

3. Técnicas básicas de mapas de fases

Los sistemas de ecuaciones no lineales casi nunca se pueden resolver. Pero para los **sistemas autónomos en el plano**, es decir, para los sistemas de la forma

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

es posible obtener las principales propiedades de sus soluciones a partir de su dibujo o, con más precisión, del dibujo de las proyecciones (llamadas **órbitas**) de estas soluciones sobre el plano xy o plano de fases (para dimensiones mayores las cosas se complican notablemente y pueden aparecer las llamadas soluciones caóticas). Este capítulo está dedicado a describir las técnicas básicas destinadas a dibujar el conjunto de las órbitas de un sistema dado de la forma [S] sobre el plano de fases (su **mapa de fases**).

En la sección 3.1 se estudian las **propiedades básicas** de las soluciones y órbitas de estos sistemas autónomos. Se introduce la **ecuación diferencial de las órbitas** (que a veces es resoluble y da la expresión de dichas órbitas) y el **campo vectorial v** tangente a las órbitas (que siempre nos ayudará al pintar los mapas).

Se llaman **puntos críticos** de un mapa de fases a las proyecciones de las soluciones constantes del sistema (obtenidas resolviendo $f = g = 0$). La sección 3.2 clasifica estos puntos en diferentes tipos (**nodos, puntos silla, focos, centros,...**) de acuerdo con la forma de las órbitas a su alrededor. Esta forma será casi siempre similar a la de la **aproximación lineal**, sistema lineal (de órbitas fácilmente dibujables hallados sus autovalores) obtenido despreciando los términos no lineales en el desarrollo de Taylor en torno al punto crítico del sistema inicial [S]. Las únicas excepciones se darán, tal vez, si la matriz de la aproximación lineal tiene autovalores imaginarios puros (centros) o si existen $\lambda = 0$ (**puntos no elementales**). En la sección se estudiarán además las propiedades particulares que poseen los mapas de fases de los sistemas que provienen de **ecuaciones autónomas** de segundo orden $x'' = g(x, x')$. En diversos ejemplos se mostrará como organizar adecuadamente toda la información anterior para dibujar las órbitas de sistemas concretos (clasificar los puntos críticos, intentar hallar las órbitas, localizar las curvas de pendiente horizontal y vertical, determinar los valores del campo adecuados, analizar como se deforman las 'separatrices' de los puntos silla...). Se verá también que la **estabilidad** de las soluciones constantes es muchas veces fácil de precisar (la de las no constantes es complicada) y se comprobará cómo (excepcionalmente) se pueden hallar algunas **soluciones** del sistema [S].

Un tipo particular de sistemas [S] que poseen propiedades adicionales que facilitan el dibujo de su mapa de fases son los **exactos** (aquellos con $f_x + g_y \equiv 0$), estudiados en la sección 3.3. Para ellos siempre se podrá hallar la expresión de sus órbitas y sus puntos críticos elementales sólo podrán ser **puntos silla o centros** (lo que evita las dudas de la última situación). En el caso particular de las **ecuaciones exactas** $x'' = g(x)$ veremos que podemos dibujar su mapa de fases a partir, simplemente, del conocimiento de la llamada **función potencial**.

En 3.4 daremos algunas otras ideas iniciales sobre cómo abordar el problema de ver si en el sistema no lineal sigue o no siendo un **centro** un punto crítico cuya aproximación lineal lo sea (análisis de **simetrías** de las órbitas y utilización de las coordenadas **polares**).

En 3.5, a partir del sistema en polares, calcularemos expresiones (que se suelen llamar **constantes de Lyapunov**), en términos de los coeficientes del sistema, que aseguran la conversión de centros en focos.

Por último, trataremos en 3.6 las **funciones de Lyapunov** que permiten analizar directamente la estabilidad de un punto crítico. Esta técnica, difícil de aplicar muchas veces, es de especial interés si la aproximación no lineal no decide (centros o puntos no elementales).

