2. Sistemas y ecuaciones lineales de orden 2

Si ya se podían resolver muy pocas ecuaciones de primer orden, menos aún se pueden resolver sistemas de tales ecuaciones o ecuaciones de orden $n>1$. Salvo escasas excepciones, sólo en el caso lineal se puede caracterizar la estructura de las soluciones y casi sólo si los coeficientes son constantes se pueden hallar explícitamente tales soluciones mediante métodos elementales. Como el objetivo principal de este libro son los sistemas autónomos en el plano, nos limitaremos aquí a dar la teoría para el caso $n=2$.

En la sección 2.1 enunciaremos las **propiedades básicas** (similares a las de ecuaciones de primer orden) de los sistemas de 2 ecuaciones (lineales o no) y ecuaciones de orden 2, que veremos que se pueden considerar como un caso particular de sistemas. No daremos demostraciones (basta casi sustituir los valores absolutos del caso $n=1$ por normas). En la solución general de un sistema o ecuación de orden 2 aparecen 2 constantes arbitrarias (así lo sugieren los ejemplos más sencillos de sistema: $x'=0$, $y'=0$, y de ecuación: $x''=0$). El problema de valores iniciales consistirá en hallar la solución que cumpla 2 condiciones en un instante $t=t_o$ (si los datos se dan en t distintos, el 'problema de contorno' tiene otras propiedades que se suelen estudiar en los cursos de EDPs). Será fácil ver cuando este problema tiene solución única local. También daremos un resultado de prolongabilidad y la definición de estabilidad. No generalizaremos, sin embargo, el dibujo aproximado, porque no se puede: las soluciones de un sistema son curvas en el espacio (a partir del capítulo 3, para sistemas autónomos de segundo orden, sí nos preocuparemos del dibujo de las proyecciones de las soluciones sobre el plano $t=0$).

La 2.2 trata ya en el caso **lineal**:

$$\boxed{[\mathrm{S}]\ \begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y + f(t) \\ y' = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{cases}}$$

Tendremos una **fórmula de variación de las constantes** que nos dará las soluciones de [S] si somos capaces de hallar lo que se llama una **matriz fundamental** $\mathbf{W}(t)$ (formada por soluciones del sistema homogéneo). Esta matriz sólo sabremos calcularla (utilizando resultados de álgebra) en el caso de que las funciones a, b, c y d sean constantes (entonces $\mathbf{W}(t)$ será la exponencial de una matriz). De lo anterior deduciremos resultados para las **ecuaciones de segundo orden**:

$$\boxed{[\mathrm{e}]\ x''+a(t)x'+b(t)x=f(t)}$$

Resolver [e] será especialmente sencillo para a y b **constantes**. La solución de la homogénea la darán las raíces de la ecuación caracterítica $\lambda^2+a\lambda+b=0$, y para la no homogénea tendremos, además de una fórmula de variación de constantes, el método de coeficientes indeterminados (aplicable a ecuaciones de primer orden o de orden mayor que 2). Si $a(t)$ y $b(t)$ son **variables**, veremos los pocos casos (ecuaciones de Euler $t^2x''+atx'+bx=h(t)$, si $b(t)\equiv 0$ y si somos capaces de calcular una solución de la homogénea) en que aún se puede hallar su solución a través de integraciones (en el resto de los casos para resolver [e] se deben utilizar series de potencias).

En 2.3 analizaremos la **estabilidad** de sistemas y ecuaciones lineales de orden 2, que se podrá precisar fácilmente en el caso de coeficientes constantes: bastará casi siempre con conocer el signo de la parte real de los autovalores.

2.1 Propiedades generales

Un **sistema de** 2 **ecuaciones de primer orden** es: [S] $\boxed{\begin{cases} x'=f(t,x,y) \\ y'=g(t,x,y) \end{cases}}$

Sus **soluciones** son parejas de funciones $x(t), y(t)$, definidas y derivables dos veces en un intervalo común I, que convierten cada ecuación de [S] en una identidad. Llamaremos [P] al **problema de valores iniciales** formado por [S] y las condiciones iniciales:

$$\boxed{x(t_o)=x_o\,,\; y(t_o)=y_o}$$

Utilizando notación vectorial: [P] $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}'=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o} \end{cases}}$, con $\mathbf{x}=\binom{x}{y}$, $\mathbf{f}=\binom{f}{g}$, $\mathbf{x_o}=\binom{x_o}{y_o}$.

Las soluciones $\mathbf{x}(t)=\binom{x(t)}{y(t)}$ se pueden ver entonces como funciones vectoriales de I en $\mathbf{R}^2$.

Llamaremos $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ (norma euclídea) y será $B(\mathbf{a},r)=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2 : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$ el entorno o bola de centro $\mathbf{a}$ y radio r (círculo sin borde).

Los **TEyU** y **prolongabilidad** son muy parecidos a los de $n=1$:

Teor 1. f, g, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ continuas en $[t_o-h,t_o+h]\times B(\mathbf{x_o},r)$ $\Rightarrow$ [P] tiene solución única definida al menos en un entorno de t_o.

(Y si sólo f y g son continuas existe solución, aunque podría no ser única).

Teor 2. Si f, g, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ son continuas en $[t_o,\infty)\times\mathbf{R}^2$ o bien existe t_1 tal que $\|\mathbf{x}(t)\|\to\infty$ cuando $t\to t_1$ o bien la solución $\mathbf{x}(t)$ de [P] está definida $\forall t\geq t_o$.

(Y si son continuas en un $D\subset R^3$ las soluciones llegan hasta la frontera de D).

También hay dependencia continua de parámetros y datos iniciales y las definiciones de **estabilidad** son como las de primer orden, sustituyendo los valores absolutos por normas:

Una solución $\mathbf{x}(t)$ definida en $[t_o,\infty)$ es **estable** si $\forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0$ tal que toda $\mathbf{x}^*(t)$ con $\|\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)\|<\delta$ existe, está definida en $[t_o,\infty)$ y verifica $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|<\varepsilon\;\forall t\geq t_o$.
Si además $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$ se dice que $\mathbf{x}(t)$ es **asintóticamente estable**.

[Pero para un sistema podrá ocurrir que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\to 0$ si $t\to\infty$ y sin embargo que no consigamos hacer que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|$ sea menor que cualquier ε prefijado].

Consideremos ahora la **ecuación de segundo orden**: [e] $\boxed{x''=g(t,x,x')}$.

Sus **soluciones** son funciones $x(t)$ **derivables dos veces** en un intervalo I que llevadas a [e] la convierten en una identidad. Llamamos [Pe] al **problema de valores iniciales** consistente en hallar la solución de [e] que satisface las dos condiciones:

$$\boxed{x(t_o)=x_o\,,\; x'(t_o)=x'_o}\,.$$

Toda ecuación se puede convertir en un sistema (**sistema equivalente)**, haciendo:

$x'=y\;\rightarrow$ [Se] $\boxed{\begin{cases} x'=y \\ y'=g(t,x,y) \end{cases}}$. Llamando $\mathbf{x}=\binom{x}{y}=\binom{x}{x'}$, $\mathbf{x_o}=\binom{x_o}{x'_o}$, es claro que x es solución de [e] si y sólo si $\mathbf{x}$ lo es de [Se]. Si además $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$, x es solución de [Pe].

Gracias a esto, de cualquier resultado para sistemas se deducen consecuencias inmediatas para ecuaciones (aunque éstas tendrán formas de resolverse más directas). Por ejemplo, los teoremas 1 y 2 se pueden aplicar a ecuaciones. Veamos la forma que adopta el **TEyU**:

Teor 3. $\boxed{\begin{array}{l} g\,,\ \frac{\partial g}{\partial x}\ \text{y}\ \frac{\partial g}{\partial x'}\ \text{continuas en un entorno de } (t_o,x_o,x'_o) \Rightarrow \\ \text{[Pe] tiene solución única definida al menos en un entorno de } t_o\,. \end{array}}$

Por último, se dice que $x(t)$ **es solución estable o asintóticamente estable de** [Pe] **si lo es la solución** $\mathbf{x}(t)$ **del sistema equivalente** (y por lo tanto se han de parecer tanto $x(t)$ y $x^*(t)$ como las derivadas de las dos soluciones).

Ej 1. $\boxed{\begin{cases} x'=3tx^{1/3}+\ln y \\ y'=xy-t^3 \end{cases}}$ Posee solución con $x(t_o)=x_o$, $y(t_o)=y_o$ si $y_o>0$. Única si $x_o\neq 0$.

No sabemos, ni sabremos, hallar su solución general, ni ver qué soluciones están definidas $\forall t$, ni precisar su estabilidad (aunque se podrían hallar los valores aproximados para unos datos iniciales concretos por métodos numéricos). Es trivial comprobar que una solución del sistema es

$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} t^3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\big[$única con $x(1)=y(1)=1$, aunque tal vez haya más con $x(0)=0$, $y(0)=1\,\big]$.

