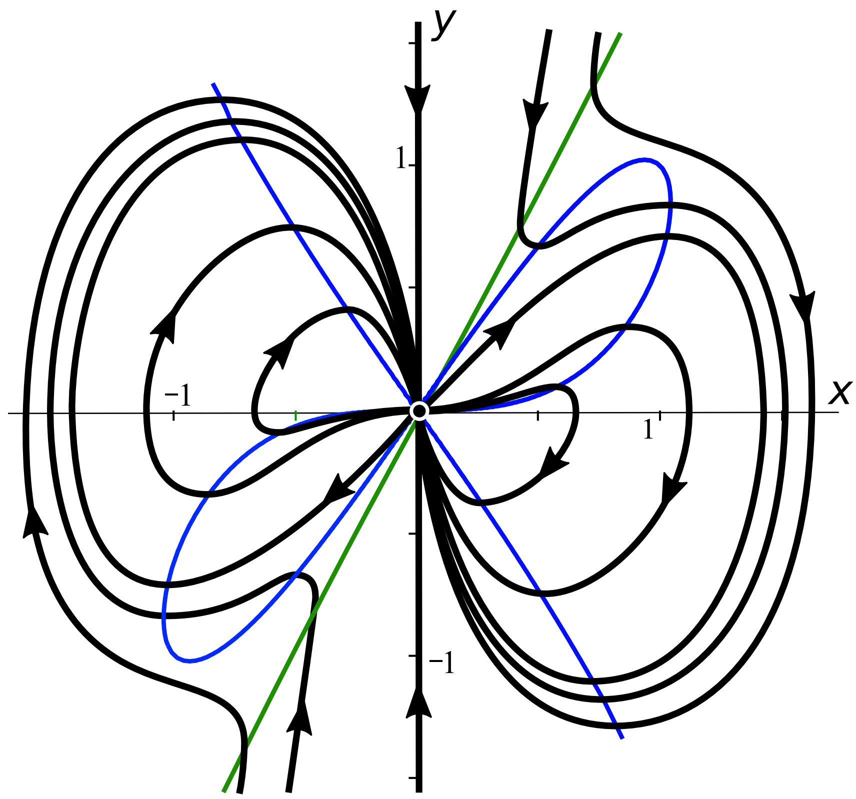
Ecuaciones diferenciales ordinarias y

mapas de fases



Pepe Aranda Iriarte

pparanda@ucm.es

Índice

(aún no escrito)

Introducción

El objetivo de este libro es dar la teoría básica de **ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDOs) y sus sistemas y avanzar algunos pasos en temas más complicados que fueron parte de mi tesis doctoral. Los **mapas de fases**, parte de esa teoría, dejaron de estar en el plan del grado en física de la UCM en que yo los explicaba. Este libro fue naciendo poco a poco unido a la dirección de trabajos de fin grado, pues iba transcribiendo a LaTeX las técnicas más básicas de la tesis dando material para esos TFGs. Y los últimos años también incluí otros cálculos más complicados con **puntos no elementales**.

Los dos primeros capítulos provienen, esencialmente, los 'Apuntes de Ecuaciones Diferenciales I' (de su versión 09), el 3 contiene ya otras aportaciones y el 4, en su mayoría, está extraído de la tesis.

Una **ecuación diferencial** es aquella en la que hay derivadas de una función incógnita. Si tal función es de una variable la ecuación se llama **ordinaria**, único tipo que aparece en este libro. Si es de varias variables, se dice en derivadas parciales. Ejemplos de EDOs son:

[1] $y'(t)=-ay(t)$ [ecuación que rige la desintegración radiactiva]

[2] $y'(t)=by(t)\big[M-y(t)\big]$ [describe la evolución de una población animal]

[3] $\big(1-t^2\big)x''(t)-2tx'(t)+px(t)=0$ [ecuación del Legendre]

[4] $x''(t)+c\,\mathrm{sen}[x(t)]=0$ [ecuación del péndulo]

[5] $x^{iv}(t)+dx(t)=0$ [ecuación de las vibraciones de una viga]

Y son ecuaciones en derivadas parciales, por ejemplo:

[6] $u_x^2+u_y^2=1$, con $u=u(x,y)$ [ecuación eikonal o de la óptica geométrica]

[7] $u_t-k\,[u_{xx}+u_{yy}]=F(x,y,t)$, $u=u(x,y,t)$ [ecuación del calor en el plano]

(en las ecuaciones anteriores a , b , M , p , c , d , k son constantes y la F función conocida).