3.1 Sistemas de dos ecuaciones autónomas

Sea el sistema [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$, es decir, $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ y $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Suponemos que f y g y sus derivadas parciales son continuas en todo \mathbf{R}^2 . Sabemos que entonces existe una única solución de [S] que satisface cualquier par de datos iniciales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ (es decir $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$).

Los siguientes resultados, muy semejantes a los que vimos para las ecuaciones autónomas de primer orden, se prueban fácilmente:

Teor 1. Si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es solución (constante o de equilibrio) de [S]. Si $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución de [S] y $k \in \mathbf{R}$ entonces $\mathbf{x}(t+k) = \begin{pmatrix} x(t+k) \\ y(t+k) \end{pmatrix}$ es también solución de [S].

[Otros de los teoremas de 1.5 no se pueden trasladar a sistemas; por ejemplo las soluciones, en general, no son monótonas y las soluciones acotadas no tienden necesariamente hacia soluciones constantes (al final de la sección volveremos a este tema)].

Cada solución $\mathbf{x}(t)$ de [S] define una curva en el espacio txy , pero también podemos mirarla como una curva en el plano xy (que llamaremos **plano de fases**) descrita en función del parámetro t . A esta segunda curva, proyección de la primera sobre el plano de fases, la llamaremos **órbita** de la solución (muchos libros llaman trayectorias a lo que aquí llamamos órbitas). Nuestro objetivo es representar lo más aproximadamente posible el conjunto de órbitas orientadas de [S], es decir, el **mapa de fases** (o retrato de fases) de [S].

Aunque el interés de la teoría que vamos a desarrollar es precisamente obtener información sobre los sistemas autónomos no resolubles (que son la inmensa mayoría), comencemos dibujando algunas órbitas de un sistema lineal cuyas soluciones sabemos calcular.

Ej 1. Sea $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ (es decir $x'' + x = 0$).

La solución que cumple $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

y la que satisface $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

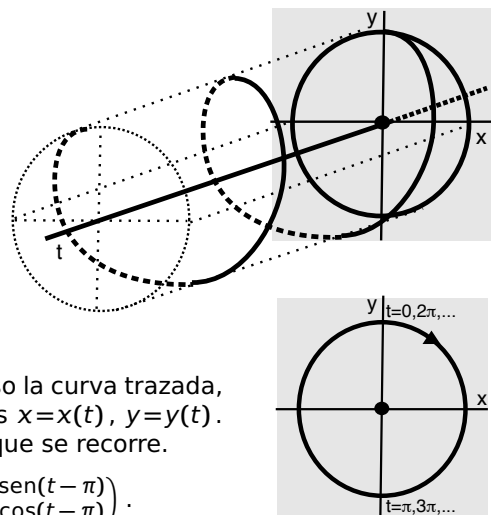
Estas soluciones describen en el espacio la recta y la hélice del dibujo, y sus proyecciones sobre xy son el punto y la circunferencia del inferior. A un punto del mapa de fases, proyección de solución constante, se le llama **punto crítico** (o punto singular).

Obtenemos las mismas órbitas si dibujamos en cada caso la curva trazada, al aumentar el parámetro t , por el punto de coordenadas $x = x(t), y = y(t)$. La flecha nos orienta la órbita, indicando el sentido en que se recorre.

Si imponemos $\mathbf{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t - \pi) \\ \cos(t - \pi) \end{pmatrix}$.

La órbita de esta solución (cuya gráfica en el espacio es una traslación paralela al eje t de la hélice anterior) es la misma circunferencia de antes, si bien sus puntos son alcanzados para valores de t distintos. Esta situación se da en cualquier sistema autónomo (y no en un sistema cualquiera) y por eso tiene sentido dibujar su mapa de fases: si $x = x(t), y = y(t)$ son las ecuaciones de una órbita, otra parametrización de la misma órbita es $x = x(t+k), y = y(t+k)$ para cualquier k (aunque para un mismo t se obtengan valores de x e y diferentes). Dicho de otra forma: como las traslaciones de una solución hacia adelante y hacia atrás son también soluciones, las proyecciones de todas estas curvas del espacio son la misma órbita.

Para otros valores iniciales obtendríamos otras soluciones periódicas, cuyas proyecciones serían todas circunferencias (de diversos radios).