Ej 2. $\boxed{\begin{cases} x'=1-x \\ y'=-y^3 \end{cases}}$ Sistema fácilmente resoluble, pues cada ecuación (resoluble) depende de una variable. [También se podrían ya abordar los sistemas 'desacoplados' del tipo $x'=f(t,x)$, $y'=g(t,x,y)$, hallando la x y llevándola a la otra ecuación].

Hallando las soluciones de la lineal y la separable (ambas autónomas) se obtiene: $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1+Ce^{-t} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2t+K}} \end{pmatrix}$.

Como $f,g\in C^1$ en $\mathbf{R}^2$ existe solución única para cualquier pareja de datos $x(t_o)=a$, $y(t_o)=b$.

Sin mirar la solución sabíamos que cualquier $x(t)$ está definida $\forall t$ y que cada $y(t)$ no trivial explota para un $t_1<t_o$ $\big($por la potencia $-y^3\,\big)$.

Estudiemos la estabilidad de la solución que satisface $x(0)=1$, $y(0)=0 \to \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ [perdida en el cálculo].

Las soluciones próximas con $x(0)=a$, $y(0)=b$ son $\mathbf{x}^*=\begin{pmatrix} 1+(a-1)e^{-t} \\ \frac{a}{\sqrt{2a^2t+1}} \end{pmatrix}$ [definidas $\forall t\geq 0$, claro].

Es claro que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|=\left\|\begin{pmatrix} (a-1)e^{-t} \\ \frac{a}{\sqrt{2a^2t+1}} \end{pmatrix}\right\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}$, pero esto no basta en sistemas para ser AE.

Habría que encontrar además un δ tal que se cumpliese $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\leq\varepsilon$ cuando $\begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}<\delta$.

[ES posible encontrarlo, aunque es complicado hacerlo. Pero en el capítulo 3 veremos formas fáciles de precisar la estabilidad de las soluciones constantes de un sistema autónomo].

Ej 3. $\boxed{t^2x''-2tx'+2x=0}$. Posee solución única con $x(t_o)=a$, $x'(t_o)=b$ si $t_o\neq 0$.

En la próxima sección veremos que su solución general es: $x=c_1t+c_2t^2$.

La única solución que satisface $x(1)=a$, $x'(1)=b$ es $x=(2a-b)t+(b-a)t^2$ (que, como debía, es función continua de los datos iniciales). Las infinitas soluciones $x=c_2t^2$ satisfacen $x(0)=0$, $x'(0)=0$, pero no hay ninguna satisfaciendo $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

La solución con $x(1)=x'(1)=1$ (o sea, $x=t$) es inestable pues para el sistema equivalente

$\begin{cases} x'=y \\ y'=-2t^{-2}x+2t^{-1}y \end{cases}$ es inestable $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, pues $\left\|\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} (2a-b)t+(b-a)t^2 \\ (2a-b)+2(b-a)t \end{pmatrix}\right\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,

para infinitos a y b tan cercanos como queramos a 1.

(Escribir las soluciones del sistema equivalente a partir de las de la ecuación es muy sencillo: basta formar un vector cuyo primer elemento sea la solución de la ecuación y el segundo su derivada. Y si resolvemos una ecuación a partir del equivalente (poco útil como se ha dicho) lo que obtendremos es un vector en el que el segundo elemento es la derivada del de arriba, que es la solución de la ecuación).

2.2 Soluciones de sistemas y ecuaciones lineales

Sea $\boxed{\begin{cases} x'=a(t)x+b(t)y+f(t) \\ y'=c(t)x+d(t)y+g(t) \end{cases}}$. O en forma vectorial:

$$[\mathrm{S}] \ \boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)} \ , \text{ con } \ \mathbf{x}=\binom{x}{y}, \ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}=\binom{f}{g}.$$

Suponemos a, b, c, d, f, g funciones de **R** en **R** **continuas** (o sea, la matriz $\mathbf{A}(t)$ y la función vectorial $\mathbf{f}(t)$ lo son) en un intervalo I (finito o infinito, abierto o cerrado) y sea $t_o\in I$. El teorema de existencia y unicidad asegura que entonces una única solución de [S] cumple cualquier par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$, $y(t_o)=y_o$. Como ocurría en las lineales de primer orden, se puede probar que **la solución única está definida** $\forall t\in I$.

Consideremos primero el **sistema homogéneo**: [Sh] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}}$.

> Una matriz $\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$ cuyas columnas $\mathbf{x_1}=\binom{x_1}{y_1}$ y $\mathbf{x_2}=\binom{x_2}{y_2}$ son soluciones de [Sh] y tal que el determinante $|\mathbf{W}|(t_o)|\neq 0$ se llama **matriz fundamental** de [Sh].

Este teorema dice que [Sh] está resuelto conocida una $\mathbf{W}(t)$ (pero no nos dice cómo hallarla):

Teor 1.

> El conjunto V de soluciones de [Sh] es un espacio vectorial de dimensión 2. Una base de V es el conjunto $\{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\}$, soluciones que constituyen una matriz fundamental $\mathbf{W}(t)$. Por tanto, la solución general de [Sh] es:
> $$\mathbf{x}=c_1\mathbf{x_1}+c_2\mathbf{x_2}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c} \ , \quad \text{con } \mathbf{c}=\binom{c_1}{c_2} \text{ arbitrario.}$$

Es fácil probar que cualquier combinación lineal de soluciones de [Sh] es también solución.

Probemos que son base de V las soluciones $\mathbf{e_1}(t)$ y $\mathbf{e_2}(t)$ de valores iniciales $\binom{1}{0}$ y $\binom{0}{1}$:

Son linealmente independientes:

$$c_1\mathbf{e_1}(t)+c_2\mathbf{e_2}(t)\equiv\mathbf{0} \Rightarrow c_1\mathbf{e_1}(t_o)+c_2\mathbf{e_2}(t_o)=\mathbf{0} \Rightarrow c_1=c_2=0\,.$$

Toda solución $\mathbf{x}(t)=\binom{x(t)}{y(t)}$ se puede escribir como combinación lineal de ellas:

$$\mathbf{z}(t)=x(t_o)\mathbf{e_1}(t)+y(t_o)\mathbf{e_2}(t) \text{ es solución con } \mathbf{z}(t_o)=\mathbf{x}(t_o) \underset{\text{unicidad}}{\Rightarrow} \mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{z}(t) \ \forall t\in I.$$

Si $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son soluciones satisfaciendo $|\mathbf{W}|(t_o)|\neq 0$ son linealmente independientes:

$$c_1\mathbf{x_1}(t)+c_2\mathbf{x_2}(t)=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}\equiv\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{W}(t_o)\mathbf{c}=\mathbf{0} \Rightarrow c_1=c_2=0\,.$$

Un sistema tiene infinitas matrices fundamentales $\mathbf{W}(t)$. A partir de cualquiera podríamos calcular la solución de [Sh] con el dato $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ simplemente resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\mathbf{W}(t_o)\mathbf{c}=\mathbf{x_o}$, que tiene solución única por ser $|\mathbf{W}|(t_o)|\neq 0$. Pero lo podemos hacer directamente si tenemos la llamada ‘matriz fundamental canónica’:

> Se llama $\mathbf{W_c}(t)$, **matriz fundamental canónica en** t_o, a la que satisface $\mathbf{W_c}(t_o)=\mathbf{I}$.
> Dada una $\mathbf{W}(t)$, a partir de ella se puede hallar la canónica, pues $\mathbf{W_c}(t)=\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-\mathbf{1}}(t_o)$.
> La solución $\mathbf{x}$ de [Sh] que cumple $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es: $\mathbf{x}=\mathbf{W_c}(t)\mathbf{x_o}=\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-\mathbf{1}}(t_o)\mathbf{x_o}$.

Es claro que $\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-\mathbf{1}}(t_o)$ es la matriz unidad $\mathbf{I}$ en $t=t_o$ y además el producto de $\mathbf{W}(t)$ por la derecha por cualquier matriz constante no singular sigue siendo fundamental (sus columnas serán combinaciones lineales de soluciones y son, pues, soluciones, y su determinante sigue siendo no nulo). Que la última expresión satisface $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es evidente.

[Para casi ningún sistema es posible dar una $\mathbf{W}(t)$ (ni, por tanto, sus soluciones). Cuando $\mathbf{A}$ sea constante, pronto veremos cómo calcular una, precisamente la canónica). Esto es ya mucho más complicado que en las lineales de primer orden, donde la ‘matriz fundamental’ era simplemente el escalar $e^{\int a}$, expresable siempre en términos de primitivas, y si a constante la ‘matriz’ es e^{at}].

Consideremos ahora el **sistema no homogéneo**: [S] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$.