Se llama **orden** de una ecuación diferencial al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella. Así, [1], [2] y [6] son de primer orden; [3] y [5] y la EDP [7] de segundo orden, y la EDO [6] es de cuarto orden. La ecuación se dice **lineal** cuando las funciones incógnitas y sus derivadas sólo aparecen como polinomios de grado uno. Según esto, son lineales [1], [3], [5] y [7] (aunque su F sea tan complicada como se quiera) y no lo son las otras tres, [2], [4] y [6].

Solución de una ecuación de orden n es una función, n veces derivable, que al ser llevada a la EDO la convierte en una identidad. Así, $y(t)=\mathrm{e}^{-at}$ es solución de [1] pues $y'(t)=-a\mathrm{e}^{-at}=-ay(t)$. Más aún, lo es toda función $y(t)=C\mathrm{e}^{-at}$ para cualquier constante C. A esta expresión que, como veremos, recoge todas sus soluciones, se le llama **solución general**. Para precisar una **solución particular** se debe imponer además alguna **condición inicial**. Al conjunto de la EDO y el dato inicial se le llama **problema de valores iniciales**. Para [1], de primer orden, basta dar el valor de la solución en un instante t dado: por ejemplo, $y(0)=7$ determina $y(t)=7\mathrm{e}^{-at}$. La solución general de una EDO de orden n contendrá n constantes arbitrarias y deberemos dar n datos iniciales (para [4], los valores de x y x' en $t=0$ o en cualquier otro $t=t_o$). [Las condiciones adicionales para aislar una solución única de una EDP son más complicadas y variadas].

Aunque sería nuestro principal deseo ante cualquier ecuación diferencial, **hallar su solución general sólo será posible en contadas ocasiones** incluso para las EDOs de primer orden. Será más difícil cuanto mayor sea su orden, más para las ecuaciones no lineales, y más aún para las EDPs. Parte de la teoría de las ecuaciones diferenciales describe los escasos métodos de resolución. Pero otra parte importante se dedica a obtener información sobre las soluciones de una ecuación **sin necesidad de resolverla**: ¿cuándo tiene un problema de valores iniciales solución única?, ¿qué aspecto tiene la gráfica de las soluciones?, ¿cómo se comportan en el infinito? ...

Pasando al detalle, el **capítulo 1** se dedica a las **ecuaciones de primer orden** $y'=f(t,y)$ (no suele escribirse la dependencia de t). Comienza describiendo los métodos elementales de integración y pasa pronto al resto de la teoría: el dibujo aproximado, la existencia y unicidad (si las funciones que aparecen en la ecuación son discontinuas o no derivables puede que no haya solución o que haya más de una satisfaciendo un dato inicial), prolongabilidad (¿en qué intervalo está definida cada solución?), estabilidad (¿se parecen entre sí las soluciones con datos iniciales próximos para t grande?). Y acaba el capítulo con la sección dedicada a la **ecuaciones autónomas**, las de la forma $y'=f(y)$, primera aproximación a los dos últimos capítulos del libro: los sistemas autónomos de segundo orden. En esta sección 1.5 ya van apareciendo varias novedades respecto los viejos apuntes de la licenciatura.

El **capítulo 2** trata las **ecuaciones de segundo orden** y los **sistemas de** 2 **ecuaciones de primer orden** sobre los que más información se obtiene y que más veces son resolubles, los **lineales**:

$$[\text{e}]\ x''+a(t)x'+b(t)x=f(t) \qquad [\text{S}]\ \begin{cases} x'=a(t)x+b(t)y+f(t) \\ y'=c(t)x+d(t)y+g(t) \end{cases}$$

Primero se generalizan las definiciones y propiedades estudiadas de las ecuaciones de primer orden. Luego se ven los sistemas de 2 EDOs lineales de orden 1 y las ecuaciones lineales de orden 2 (siempre resolubles si los coeficientes son constantes, por ser calculables los autovalores de una matriz), viendo en particular su estabilidad. El capítulo es un recorte del de los apuntes de EDOs (allí se trata el más complicado caso general), que se mantiene en este libro para obtener información sobre los sistemas no lineales de los últimos dos capítulos.