Pero normalmente no conoceremos las soluciones de [S]. Para dibujar su mapa de fases trataremos de buscar información a partir de las propias funciones f y g . Intentemos primero hallar explícitamente las órbitas de [S]. Eliminando la t del sistema obtenemos la **ecuación diferencial de las órbitas**:

$$[o] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$$

(pues $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$, si lo permite el teorema de la función inversa).

Las curvas integrales de [o], quizás resoluble por los métodos de la sección 1.1 (pocas veces, por tanto), y dibujables por los de la 1.2, serán las órbitas de [S] (y al revés: una ecuación como [o] se puede mirar como un sistema y usar las técnicas de mapas de fases para trazar sus curvas integrales). Como se ha eliminado la t , si dibujamos las órbitas exclusivamente a partir de [o] éstas carecerán en principio de sentido de recorrido, pero será fácil orientarlas utilizando el campo \mathbf{v} que presentamos a continuación.

Resolviendo la ecuación [o] para el ejemplo 1 (lo que en este caso es posible) obtenemos de forma mucho más rápida sus órbitas (circunferencias menos el punto crítico):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \rightarrow x^2 + y^2 = C$$

Una información parecida a la que nos proporciona el campo de direcciones de [o] se obtiene tratando el **campo vectorial \mathbf{v}** dado en cada punto del plano por

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

[que coincide con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, vector tangente a la órbita en el punto (x,y)].

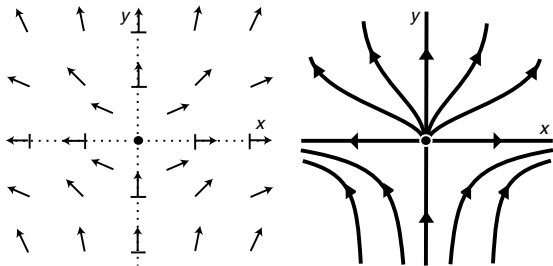
Por tanto, las órbitas de [S] serán curvas tangentes a (y recorridas en el sentido que indican) los vectores del campo \mathbf{v} (como se ve, este campo sólo se anula en los puntos críticos).

Generalmente utilizaremos el campo \mathbf{v} para completar otras informaciones, pero, aunque fallen todas las demás técnicas que iremos presentando, siempre podremos dibujar unos cuantos vectores del campo \mathbf{v} y hacernos una idea del mapa de fases.

Repasemos lo visto con otro ejemplo, tampoco muy práctico por ser el sistema resoluble:

Ej 2. $\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}$ [o] $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$, $\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$.

Es claro que el origen es el único punto crítico. Algunos vectores del campo \mathbf{v} (pintados con el mismo módulo pues nos interesa su dirección y sentido) son los del dibujo de la izquierda. Se ve que ambos ejes están formados por órbitas, ya que son rectas tangentes al campo \mathbf{v} .



Podemos también resolver la ecuación separable [o]: $y = [c - \ln|x|]^{-1}$, o sea, $x = ce^{-1/y}$.

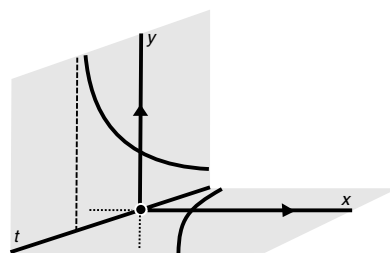
Con todo ello completamos el mapa de fases dibujado a la derecha.

Cada órbita muestra los valores que toman la x y la y de la solución de la que es proyección, pero no nos dice en qué instante t los alcanzan. Por ejemplo, vemos que la $x(t)$ de la solución con $x(0)=0$, $y(0)=1$ es 0 para todo t y podemos afirmar que su $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$ y que es $y(t)=155$ para algún $t > 0$, pero sólo podemos encontrar este t calculando la $y(t)$

[$y(t) \rightarrow \infty$ pues si tiende hacia un valor constante a debe ser (lo probamos para las autónomas de primer orden) $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv a$ una solución constante, lo que no es posible por no existir más puntos críticos].