Teor 2.
a] Si $\mathbf{x_p}$ es cualquier solución de [S] y $\mathbf{W}(t)$ es una matriz fundamenta de [Sh], la solución general de [S] viene dada por $\mathbf{x}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x_p}$.
b] Una solución particular de [S] es $\mathbf{x_p}=\mathbf{W}(t)\int\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt$.
c] Si $\mathbf{W_c}(t)$ es la canónica en t_o la solución de [S] con $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es

$$\mathbf{x}=\mathbf{W_c}(t)\mathbf{x_o}+\mathbf{W_c}(t)\int_{t_o}^{t}\mathbf{W_c}^{-1}(s)\,\mathbf{f}(s)\,ds \qquad [\textbf{fvc}]$$

[Como para $n=1$, las fórmulas de b] y c] se llaman de **variación de las constantes**].

a] Sea $\mathbf{x}$ solución de [S]. Entonces $[\mathbf{x}-\mathbf{x_p}]'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}-\mathbf{A}\mathbf{x_p}-\mathbf{f}=\mathbf{A}[\mathbf{x}-\mathbf{x_p}] \Rightarrow \mathbf{x}-\mathbf{x_p}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}$ para algún $\mathbf{c}$, pues satisface [Sh]. Así pues, toda solución se puede escribir así.

b] Veamos primero que $\mathbf{W}^{-1}$ existe, es decir, que la $\mathbf{W}(t)$ es no singular $\forall t\in I$:
Si para algún $s\in I$ fuera $|\mathbf{W}|(s)=0$ existirían b_1, b_2 no los dos nulos cumpliendo que $b_1\mathbf{x_1}(s)+b_2\mathbf{x_2}(s)=\mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{x}(t)=b_1\mathbf{x_1}(t)+b_2\mathbf{x_2}(t)$ sería solución con $\mathbf{x}(s)=\mathbf{0}$.
Por unicidad sería $\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{0}$ y también $|\mathbf{W}|(t)=0$ para todo $t\in I$, en concreto para t_o.

Y como matrices y vectores se derivan como las funciones de una variable:

$$\mathbf{x_p}'=\mathbf{W}'\int\mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt+\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}=\mathbf{A}\mathbf{x_p}+\mathbf{f},$$

pues $\mathbf{W}'=\mathbf{A}\mathbf{W}$ por ser solución cada columna.

c] Por a] y b] es solución de [S]. Y además cumple el dato: $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{W_c}(t_o)\mathbf{x_o}=\mathbf{I}\,\mathbf{x_o}=\mathbf{x_o}$.

Resumiendo, **hallada una $\mathbf{W}(t)$ queda resuelto el sistema homogéneo y el no homogéneo** (y el problema de valores iniciales). Pero sólo tendremos un método para calcular la $\mathbf{W}(t)$ en caso de que la matriz $\mathbf{A}$ sea **constante**. Para ese cálculo utilizaremos definiciones y resultados algebraicos cuya demostración se puede encontrar en los libros de álgebra.

Sistemas lineales de coeficientes constantes

[C] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ y [Ch] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}}$, con $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ matriz constante.

La **exponencial** de una matriz $\mathbf{B}$ se define: $e^{\mathbf{B}}=\mathbf{I}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{B}^2+\cdots$, serie convergente para cualquier $\mathbf{B}$ (sus elementos son series numéricas convergentes).
Se tiene que $e^{\mathbf{B}}$ es no singular, que su inversa es $e^{-\mathbf{B}}$ y que $e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}}=e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}}$ si $\mathbf{BC}=\mathbf{CB}$.

La exponencial de una matriz no se calcula directamente, sino a partir de su **forma J de Jordan** (la forma más sencilla en que se puede escribir la matriz haciendo cambios de base). Aunque en general sea complicado hallar la $\mathbf{J}$ asociada a una $\mathbf{A}$, en nuestro caso $n=2$ es fácil dar tanto $\mathbf{J}$ como la matriz $\mathbf{P}$ del cambio de base:

Sea $\mathbf{A}$ una matriz 2x2 y sean λ_1, λ_2 sus autovalores $\left[\text{raíces de } |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0\right]$.
Entonces hay una matriz no singular $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A}=\mathbf{PJP}^{-1}$ donde:
a] Si $\lambda_1\neq\lambda_2$ y $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ son vectores propios asociados $\left[\text{o sea, } (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v_i}=\mathbf{0}\right]$, son $\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}=\big(\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\big)$, matriz cuyas columnas son $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$.
b] Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ y sólo existe un vector propio $\mathbf{v}$ linealmente independiente asociado son $\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}=\big(\mathbf{w}\ \mathbf{v}\big)$, $\mathbf{w}$ cualquier vector con $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}$.
c] Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ y existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a λ, entonces $\mathbf{A}$ es ya diagonal.

[Los autovalores de una $\mathbf{A}$ real pueden ser reales o complejos conjugados.
En este último caso la $\mathbf{J}$ y la $\mathbf{P}$ serán complejas, pero $\mathbf{PJP}^{-1}$ será real].

Teor 3. $\boxed{\mathbf{W_c}(t)=e^{\mathbf{A}(t-t_o)} \text{ es la matriz fundamental canónica en } t_o \text{ de [Ch].}}$

En efecto, $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}=\mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^{k-1}}{(k-1)!}=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$, admitiendo que se puede derivar la serie término a término y eligiendo $t_o=0$ por comodidad en la escritura. Es, pues, $e^{\mathbf{A}(t-t_o)}$ matriz fundamental pues cada una de sus columnas cumple también [Ch]. Como $e^{\mathbf{A}(t_o-t_o)}=\mathbf{I}$, es la canónica.

Hemos reducido el problema de resolver [C] al de hallar la exponencial de $\mathbf{A}t$ (del producto del escalar t por la matriz $\mathbf{A}$). Usando la $\mathbf{J}$ asociada a la $\mathbf{A}$ es fácilmente calculable, pues $e^{\mathbf{A}t}$ está relacionada con $e^{\mathbf{J}t}$ de la misma forma que la $\mathbf{A}$ con la $\mathbf{J}$:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\,\mathbf{P^{-1}}}\ \text{, ya que}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{PJ}^k\mathbf{P^{-1}}t^k}{k!}=\mathbf{P}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{J}^k t^k}{k!}\,\mathbf{P^{-1}}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P^{-1}},\ \text{pues } \mathbf{A}^k=\mathbf{PJP^{-1}}\cdots\mathbf{PJP^{-1}}=\mathbf{PJ^kP^{-1}}.$$

Y $e^{\mathbf{J}t}$ es fácil de hallar en las dos posibles situaciones que ofrece Jordan para $n=2$:

$$\boxed{\textbf{a]}\ \text{Si } \mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix},\ \text{es } e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\0&e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}.\quad \textbf{b]}\ \text{Si } \mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda&0\\1&\lambda\end{pmatrix},\ \text{es } e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}e^{\lambda t}.}$$

a] Utilizando la definición: $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1 t&0\\0&\lambda_2 t\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\lambda_1^2t^2&0\\0&\lambda_2^2t^2\end{pmatrix}+\cdots=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\0&e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$.

b] Como $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\mathbf{D}+\mathbf{N}$, $e^{\mathbf{J}t}=e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{N}t}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&0\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\t&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}e^{\lambda t}$.

De lo anterior y de la [**fvc**] del teorema 2 deducimos la **fórmula de variación de las constantes** para la solución de [C] que satisface el dato inicial $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$:

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}(t-t_o)}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x_o}+\mathbf{P}\int_{t_o}^{t}e^{\mathbf{J}(t-s)}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{f}(s)\,ds}$$

donde todas las matrices son calculables (hallada la $e^{\mathbf{J}t}$, basta cambiar t por $t-t_o$ o por $t-s$ para tener las otras). Insistimos en que los autovalores λ y las matrices $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^{-1}$ y $e^{\mathbf{J}t}$ pueden ser complejos, pero si $\mathbf{A}$ es real han de ser $e^{\mathbf{A}t}$ y la solución $\mathbf{x}$ también reales.

Para hacer los cálculos de esta fórmula es aconsejable efectuar las operaciones de derecha a izquierda, de forma que sólo haya que multiplicar matrices por vectores (y no matrices por matrices lo que es mucho más largo y mayor fuente de errores).

Si lo que necesitamos es simplemente la **solución general** nos podríamos ahorrar algunos cálculos (por ejemplo de matrices inversas), pues no necesitamos la canónica.
Por ejemplo, $\mathbf{W}(t)=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}$ es matriz fundamental de [Ch] (es producto por la derecha de la matriz canónica por la $\mathbf{P}$ no singular) y de ello deducimos que:

$$\boxed{\text{La solución general del sistema homogéneo [Ch] es } \mathbf{x}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\mathbf{c},\ \text{con } \mathbf{c} \text{ arbitrario.}}$$

En el caso de que A sea diagonalizable tenemos una solución general aún más explícita:

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\mathbf{c}=c_1\,e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+c_2\,e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}}\ .$$

Expresión inadecuada si los λ son complejos, pues queda $\mathbf{x}$ expresada en términos complejos (en ese caso a veces será mejor seguir otros caminos que describiremos).