El **capítulo 3** es el primero dedicado a los dibujos (llamados **mapas de fases)** de las proyecciones sobre un plano de las soluciones de los **sistemas de dos ecuaciones autónomas** [y, como un caso particular, de las ecuaciones autónomas de segundo orden]:

$$[\text{S}]\ \begin{cases} x'=f(x,y) \\ y'=g(x,y) \end{cases} \qquad \left[\, x''=g(x,x') \to \begin{cases} x'=v \\ v'=g(x,v) \end{cases} \right]$$

En estos sistemas casi nunca se podrá hallar su solución general, pero muchas propiedades de sus soluciones estarán a la vista en su mapa de fases. Tras tratar resultados generales, se clasificarán los mapas de fase cerca de los puntos proyección de sus soluciones constantes (de sus **puntos críticos**), a partir de los fáciles dibujos de los sistemas lineales. Se hace sólo en el caso sencillo de autovalores no nulos de la 'aproximación lineal', que son los llamados **puntos elementales**. Se presentarán los nodos, sillas, focos, centros... Luego se estudia un tipo concreto de sistemas (los exactos) y se inicia el análisis del único caso dudoso de la clasificación dada: la distinción entre centro y foco cuando aparecen autovalores imaginarios puros. Las dos últimas secciones de este capítulo no estaban en los apuntes de EDI. La 3.5 (los coeficientes de Lyapunov) se traslada de la tesis y la 3.6 (el método directo de Lyapunov) de apuntes de un plan anterior.

En el **capítulo 4**, contiene diversos resultados relacionados con **puntos no elementales** (puntos críticos con autovalores cero). Salvo bastantes ejemplos de 4.1, que provienen de los apuntes de EDI, la mayor parte del material es un deseo de divulgar los resultados más prácticos de mi tesis (Métodos simples para el análisis de puntos degenerados de sistemas analíticos planos). Para ello se han reescrito y simplificado diversos apartados y ejemplos de ella. Se empieza en 4.2 con el estudio de los puntos con **sólo un autovalor** 0, que pueden ser nodos, sillas o silla-nodos, y que basta para distinguirlos hallar algún término de su 'variedad centro' y llevarla a la ecuación de x'.

En 4.3 se tratan los que llamo **puntos poco degenerados**, aquellos en las que basta un único cambio de variable para descomponerlos en puntos elementales o con un autovalor cero. Esos puntos serán similares a su 'aproximación homogénea' de grado n. Para hacer su dibujo bastará entonces ver el signo de un polinomio P_{n+1} entre sus raíces, llevar estas raíces (vienen a ser sus 'vectores propios') a la ecuación de x' (sus 'autovalores') y, en el peor de los casos, calcular términos de una 'variedad centro'. Sólo deja por clasificar esta sección los posibles centros y focos, aquellos en que $P_{n+1}\equiv 0$ y los puntos para los que exista algún 'vector propio' múltiple con 'autovalor' 0.

La 4.4 se dedica a distinguir los **centros y focos** de puntos poco degenerados, aquellos para los que el P_{n+1} no tenía raíces reales. La estabilidad la dará el signo de una integral (no calculable en general) de un cociente de polinomios que se obtienen de su 'aproximación homogénea': $I\equiv\int_{-\infty}^{\infty} E_{n-1}/P_{n+1}\,dz$.

En 4.5 se estudian en general los **polinomios** de tercer y cuarto grado y sus integrales, para abordar problemas más complicados que los de las dos secciones anteriores.

En 4.6 veremos puntos elementales y no elementales, en los que aparecen **ciclos límites** y en 4.7 volveremos a mirar la **estabilidad** usando los resultados ya vistos.

Las dos últimas secciones ya no se proponían para estudiar en ninguno de los TFGs que dirigía. En 4.8 se describirá la utilidad de la **poligonal de Newton** para el análisis de puntos no 'poco degenerados'. Con ella podremos precisar la estructura de la gran mayoría de ellos sin necesidad de hacer ningún cambio de variable, que es la técnica habitual para estudiar los puntos no elementales. Y en 4.9 nos dedicaremos al **estudio del infinto** con métodos muy parecidos a los del origen.