Tampoco podemos saber viendo el mapa de fases si esta $y(t)$ está definida para todo $t \geq 0$. Pero si resolvemos se comprueba que $y(t) = 1/(1-t)$ explota en $t=1$.

Sin embargo la solución $x(t) = e^t$, $y(t) = 0$, con otra órbita recta similar a la anterior, está definida $\forall t \in \mathbf{R}$.



Estudiamos otras propiedades generales de las órbitas:

Teor 2.

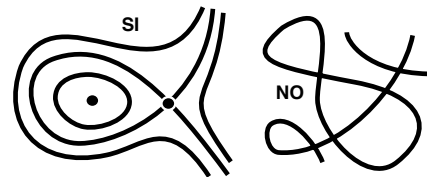
Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita de [S]. Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.

Dado un \mathbf{x}_0 , sea $\mathbf{x}(t)$ la única solución con $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$. Si para otra $\mathbf{x}^*(t)$ su órbita pasa por ese punto, debe ser $\mathbf{x}^*(t_*)=\mathbf{x}_0$ para algún t_* . Como $\mathbf{x}^*(t+t_*)$ es también solución y toma en $t=0$ el mismo valor que $\mathbf{x}(t)$ es, por unicidad, $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*(t+t_*)$, o sea, será $\mathbf{x}(t-t_*)=\mathbf{x}^*(t) \forall t$. Por tanto, $\mathbf{x}^*(t)$ es traslación de $\mathbf{x}(t)$ y sus órbitas coinciden.

Sea $\mathbf{x}(t)$ solución no constante. Si su órbita se corta a sí misma ello significa que existe un primer $T > 0$ en el que vuelve a ser $\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0)$. Utilizando la unicidad en $t=0$ se tiene que para todo t es $\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{x}(t)$ y la solución es T -periódica y su órbita se repite cada T unidades de tiempo, formando una curva cerrada simple.

Veamos las conclusiones que se deducen de este segundo teorema.

Las órbitas no pueden cortarse unas con otras, ni a sí mismas por lo que sólo pueden ser de 3 tipos: **puntos críticos, curvas cerradas simples y arcos simples** (asociadas, respectivamente, a soluciones constantes, periódicas y no periódicas). Sí pueden diversas órbitas confluír en un punto crítico, lo que no viola la unicidad:



corresponderán a diferentes soluciones que tienden hacia la solución constante cuando t tiende a $+$ o $-\infty$, pero que no la alcanzan en tiempo finito. [En los dibujos, para resaltar esa idea, trataremos de no unir esas órbitas con el punto, aunque no es lo que pase realmente].

En los ejemplos tratados hasta ahora aparecen órbitas de los 3 tipos. En ambos hay puntos críticos, en el 1 todas las demás curvas eran cerradas y el 2 todas eran arcos simples. En este, infinitas órbitas ‘pasan’ por el origen (realmente se acercan a él cuanto $t \rightarrow -\infty$).

Aunque el siguiente resultado es de difícil demostración, lo citamos aquí para seguir con la comparación con las autónomas de primer orden. ¿Hacia qué pueden tender las soluciones acotadas (cuando $t \rightarrow \infty$ o cuando $t \rightarrow -\infty$) de un sistema autónomo? El llamado ‘teorema generalizado de Poincaré-Bendixson’ viene a decir que sólo hay tres tipos de conjuntos límite: puntos críticos, órbitas cerradas o conjuntos acotados formados por un número finito de puntos críticos y órbitas que los unen (el punto y la órbita que sale y llega a él debajo del SI de arriba es un ejemplo de ese tercer tipo). Veremos muchos otros puntos que serán límite de órbitas y algunas órbitas cerradas a las que se aproximarán otras órbitas (ciclos límite). Pero no daremos ejemplos del tercer tipo de conjunto al que tiendan otras soluciones.

Hemos visto que la órbita de un sistema autónomo que pasa por un punto \mathbf{x}_0 del plano xy no depende del t_0 en el que la solución $\mathbf{x}(t)$ de la que es proyección satisface $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ (es decir, que la evolución del sistema es independiente del momento en que empezemos a contar el tiempo, como era esperable al no depender f y g de t). Insistimos en que para un sistema no autónomo esto es falso, y no tiene sentido hablar de su mapa de fases.