Lleguemos esta solución general de una forma directa, que puede dar idea de cómo utilizar matrices incluso para $\mathbf{A}$ no diagonalizables y sin conocer la forma de Jordan. Comprobemos primero que:

$$\boxed{\lambda \text{ autovalor de } \mathbf{A},\ \text{y } \mathbf{v} \text{ vector propio asociado} \Rightarrow \mathbf{x}=e^{\lambda t}\mathbf{v} \text{ es solución de [Ch].}}$$

Esto es cierto, ya que $\mathbf{x}'=\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v}=\mathbf{A}e^{\lambda t}\mathbf{v}=\mathbf{Ax}$ y se cumple que $\lambda\mathbf{v}=\mathbf{Av}$.

Si hay 2 vectores propios linealmente independientes, habrá 2 soluciones de esa forma, que formarán una matriz fundamental $\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1} & e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}\end{pmatrix}$, pues $|\mathbf{W}|(t)\neq 0$ por ser los $\mathbf{v_k}$ independientes.
Basta entonces escribir $\mathbf{x}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}$ para obtener el resultado de arriba.

Ej 1. Resolvamos $\boxed{\begin{cases} x' = 2x+y \\ y' = 3x+4y+e^t \end{cases} \text{ con } x(0)=0,\, y(0)=1}$, es decir, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

[Sabemos que dicha solución es única y que está definida para todo $t\in\mathbf{R}$].

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-6\lambda+5=0 \to \lambda_1=5 \text{ y } \lambda_2=1. \text{ Por tanto, } \mathbf{J}=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix},\ e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{5t}&0\\0&e^t\end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.\quad (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{P^{-1}}=\tfrac{1}{-4}\begin{pmatrix}-1&-1\\-3&1\end{pmatrix}=\tfrac14\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}.$$

$\Big[$**Hallar la inversa de una matriz 2x2 es casi inmediato**: $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{P^{-1}}=\frac{1}{|\mathbf{P}|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

se cambian a y d de sitio, b y c de signo y se divide por el determinante$\Big]$.

Por tanto: $\mathbf{x}(t)=\frac14\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac14\mathbf{P}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\e^s\end{pmatrix}ds$

$$=\tfrac14\mathbf{P}\begin{pmatrix}e^{5t}&0\\0&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\tfrac14\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{5(t-s)}&0\\0&e^{t-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^s\\-e^s\end{pmatrix}ds=\tfrac14\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5t}\\-e^t\end{pmatrix}+\tfrac14\mathbf{P}\begin{pmatrix}\int_0^t e^{5t-4s}ds\\-\int_0^t e^t ds\end{pmatrix}$$

$$=\tfrac14\begin{pmatrix}e^{5t}-e^t\\3e^{5t}+e^t\end{pmatrix}+\tfrac14\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14[e^{5t}-e^t]\\-te^t\end{pmatrix}=\tfrac{1}{16}\begin{pmatrix}5e^{5t}-5e^t-4te^t\\15e^{5t}+e^t+4te^t\end{pmatrix}$$

Si queremos la **solución general**, los cálculos son algo más cortos. La solución general de la homogénea $\mathbf{x_h}$ se escribe rápidamente una vez hallados los autovalores y vectores propios:

$$\mathbf{x_h}=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{c}=\begin{pmatrix}e^{5t}&e^t\\3e^{5t}&-e^t\end{pmatrix}\mathbf{c}=c_1e^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\ \big[=c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}+c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}\big].$$

Para la solución particular de la no homogénea y la [**fvc**] sí se necesita hallar alguna inversa:

$$\mathbf{W^{-1}}(t)=\tfrac14\begin{pmatrix}e^{-5t}&e^{-5t}\\3e^{-t}&-e^{-t}\end{pmatrix},\ \mathbf{x_p}=\mathbf{W}(t)\int\mathbf{W^{-1}}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt=\tfrac{1}{16}\mathbf{W}(t)\begin{pmatrix}-e^{-4t}\\-4t\end{pmatrix}=\tfrac{1}{16}\begin{pmatrix}-e^t-4te^t\\-3e^t+4te^t\end{pmatrix}.$$

Tanteando con los términos con e^t de la $\mathbf{x_p}$ y la constante c_2, podemos poner esta solución general del sistema algo más corta:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x_h}+\mathbf{x_p}=c_1e^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\tfrac14e^t\begin{pmatrix}-t\\t-1\end{pmatrix}$$

Ej 2. Hallemos la solución general de $\boxed{\begin{cases}x'=x-y+1\\y'=2x-2y\end{cases}}$ y la que cumple $x(0)=y(0)=2$.

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2+\lambda=0$, $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=-1\to$ $\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Por tanto, $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $|\mathbf{P}|=1\Rightarrow\mathbf{P^{-1}}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

La solución general del sistema homogéneo siempre es fácil: $c_1\mathbf{v_1}+c_2e^{-t}\mathbf{v_2}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$.

Para una particular podemos usar que una $\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix}1&e^{-t}\\1&2e^{-t}\end{pmatrix}\to\mathbf{W^{-1}}(t)=\begin{pmatrix}2&-1\\-e^t&e^t\end{pmatrix}$.

Y, con la [**fvc**] se tiene: $\mathbf{x_p}=\mathbf{W}\int\mathbf{W^{-1}}\,\mathbf{f}\,dt=\mathbf{W}(t)\int\begin{pmatrix}2\\-e^t\end{pmatrix}dt=\mathbf{W}(t)\begin{pmatrix}2t\\-e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-1\\2t-2\end{pmatrix}$.

¿Habrá formas de calcular las $\mathbf{x_p}$ tanteando? Algo diremos en el próximo problema.

La solución general del sistema es, pues: $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}c_1+c_2e^{-t}+2t+1\\c_1+2c_2e^{-t}+2t\end{pmatrix}$ [cambiando algo la c_1].

Imponiendo los datos llegamos a la solución: $\begin{matrix}c_1+c_2+1=2\\c_1+2c_2=2\end{matrix}\to c_1=0,\ c_2=1.$ $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}e^{-t}+2t+1\\e^{-t}+2t\end{pmatrix}$.

Volvamos a usar la fórmula de la página anterior para obtener este resultado:

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\mathbf{P}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}ds=\mathbf{P}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix}2\\-e^{s-t}\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\mathbf{P}\begin{pmatrix}2t\\e^{-t}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}+2t+1\\e^{-t}+2t\end{pmatrix}.$$

Ej 3. Resolvemos $\boxed{\begin{cases} x'=x-y+2 \\ y'=x+y \end{cases}}$ con $\boxed{\begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{matrix}}$ $\to\ \mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=(\lambda-1)^2+1=0\ \to\ \lambda=1\pm\mathrm{i}\ \to$$

$$e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} e^{t+\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{t-\mathrm{i}t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t[\cos t+\mathrm{i}\operatorname{sen} t] & 0 \\ 0 & e^t[\cos t-\mathrm{i}\operatorname{sen} t] \end{pmatrix}.$$

[Recordemos que $e^{a\pm\mathrm{i}b}=e^a[\cos b\pm\mathrm{i}\operatorname{sen} b]$ y que, por tanto,
$e^{\mathrm{i}b}+e^{-\mathrm{i}b}=2\cos b$, $e^{\mathrm{i}b}-e^{-\mathrm{i}b}=2\mathrm{i}\operatorname{sen} b$].

$$\big(\mathbf{A}-[1\pm\mathrm{i}]\mathbf{I}\big)\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\ \mathbf{v}_\pm=\begin{pmatrix} \pm\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\ \mathbf{P}=\begin{pmatrix} i & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{P^{-1}}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big[\text{comprobamos: } \mathbf{P}\,\mathbf{P^{-1}}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2i^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Big].$$

$$\mathbf{x}(t)=\tfrac{1}{2}\,\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{P}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}ds=\tfrac{1}{2}\,e^t\,\mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t} \\ e^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix}+\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix} -ie^{(1+\mathrm{i})(t-s)} \\ ie^{(1-\mathrm{i})(t-s)} \end{pmatrix}ds$$

$$\Big[-\mathrm{i}\int_0^t e^{(1+\mathrm{i})(t-s)}ds=\tfrac{i}{1+i}\big[e^{(1+\mathrm{i})(t-s)}\big]_0^t=\tfrac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{1+1}\big[1-e^{(1+\mathrm{i})t}\big]\ \text{ y análoga la otra}\Big]$$

$$=e^t\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{P}\begin{pmatrix} [1+\mathrm{i}][1-e^{(1+\mathrm{i})t}] \\ [1-\mathrm{i}][1-e^{(1-\mathrm{i})t}] \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2+[\mathrm{i}-1]e^{(1+\mathrm{i})t}+[\mathrm{i}-1]e^{(1-\mathrm{i})t} \\ 2-[1+\mathrm{i}]e^{(1+\mathrm{i})t}-[1-\mathrm{i}]e^{(1-\mathrm{i})t} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -e^t\operatorname{sen} t \\ e^t\cos t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1+e^t[\cos t+\operatorname{sen} t] \\ 1+e^t[-\cos t+\operatorname{sen} t] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t\cos t-1 \\ e^t\operatorname{sen} t+1 \end{pmatrix}$$

Está claro que trabajar con autovalores complejos complica mucho los cálculos. Por suerte conoceremos otros caminos para resolver estos sistemas: pronto veremos como convertirlos en ecuaciones de segundo orden (mucho más manejables).

Para este sistmema concreto con $\mathbf{f}(t)$ **constante** (que son los que pueden aparecer en el capíitulo 3) podíamos haber atajado buscando una solución del sistema no homogéneo que fuese también constante (no siempre existirá, pues debe ser el determinante $|\mathbf{A}|\neq 0$, o lo que es lo mismo, no ser $\lambda=0$ autovalor, por eso no hay soluciones constantes en el ejemplo 2). Basta resolver el sistema

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y=0 \end{cases}\quad \text{para obtenerla: } x=-1\,,\ y=1\ \to\ \mathbf{x_p}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nos falta ya sólo sumar a $\mathbf{x_p}$ la solución general del sistema homogéneo $c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_+ + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_-$ e imponer los datos:

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} c_1\,\mathrm{i}\,e^{t+\mathrm{i}t}-c_2\,\mathrm{i}\,e^{t-\mathrm{i}t}-1 \\ c_1\,e^{t+\mathrm{i}t}+c_2\,e^{t-\mathrm{i}t}+1 \end{pmatrix}\xrightarrow{d.i.}\ \begin{matrix} c_1\,\mathrm{i}-c_2\,\mathrm{i}=1 \\ c_1+c_2=0 \end{matrix}\ \to\ c_1=\tfrac{1}{2\mathrm{i}}\,,\ c_2=-\tfrac{1}{2\mathrm{i}}\ \to$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t[e^{\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}t}]-1 \\ \frac{1}{2i}e^t[e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}]+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t\cos t-1 \\ e^t\operatorname{sen} t+1 \end{pmatrix}$$

Si sólo queremos la solución general en términos de funciones reales podemos hallar $\mathbf{P}^{-1}$ y calcular hasta el final la matriz canónica:

$$e^{\mathbf{A}t}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t+\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{t-\mathrm{i}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t\cos t & -e^t\operatorname{sen} t \\ e^t\operatorname{sen} t & e^t\cos t \end{pmatrix}\to\ \mathbf{x}=e^{\mathbf{A}t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[Con esta matriz fundamental real podríamos hallar una $\mathbf{x_p}$ (y no sólo en este caso de $\mathbf{f}$ constante) realizando integraciones de funciones reales. Pero esto tampoco ahorra tiempo porque, por ejemplo, es más rápido hallar una primitiva de $e^{(1+\mathrm{i})t}$ que de $e^t\cos t$ (hay que utilizar dos veces partes para volver a encontrar la integral inicial)].

La teoría de los sistemas generales de orden n es la misma que la nuestra de orden 2 , pero en la práctica pocos son resolubles, por la sencilla razón de que sus autovalores casi nunca son calculables. Y además se complica bastante la teoría de Jordan.

Dejemos los sistemas y pasemos a estudiar las ecuaciones lineales de orden dos que, como vimos en 2.1, se pueden mirar como un caso particular de ellos. Será cuestión de ir viendo la forma que adoptan los resultados vistos para el ‘sistema equivalente’ a una ecuación. Este no es el camino más corto para tratarlas. De hecho, sus teoremas se pueden probar sin usar matrices y normalmente los libros de ecuaciones diferenciales las estudian primero.

Ecuaciones lineales de segundo orden

Consideremos [e] $\boxed{x''+a(t)x'+b(t)x=f(t)}$, con a, b y f continuas en I.

Sabemos que hay solución única definida en todo el intervalo I para cada par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$, $x'(t_o)=x'_o$ si $t_o\in I$. Haciendo $x'=y$ se tiene el sistema

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=-b(t)x-a(t)y+f(t) \end{cases},\ \text{cuyas soluciones serán funciones vectoriales } \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ x'\end{pmatrix}.$$

El sistema está resuelto conociendo una matriz fundamental $\mathbf{W}(t)$. Para ello basta dar **dos soluciones** x_1 **y** x_2 **de la ecuación homogénea** asociada a [e] (pues la fila inferior de la matriz serán sus derivadas x'_1 y x'_2) tales que sea no nulo en algún $s\in I$ el llamado

determinante wronskiano de x_1 y x_2: $|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ x'_1 & x'_2\end{vmatrix}$.

La solución general de [e] será entonces la primera componente del vector:

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{W}(t)\int \mathbf{W}^{-1}(t)\begin{pmatrix}0\\ f(t)\end{pmatrix}dt\,,\quad \text{y como}\quad \mathbf{W}^{-1}(t)=\frac{1}{|\mathbf{W}|(t)}\begin{pmatrix} x'_2(t) & -x_2(t)\\ -x'_1(t) & x_1(t)\end{pmatrix},$$

unas pocas operaciones nos permiten concluir de los teoremas para sistemas que:

Teor 4.

a] Sean x_1 y x_2 soluciones de la homogénea tales que $|\mathbf{W}|(s)\neq 0$ para algún $s\in I$. Entonces la solución general de la homogénea es $x_h=c_1x_1+c_2x_2$.

b] Si x_p es una solución de [e] su solución general es: $x=c_1x_1+c_2x_2+x_p$.

c] Una solución particular de [e] es: $x_p=x_2\int\frac{x_1 f}{|\mathbf{W}|}\,dt-x_1\int\frac{x_2 f}{|\mathbf{W}|}\,dt$.

Fórmula de variación de las constantes [fvc].

La expresión de las dos soluciones en términos de funciones elementales se podrá dar sólo en los pocos casos que describiremos (si no, se debe resolver la ecuación por medio de series).

Resolvamos la **ecuación con coeficientes constantes**: [c] $\boxed{x''+ax'+bx=f(t)}$.

Llamemos [ch] a la **ecuación homogénea** ($f\equiv 0$). La matriz del sistema asociado:

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -b & -a\end{pmatrix}$, tiene por **ecuación característica** $\boxed{P(\lambda)\equiv\lambda^2+a\lambda+b=0}$.

Como los elementos del vector real $\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}$, solución general del sistema homogéneo, están formados por combinaciones lineales arbitrarias de los elementos de la matriz $e^{\mathbf{J}t}$, la **solución general de** [ch] es, según sean las raíces de $P(\lambda)$:

Si $\lambda_1\neq\lambda_2$ reales, $x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$.
Si λ doble (real), $x=(c_1+c_2t)e^{\lambda t}$.
Si $\lambda=p\pm qi$, $x=(c_1\cos qt+c_2\operatorname{sen} qt)e^{pt}$.

pues $e^{\mathbf{J}t}$ es: $\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}e^{\lambda t}$ ó $\begin{pmatrix}e^{pt}[\cos qt+i\operatorname{sen} qt] & 0\\ 0 & e^{pt}[\cos qt-i\operatorname{sen} qt]\end{pmatrix}$

[Se puede dar la solución sin usar el sistema equivalente: probando en [ch] soluciones del tipo $x=e^{\lambda t}$ se deduce que λ debe satisfacer la ecuación característica $P(\lambda)=0$. Si $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbf{R}$ es claro que el $|\mathbf{W}|$ de $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ es no nulo. Si λ doble, se comprueba que $te^{\lambda t}$ también es solución y que es $\neq 0$ el $|\mathbf{W}|$ de ambas. Y si $\lambda\in\mathbf{C}$ se utiliza que parte real e imaginaria de una solución compleja también lo son].

Para calcular una solución particular de la no homogénea [c] disponemos siempre de la fórmula de **variación de las constantes,** pero en muchas ocasiones será preferible utilizar el método de los **coeficientes indeterminados** que pronto describiremos.

Ej 4. $\boxed{x''+4x'+3x=0}$, $\lambda^2+4\lambda+3=0\to\lambda=-1,-3\to x=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}$.

$\boxed{x''+4x'+4x=0}$, $\lambda^2+4\lambda+4=0\to\lambda=-2$ doble $\to x=(c_1+c_2x)e^{-2t}$.

$\boxed{x''+4x'+5y=0}$, $\lambda^2+4\lambda+5=0\to\lambda=-2\pm i\to x=(c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t)e^{-2t}$.

Ej 5. $\boxed{x''-2x'+x=6te^t\,,\ x(1)=x'(1)=0}$ $\lambda^2-2\lambda+1=0\to\lambda=1$ doble $\to x_h=(c_1+c_2t)\,e^t$.

$$|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix}=e^{2t}\to x_p=6te^t\int\frac{e^tte^t}{e^{2t}}dt-6e^t\int\frac{te^tte^t}{e^{2t}}dt=t^3e^t\to x=(c_1+c_2t)e^t+t^3e^t.$$

De los datos iniciales: $\left.\begin{matrix} x(1)=[c_1+c_2+1]e=0 \\ x'(1)=[c_1+2c_2+4]e=0 \end{matrix}\right\}\to x=(2-3t+t^3)\,e^t$, solución buscada.