3.2 Clasificación de puntos críticos elementales

La mayor información sobre un mapa de fases la da el conocimiento de la forma de sus órbitas cerca de un punto crítico. Tratamos primero los **sistemas lineales** (siempre resolubles y con mapas de fases fácilmente dibujables) y después, a partir de ellos, los no lineales.

Sea: [L] $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, o sea, $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Supondremos $|\mathbf{A}| \neq 0$ (con lo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ será el único punto crítico de [L] y $\lambda = 0$ no será autovalor). Clasificamos el origen según los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz \mathbf{A} :

Si λ_1 y λ_2 son **reales y distintos**, la solución general es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \text{ vector propio asociado a } \lambda_i.$$

Llamemos L_1 y L_2 a las rectas que contienen a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 .

Cada L_i está formada por tres órbitas (obtenidas haciendo la otra $c_i = 0$): el punto crítico y dos semirrectas orientadas según sea el signo del λ_i .

El vector unitario tangente a las órbitas $[\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}]$ es:

$$\mathbf{t} = \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2}{[c_1^2 \lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} \|\mathbf{v}_1\|^2 + c_2^2 \lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t} \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2c_1 c_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{2(\lambda_1 + \lambda_2)t} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2]^{1/2}}$$

Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, todas las soluciones tienden a $\mathbf{0}$ y el vector $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|$ (si $c_1 \neq 0$) cuando $t \rightarrow \infty$. Todas las órbitas (menos dos) entran en el origen con la pendiente dada por el **vector propio asociado al λ más cercano a 0** y el punto crítico se llama **nodo estable**.

Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, se tiene la misma situación cambiando $+\infty$ por $-\infty$ y el origen se llama **nodo inestable**.

Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, las órbitas sobre L_2 se aproximan al origen y se alejan sobre L_1 . Las demás tienden asintóticamente a L_1 o L_2 según tienda t a $+\infty$ ó $-\infty$ adoptando la forma hiperbólica del dibujo de la derecha (no tienen que ser exactamente hipérbolas) y tenemos un **punto silla**.

Si λ es **doble** y \mathbf{A} diagonal la solución es:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Entonces, si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) para cada par de constantes nos acercamos (alejamos) a $\mathbf{0}$ según una recta diferente y se dice que el punto es un **nodo estelar estable (inestable)**.

[Es muy sencillo hallar las órbitas usando [o]:

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow y = Cx].$$

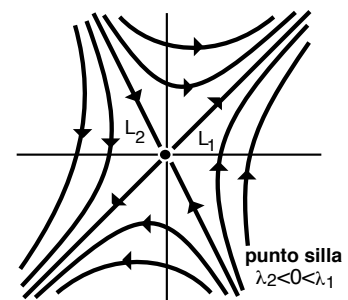
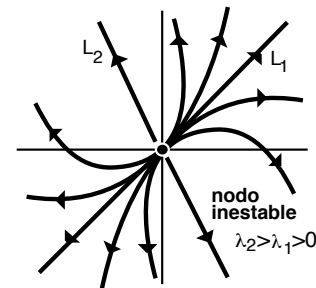
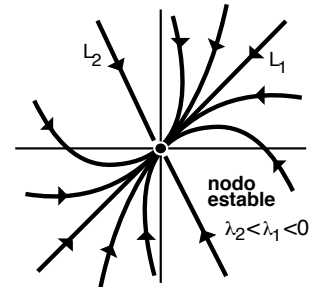
Si λ es **doble** y \mathbf{A} no diagonal la solución es:

$$\mathbf{x}(t) = [c_1 \mathbf{w} + (c_1 t + c_2) \mathbf{v}] e^{\lambda t},$$

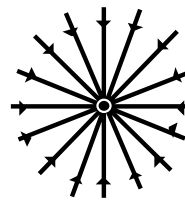
con \mathbf{v} único vector propio asociado a λ .