Hallemos la x_p de otro modo, introduciendo los **coeficientes indeterminados**. La idea es probar una x_p 'similar' a $f(t)$. Una buena candidata a x_p es un polinomio multiplicado por e^t pues sus derivadas son del mismo tipo. En principio pensaríamos en $x_p=e^t[At+B]$, pero al figurar ya e^t y te^t en x_h, habrá que incluir otras potencias de t. El siguiente teorema precisará la candidata $x_p=t^2e^t[At+B]$, con A y B adecuados. Para fijarlos llevamos a la ecuación x_p y sus derivadas:

$$x_p'=e^t[At^3+(B+3A)t^2+2Bt] \ \text{ y } \ x_p''=e^t[At^3+(B+6A)t^2+(4B+6A)t+2B]$$

obteniendo $[6At+2B]e^t=6te^t \Rightarrow B=0$, $A=1$. Así hallamos de nuevo la $x_p=t^3e^t$. Aquí parece más largo este camino que la [fvc], pero en muchos otros ahorra el cálculo de largas primitivas.

Aunque sea **muy mal camino**, repasemos las matrices resolviendo el sistema equivalente:

$$\left\{\begin{matrix} x'=y \\ y'=-x+2y+6te^t \end{matrix}\right.\text{, o sea, } \mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 6te^t \end{pmatrix},\ \mathbf{x}(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\ \lambda=1 \text{ doble}\to e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}e^t$$

[nunca la matriz de un sistema proveniente de una ecuación es diagonal].

El único (salvo producto por un escalar) vector $\mathbf{v}$ asociado al $\lambda=1$ doble es $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Escogemos $\mathbf{w}$ tal que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{w}=\mathbf{v}$, por ejemplo $\mathbf{w}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\to\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P^{-1}}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\to\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\int_1^t e^{t-s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6se^s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} t^3-3t+2 \\ t^3+3t^2-3t-1 \end{pmatrix}e^t$$ [su x es la de antes y su y es la x'].

Cuando $f(t)$ está formada por polinomios, exponenciales, senos y cosenos se puede usar el **método de los coeficientes indeterminados** (del tanteo organizado). Se lleva a [c] una x_p similar a $f(t)$ con constantes arbitrarias que se precisan resolviendo sistemas lineales:

Teor 5.

a] Si $f(t)=e^{\lambda t}p_k(t)$, con p_k polinomio de grado k, y λ no es autovalor de [ch] existe una solución particular de [c] de la forma $x_p=e^{\lambda t}P_k(t)$, donde P_k es otro polinomio de grado k cuyos coeficientes se precisan llevando x_p a [c]. Si λ es autovalor de multiplicidad r, $x_p=t^re^{\lambda t}P_k(t)$.

b] Si $f(t)=e^{pt}\big[p_j(t)\cos qt+q_k(t)\operatorname{sen} qt\big]$, p_j y q_k de grados j y k, y $p\pm iq$ no es autovalor hay $x_p=e^{pt}\big[P_m(t)\cos qt+Q_m(t)\operatorname{sen} qt\big]$, con P_m y Q_m de grado $m=$máx$\{j,k\}$. Si $p\pm iq$ es autovalor hay $x_p=t\,e^{pt}\big[P_m(t)\cos qt+Q_m(t)\operatorname{sen} qt\big]$.

c] Si $f(t)=f_1(t)+\cdots+f_m(t)$ y $L[x_i]=f_i(t) \Rightarrow L[x_1+\cdots+x_m]=f(t)$.

[En particular, si $\lambda=0$, o sea, si $f(t)$ es un polinomio, bastará probar según **a]** un polinomio adecuado, y desde luego entendemos una constante como un polinomio de grado 0].

Ej 6. Hallemos x_p de $\boxed{x''+x=f(t)}$ para varias $f(t)$. Su solución será $x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+x_p$.

Si $\boxed{f(t)=2e^t}$, existe $x_p=Ae^t=x_p'=x_p''\to 2Ae^t=2e^t\to A=1$, $x_p=e^t$. Mucho más largo con la [fvc]:

$$|\mathbf{W}|(t)=1\to x_p=\operatorname{sen} t\int 2e^t\cos t\,dt-\cos t\int 2e^t\operatorname{sen} t\,dt=\cdots=se^t[c+s]-ce^t[s-c]=\tfrac{1}{2}[s^2+c^2]e^t=e^t.$$

Si $\boxed{f(t)=t^3}$, hay $x_p=At^3+Bt^2+Ct+D$ (polinomio de grado 3 pues $\lambda=0$ no es autovalor)

$\to 6At+2B+At^3+Bt^2+Ct+D=t^3\to A=1, B=0, C=-6A=-6, D=-2B=0$, $x_p=t^3-6t$.

Si $\boxed{f(t)=e^t\cos t}$, hay $x_p=e^t(A\cos t+B\operatorname{sen} t)$ [hay $\lambda=\pm i$, no $1\pm i$, y debe estar $\operatorname{sen} t$]

$\to(A+2B)\cos t+(B-2A)\operatorname{sen} t=\cos t\to\left\{\begin{matrix} A+2B=1 \\ B-2A=0 \end{matrix}\right.\to x_p=e^t\big(\tfrac{1}{5}\cos t+\tfrac{1}{5}\operatorname{sen} t\big)$.

Si $\boxed{f(t)=\operatorname{sen} t}$, como $\pm i$ es autovalor (es decir, como [ch] ya tiene soluciones de esa forma):

$$x_p=t\,(A\cos t+B\operatorname{sen} t)\to 2B\cos t-2A\operatorname{sen} t=\operatorname{sen} t\to x_p=-\tfrac{t}{2}\cos t.$$

Si $\boxed{f(t)=\cos^2 t}$, aparentemente no podemos utilizar coeficientes indeterminados, pero como

$$\cos^2 t=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\to\text{ existe } x_p=A+B\cos 2t+C\operatorname{sen} 2t\to x_p=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}\cos 2t.$$

Si $\boxed{f(t)=\tan t}$, necesitamos la fórmula de variación de las constantes:

$$x_p=\operatorname{sen} t\int\operatorname{sen} t\,dt-\cos t\int\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}dt=-sc+sc-c\int\frac{dt}{c}\overset{u=s}{=}\int\frac{du}{1-u^2}=\cdots=-\cos t\,\ln\frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}.$$

Aunque es perder el tiempo pasar de ecuaciones a sistemas, en cambio, **sí es práctico convertir un sistema dado en una ecuación de mayor orden** (sobre todo si los autovalores son complejos).

Ej 3*. Volvamos a resolver el ejemplo 3: $\boxed{\begin{cases} x'=x-y+2 \\ y'=x+y \end{cases},\ \begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{matrix}}$.

Despejemos la x de la segunda ecuación (más corta que la otra): $x=y'-y$.

Sustituyendo en la primera: $y''-y'=y'-y-y+2$, $y''-2y'+2y=2$.

La solución general de la homogénea la da la ecuación característica (la misma que la de la matriz) y la solución particular aquí salta a la vista $y_p=1$ (con la fórmula de variación de las constantes sería largo y el método de coeficientes indeterminados sugiere probar una constante). Así pues:

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \to \lambda=1\pm i \to y=(c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t)\,e^t+1$$

Con los datos iniciales: $y(0)=1$, $y'(0)=x(0)+y(0)=1$, obtenemos la y de antes: $y=e^t\operatorname{sen} t+1$.

Y simplemente sustituyendo esta y obtenemos la x : $x=y'-y=e^t\cos t-1$.

Ej 2*. Y ahora el ejemplo 2: $\boxed{\begin{cases} x'=x-y+1 \\ y'=2x-2y \end{cases},\ \begin{matrix} x(0)=2 \\ y(0)=2 \end{matrix}}$. Llevando $x=y+\frac{1}{2}y'$ a la primera:
$y'+\frac{1}{2}y''=y+\frac{1}{2}y'-y+1$, $y''+y'=2$.

$\lambda=0,-1$ dan las soluciones de la homogénea. Y para la y_p , por ser $\lambda=0$ autovalor, probamos:

$y_p=At \to A=2$, $y_p=2t$ [o a ojo]. La solución general es $y=c_1+c_2e^{-t}+2t$.

De los datos $y(0)=2$, $y'(0)=4-4=0$ obtenemos $c_2=2$, $c_1=0$, $y=2e^{-t}+2t$.

Y, por tanto, $x=2e^{-2t}+2t+\frac{1}{2}\big(-2e^{-t}+2\big)=e^{-2t}+2t+1$, como con las matrices.

Consideremos para acabar otros tres casos de ecuaciones lineales de segundo orden [e], ahora con **coeficientes variables**, que son resolubles por métodos elementales.

i) Ecuaciones de Euler: [u] $\boxed{t^2x''+atx'+bx=h(t)}$, $t>0$.

Haciendo el cambio de variable independiente $t=e^s$: $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dx}{ds}$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\Big[\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\Big]$,

[u] se convierte en la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$\frac{d^2x}{ds^2}+(a-1)\frac{dx}{ds}+bx=h(e^s)$, de ecuación característica $\boxed{Q(\lambda)\equiv\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0}$.

Como conocemos las soluciones de la homogénea para la segunda ecuación, deshaciendo el cambio ($s=\ln t$), tenemos la solución general de una ecuación de **Euler homogénea**:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ reales, } x=c_1t^{\lambda_1}+c_2t^{\lambda_2} \\ \text{Si } \lambda \text{ doble (real), } x=(c_1+c_2\ln t)t^{\lambda} \\ \text{Si } \lambda=p\pm qi\text{, } x=\big[c_1\cos(q\ln t)+c_2\operatorname{sen}(q\ln t)\big]t^p \end{array}}$$

[Observemos que la ’ecuación característica’ de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma t^λ].

Para hallar la x_p de la no homogénea dispondremos siempre de la **fórmula de variación de las constantes con** $f(t)=h(t)/t^2$ (y para la ecuación de coeficientes constantes en s del método de **coeficientes indeterminados**, **si** $h(e^s)$ **es del tipo adecuado**).

Ej 7. Resolvamos $\boxed{t^2x''+tx'-x=t}$ La ’ecuación característica’ es $\lambda^2+(1-1)\lambda-1=0 \to \lambda=\pm1$

$\to$ la homogénea tiene por solución general $x_h=c_1t+c_2t^{-1}$ (que es válida en este caso $\forall t\neq0$).

$$|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2}\end{vmatrix}=-2t^{-1} \text{ y } f(t)=t^{-1} \to x_p=t^{-1}\int\frac{t\,t^{-1}dt}{-2t^{-1}}-t\int\frac{t^{-1}t^{-1}dt}{-2t^{-1}}=\frac{t}{2}\ln t-\frac{t}{4}$$

$\to$ la solución general de la no homogénea es $x=c_1t+c_2t^{-1}+\frac{t}{2}\ln t$ (englobado el $\frac{t}{4}$ en c_1t).

La x_p se podría calcular utilizando coeficientes indeterminados en la ecuación $x''-x=e^s$ a la que conduce el cambio $t=e^s$. La x_p que deberíamos probar en la ecuación en s es $x_p=Ase^s$ (por ser $\lambda=1$ autovalor), o lo que es lo mismo, podríamos probar $x_p=At\ln t$ en la de Euler inicial. Haciéndolo llegamos a la misma solución general:

$$x_p'=A(\ln t+1)\text{ , } x_p''=\frac{A}{t} \to 2At=1\text{ , } A=\tfrac{1}{2} \text{ como antes.}$$

ii) Si en la ecuación [e] **es** $b(t)\equiv 0$: $\boxed{x''+a(t)x'=f(t)}$,

el cambio $x'=y$ **convierte dicha ecuación en una lineal de primer orden en** y, resoluble con la fórmula del capítulo 1. Integrando y obtendremos la x.

Observemos que el cambio anterior reduce también una ecuación **no lineal** en la que no aparece la x en una de primer orden, tal vez resoluble: $x''=g(t,x')\to y'=g(t,y)$; este es uno de los pocos casos de ecuaciones no lineales que se pueden resolver elementalmente).

Ej 8. Calculemos la solución general de $\boxed{tx''-2x'=t\cos t}$.

$$x'=y\to y'=\tfrac{2y}{t}+\cos t\to y=Ct^2+t^2\int\tfrac{\cos t}{t^2}dt\to x=K+Ct^3+\int\big[t^2\int\tfrac{\cos t}{t^2}dt\big]dt$$

(primitivas que no son calculables elementalmente).

Es también de Euler ($a=-2$, $b=0$, $h(t)=t^2\cos t$) y se puede resolver como el ejemplo 7:

$\lambda^2-3\lambda=0\to\lambda=0,3\to x_h=c_1+c_2t^3$, solución de la homogénea. $|\mathbf{W}|(t)=3t^2\to$

$x=c_1+c_2t^3+t^3\int\frac{\cos t}{3t^2}dt-\int\frac{\cos t}{3t}dt$, que debe poderse hacer coincidir con la de antes.

iii) Si conocemos una solución x_1 **de la homogénea** $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ **, el cambio** $\boxed{x=x_1\int u\,dt}$ **lleva la ecuación** [e] **a lineal de primer orden en** u.

[No son, por tanto, necesarias las dos soluciones que exigía el teorema 4; basta sólo hallar una; el problema es que en pocas ocasiones podremos encontrar esa solución: a veces a simple vista, a veces tanteando, a veces aparece al resolverla por series].

En efecto, llevando x , $x'=x_1'\int u\,dt+x_1u$, $x''=x_1''\int u\,dt+2x_1'u+x_1u'$ a [e]:

$$x_1u'+(2x_1'+ax_1)u+(x_1''+ax_1'+bx_1)\int u\,dt=f(t)\to u'=-\big(2x_1'x_1^{-1}+a\big)u+f(t)x_1^{-1}$$

pues x_1 satisface la homogénea. El conocimiento de la x_1 permite hallar también (sin necesidad de hacer el cambio) una **segunda solución** x_2 **de la homogénea**, pues integrando la ecuación en u con $f(t)=0$:

$$u=e^{-\int a\,dt}x_1^{-2}\to\boxed{x_2=x_1\int\frac{e^{-\int a\,dt}}{x_1^2}\,dt}\,.$$

$\big[$El a, desde luego, es el de la ecuación escrita en la forma de arriba $x''+a(t)x'+\cdots$. Se usa bastantes veces esta fórmula resolviendo por series ecuaciones homogéneas$\big]$.

Ej 9. Resolvamos $\boxed{t^3x''-tx'+x=1}$. $x_1=t$ es solución de la homogénea.

[Las únicas soluciones de la homogénea que pueden saltar a la vista son las rectas $x=t+b$ (pues entonces el término con x'' no aparece y basta mirar los otros dos)].

Para resolver la ecuación dada podemos ahora seguir dos caminos diferentes:

1) Efectuar explícitamente el cambio $x=t\int u$, $x'=\int u+tu$, $x''=2u+tu'$,

para convertir la ecuación inicial en la lineal de primer orden no homogénea:

$$t^4u'+\big(2t^3-t^2\big)u=1\to u'=\big(t^{-2}-2t^{-1}\big)u+t^{-4}\,.$$

Resolver esta lineal: $u=c_2t^{-2}e^{-1/t}+t^{-2}e^{-1/t}\int t^{-2}e^{1/t}dt=c_2t^{-2}e^{-1/t}-t^{-2}$.

Y deshacer el cambio: $x=t\Big(c_1+c_2\int t^{-2}e^{-1/t}dt-\int t^{-2}dt\Big)=c_1t+c_2t\,e^{-1/t}+1$.

[No olvidemos la constante de integración; deben aparecer 2 constantes arbitrarias].

2) Hallar otra solución de la homogénea con la fórmula: $x_2=t\int\frac{e^{-\int -t^{-2}dt}}{t^2}\,dt=te^{-1/t}$

y calcular una x_p de la no homogénea con la fórmula de variación de constantes:

$$|\mathbf{W}|(t)=e^{-1/t}\to x_p=te^{-1/t}\int t^{-2}e^{1/t}dt-t\int t^{-2}dt=t+1\to x=c_1t+c_2te^{-1/t}+1$$

[Todo el trabajo con la no homogénea ha sido absolutamente inútil y perfectamente podíamos habérnoslo ahorrado, porque la $x_p=1$ se veía también a simple vista].

2.3 Estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales

Para $y' = a(t)y + f(t)$ la estabilidad la ecuación la daba la $e^{\int a}$, es decir, la 'matriz fundamental'. En general sucede lo mismo, pero pocas veces tendremos una $\mathbf{W}(t)$.

Estudiemos primero la estabilidad de las soluciones del sistema lineal general

$$[S] \quad \boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}\ , \text{ con } \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{f} \text{ continuas en } I = [t_o, \infty)$$

con lo que todas las soluciones de [S] están definidas $\forall t \geq t_o$.

Definimos en 2.1 la norma de un vector, pero no la de una matriz. En los libros de análisis matemático se ve que hay varias posibles. Nosotros elegimos, por ejemplo:

> $\|\mathbf{W}(t)\|$, **norma** de $\mathbf{W}(t)$, será la suma de los valores absolutos de sus elementos.

[Hay otras normas, como el supremo de los valores absolutos de los elementos (el determinante $|\mathbf{W}(t)|$ no es una norma). Se prueba que todas ellas son 'equivalentes', es decir, que si una es grande o muy pequeña, las otras también lo son].