Si $c_1 = 0$ estamos sobre la recta L asociada a \mathbf{v} . Se ve, calculando el \mathbf{t} , que el resto de órbitas entran en el origen siendo tangentes a una u otra de las semirrectas que forman L .

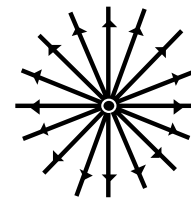
Si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) sobre cada órbita nos acercamos (alejamos) al punto, que se llama **nodo de una tangente estable (inestable)**. En los dos casos las órbitas pueden ser como en el dibujo pequeño (se distingue entre las dos posibilidades fácilmente mirando el campo \mathbf{v}).



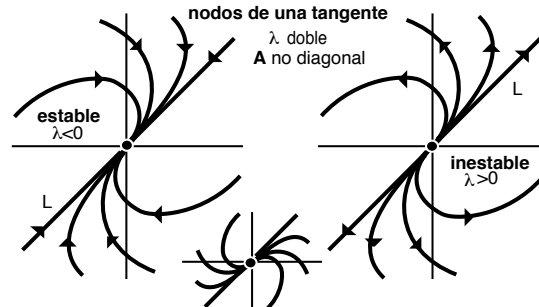
nodo estelar estable
 λ doble < 0 , \mathbf{A} diagonal



nodo estelar inestable
 λ doble > 0 , \mathbf{A} diagonal



nodos de una tangente
 λ doble
 \mathbf{A} no diagonal



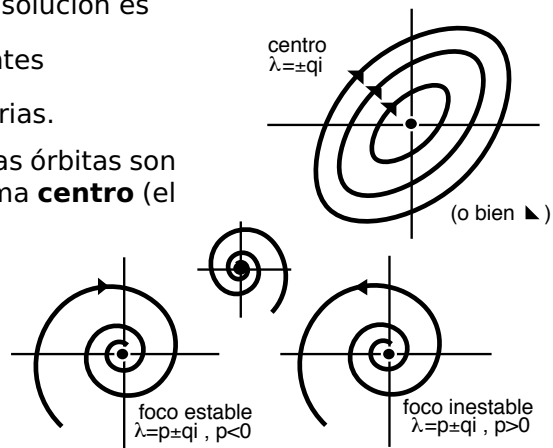
Si los autovalores son **complejos** $\lambda = p \pm qi$, la solución es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos qt + c_2 \sin qt \\ c_3 \cos qt + c_4 \sin qt \end{pmatrix} e^{pt}, \quad c_i \text{ constantes}$$

reales de las cuales sólo dos son arbitrarias.

Si $p=0$, todas las soluciones son periódicas y las órbitas son curvas cerradas rodeando el origen, que se llama **centro** (el sentido de giro lo da el campo \mathbf{v}).

Si $p < 0$, la exponencial decreciente obliga a las órbitas a cerrarse en espiral cuando $t \rightarrow \infty$ hacia el origen, que se llama **foco estable**. Si $p > 0$, las espirales corresponden a soluciones que se alejan del punto crítico que es un **foco inestable**.



La espirales podría ser como en el dibujo pequeño (esto se precisa con el campo \mathbf{v}).

Dibujar las órbitas de sistemas lineales es muy sencillo con la clasificación anterior. Bastará (para nodos y sillas) con trazar las semirrectas órbitas orientadas y precisar el campo \mathbf{v} sobre algunas rectas que pasen por el origen, que son isoclinas de

$$[0] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}, \quad \text{ecuación homogénea.}$$

Por ejemplo, sobre los ejes, o sobre las rectas con pendiente horizontal o vertical. Con esto (también en caso de centro o foco) basta para pintar el mapa de fases en todo el plano. Aunque, por ser [0] homogénea, las órbitas son siempre calculables, normalmente no merecerá la pena calcularlas (pueden además salirnos expresiones no sencillas de dibujar).

Los sistemas que se han visto son homogéneos. Si hay términos no homogéneos (constantes para ser autónoma) y $|\mathbf{A}| \neq 0$ seguirá habiendo un punto crítico \mathbf{x}_0 , que haciendo el cambio $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ se trasladaría al origen manteniendo la matriz \mathbf{A} , con lo que, para analizarlo, basta hallar sus autovalores. Las isoclinas serán las rectas que pasen por \mathbf{x}_0 .