Si $\mathbf{W}(t)$ es cualquier matriz fundamental y $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}^*(t)$ son dos soluciones de [S] usando la fórmula de variación de las constantes, y el hecho de que en los libros de análisis se ve que la norma de un producto de matrices es menor que una constante por el producto de las normas de ambas, deducimos:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = \|\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t)[\mathbf{x}(t_o) - \mathbf{x}^*(t_o)]\| \leq K\|\mathbf{W}(t)\|\|\mathbf{x}(t_o) - \mathbf{x}^*(t_o)\| .$$

Como $\mathbf{x}(t)$ es estable (AE), si esta norma es pequeña (tiende a 0) para $t \geq t_o$ (para $t \to \infty$), si $\|\mathbf{x}(t_o) - \mathbf{x}^*(t_o)\|$ es suficientemente pequeña, concluimos:

Teor 1. Todas las soluciones de [S] serán estables, asintóticamente estables o inestables dependiendo de que, respectivamente, la $\|\mathbf{W}(t)\|$ esté acotada, tienda a 0 cuando $t \to \infty$ o no esté acotada.

Esto significa que a partir de t_o todos los elementos de $\mathbf{W}(t)$ están acotados, que todos tienden a 0 o que al menos uno de sus elementos no está acotado.

Como ocurría para $n=1$ se puede hablar de la **estabilidad del sistema** [S] pues todas sus soluciones tienen la misma estabilidad [que no depende de la $\mathbf{f}(t)$].

Ej 1. $\boxed{t^3x'' - tx' + x = 1}$ (ej. 9 de 2.2). Una $\mathbf{W}(t)$ es $\begin{pmatrix} t & t\,e^{-1/t} \\ 1 & (1+t^{-1})e^{-1/t} \end{pmatrix}$, pues era $x_h = c_1 t + c_2 e^{-1/t}$.

Como $\|\mathbf{W}(t)\|$ es no acotada (2 de los elementos de $\mathbf{W}(t)$ no lo están), la ecuación es inestable.

Ej 2. $\boxed{t^2x'' + 4tx' + 2x = t^4}$ $\lambda(\lambda-1) + 4\lambda + 2 = 0$, $x_h = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} \to \mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & t^{-2} \\ -t^{-2} & -2t^{-3} \end{pmatrix}$.

Como $\|\mathbf{W}(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, todas las soluciones para $t > 0$ son AE $\left[\text{la } x_p = \frac{1}{30}t^4 \text{ no influye nada}\right]$.

Para **coeficientes constantes** [C] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}$ hay un resultado mucho más directo:

Teor 2. Si los dos autovalores λ de $\mathbf{A}$ tienen $\mathrm{Re}\lambda < 0$, el sistema [C] es AE.
Si los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ y $\mathbf{A}$ es diagonalizable [C] es estable.
Si existe algún λ con $\mathrm{Re}\lambda > 0$ o si es $\lambda = 0$ doble y $\mathbf{A}$ no diagonal, [C] es I.

[Los elementos de $\mathbf{W}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ son exponenciales $e^{\lambda t}$ tal vez multiplicadas por t, si $\mathbf{J}$ no diagonal. Si $\mathrm{Re}\lambda < 0$ cada elemento, y por tanto $\|\mathbf{W}(t)\|$, tiende a 0 si $t \to \infty$. Si hay λ con $\mathrm{Re}\lambda = 0$ y $\mathbf{A}$ es diagonal hay términos que son constantes, senos o cosenos y permanecen acotados sin tender a 0. Si hay algún λ con $\mathrm{Re}\lambda > 0$ o si los términos que vienen de $\lambda = 0$ contienen una t, habrá algún término de la exponencial no acotado y la norma de $\mathbf{W}(t)$ tampoco lo estará].

Así pues, la $\mathrm{Re}\lambda$ precisa la estabilidad de un sistema de coeficientes constantes (y de una ecuación, que era estable si lo era su sistema equivalente). Sólo si hay $\lambda = 0$ doble hay que mirar si $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$ o no para distinguir entre estabilidad no asintótica e inestabilidad. Y esto ni siquiera será necesario en las ecuaciones, pues siempre habrá potencias de t.

Ej 3. $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}0&2\\1&2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}}$ $\lambda^2-2\lambda-2=0\,,\ \lambda=1\pm\sqrt{3}\Rightarrow$ sistema inestable [la $\mathbf{f}(t)$ no influye].

Ej 4. $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}\mathbf{x}}$ $\lambda^2+1=0\,,\ \lambda=\mathrm{i}\Rightarrow$ sistema estable (no asintoóticamente).

Ej 5. Hallemos la solución de $\boxed{\begin{array}{l}x'=x+y\\y'=-x-y+\mathrm{e}^{-t}\end{array}}$ con $\boxed{\begin{array}{l}x(0)=1\\y(0)=-2\end{array}}$ y precisemos su estabilidad.

$y=x'-x\to x''=\mathrm{e}^{-t}\to x=c_1+c_2\,t+\mathrm{e}^{-t}$. imponiendo $x(0)=1,\ x'(0)=x(0)+y(0)=-1$ se obtiene $c_1=c_2=0$ y por tanto, $x=\mathrm{e}^{-t}$, con lo que $y=-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t}=-2\mathrm{e}^{-t}$.

La estabilidad de esta solución (y la de todo el sistema) viene dada por $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2=0$.
Como $\lambda=0$ doble y $\mathbf{A}$ no es diagonal (no el la $\mathbf{0}$), esta solución es inestable.

[Que la $\mathbf{x}\to\mathbf{0}$ no importa nada. EA no significa que tienda a $\mathbf{0}$ una solución dada, sino que lo haga la diferencia entre dos cualesquiera que partan cerca (entre todas en las lineales)].

Ej 6. $\boxed{\begin{array}{l}x'=-x+y\\y'=2-2y\end{array}}$ $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0\to\lambda=-1\,,-2$ (obvio, la matriz es triangular). El sistema es AE.
Una solución particular constante se encuentra fácilmente: $x=y=1$.

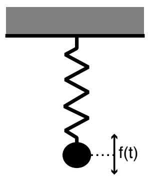
Como las soluciones del homogéneo tienden a $\mathbf{0}$, concluimos, sin más que ver la $\mathbf{x_p}$ y los autovalores (y sin calcular las soluciones) que todas las $x(t),y(t)\to1$ cuando $t\to\infty$.

Ej 7. $\boxed{x''+2x'=0}$ $\to\lambda=0\,,-2\Rightarrow$ ecuación estable no asintóticamente.

Ej 8. $\boxed{x''+2x'+x=\mathrm{e}^t}$ $\to\lambda=-1$ doble $\Rightarrow$ ecuación AE.

Todas las soluciones se van a infinito, por la $x_p=A\mathrm{e}^t$, pero esto no tiene que ver con la EA. Lo importante es que todas se parezcan entre sí. Insistimos en que $f(t)$ no influye.

Ej 9. $\boxed{x''+ax'+x=\operatorname{sen}t}$ se puede interpretar como un sistema muelle-masa sometido a una fuerza externa periódica.



Si $a>0$ (cuando hay un rozamiento que se opone al movimiento) la ecuación es AE, por tener ambos autovalores $\mathrm{Re}\lambda<0$: $\lambda=\frac{1}{2}\big[-a\pm\sqrt{a^2-4}\,\big]$.
Como las de la homogéna se van a 0 y la particular de la no homogénea es de la forma $x_p=A\cos t+B\operatorname{sen}t$, deducimos (sin más cálculos) que el sistema tenderá a oscilar periódicamente. En la práctica será eso lo que obervaremos.
Si no hay rozamiento ($a=0$), la ecuación es EnoA ($\lambda=\pm\mathrm{i}$). Pero aunque estén acotadas las soluciones de la homogénea, ninguna solución de la no homogénea lo está, pues la resonante $x_p=-\frac{t}{2}\cos t$ hace que la amplitud de todas las oscilaciones tienda a infinito.

La teoría de las ecuaciones de **orden** n es muy similar a la de orden 2 que hemos visto. La dificultad, de nuevo, se presenta por la imposibilidad de hallar exactamente las raíces de su polinomio característico P_n de grado mayor que 2 [sí es fácil, sin embargo, hallar las x_p cuando se puede aplicar el método de coeficientes indeterminados].
Para analizar su estabilidad deberíamos simplemente saber si esas raíces no calculables tienen o no parte real menor que 0. Esto que para nuestro $n=2$ es trivial:

las raíces de $\lambda^2+a\lambda+b=0$ **tienen** $\mathrm{Re}\lambda<0\Leftrightarrow a,b>0$ [basta escribirlas],

sólo es algo más complicado (pero abordable) para n mayores. Una condición necesaria (no suficiente) es también que todos los coeficientes de P_n sean estrictamente positivos.

$\big[$Que no basta lo prueba $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+21=(\lambda+3)(\lambda^2-2\lambda+7)\to\lambda=-3\,,1\pm\mathrm{i}\sqrt{6}\,\big]$.

Quien resuelve el problema es el criterio de Routh-Hurwitz de los libros de ecuaciones.