A pesar de su facilidad, los mapas de fases no son de especial interés para sistemas lineales, siempre resolubles. Pero la gran importancia de lo anterior es que nos permitirá deducir la forma de las órbitas cerca de los puntos críticos de los no lineales. Antes de hacerlo, dibujemos dos mapas de fases de lineales para ir practicando y dando algunos nombres:

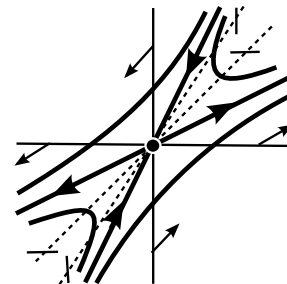
Ej 1. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \quad \lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{ punto silla.}$

Completamos esta información con el campo \mathbf{v} :

\mathbf{v} es **vertical** ($x' = 0$) si $y = \frac{3x}{2}$ y **horizontal** ($y' = 0$) si $y = x$.

Sobre los ejes: $\mathbf{v}(x, 0) = x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0, y) = -2y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[Resolviendo [0] se obtiene: $(2y-x)^2(y-2x) = C$, órbitas de aspecto hiperbólico, pero que no son hipérbolas].



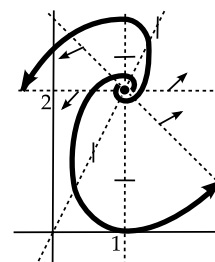
A las órbitas que entran y salen de un punto silla se les llama separatrices, nombre natural, pues 'separan' comportamiento de las soluciones totalmente distintos. Por ejemplo, aquí las soluciones cuyas órbitas parten por debajo de $y = 2x$ se tiene que su $x(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$, mientras que $x(t) \rightarrow -\infty$ si parten por encima de esa separtriz (sobre ella $x(t) \rightarrow 0$ y se le llama variedad estable). Y algo análogo sucede con la otra separtriz (variedad inestable) $y = x/2$. Del mapa de fases (sin resolver el sistema) se puede deducir también, por ejemplo, que para la solución que cumple $x(7) = 1$, $y(7) = 0$ tanto su x como su y tienden hacia ∞ cuando $t \rightarrow \infty$ y tienden hacia $-\infty$ cuando $t \rightarrow -\infty$: basta observar su órbita.

Ej 2. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2x - 2 \end{cases}$ El punto crítico es ahora $x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Como $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, con $\lambda = 1 \pm i$, es un foco inestable.

\mathbf{v} es **vertical** si $y = 2x$ y **horizontal** si $x = 1$.

Además: $\mathbf{v}(x, 2) = 2(x-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x, 3-x) = (x-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

[0, si se prefiere, es el mapa de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ trasladado al punto].



Consideremos ya el **sistema no lineal** [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ y sea $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ punto crítico.

Desarrollando por Taylor f y g en torno a \mathbf{x}_0 y llevando luego este punto al origen con el cambio $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ (o lo que es lo equivalente, haciendo primero el cambio y desarrollando después en $u = v = 0$) se tiene:

$$\begin{cases} u' = f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + R_f(u, v) \\ v' = g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + R_g(u, v) \end{cases} \text{ con } R_f, R_g = o(\sqrt{u^2 + v^2}) \text{ si } u, v \rightarrow 0$$

Como R_f y R_g son pequeños esperamos que (cerca del origen que es ahora punto crítico) sean similares las órbitas de este sistema y las de la **aproximación lineal** obtenida ignorando los términos no lineales. El siguiente teorema precisará que esto es cierto si el lineal es de cualquiera de los tipos clasificados anteriormente, salvo en el caso de los centros.

Llamemos [L] al sistema $\mathbf{u}' = \mathbf{M}\mathbf{u}$, con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

Suponemos $|\mathbf{M}| \neq 0$. Se dice entonces que \mathbf{x}_0 es **punto crítico elemental** de [S]. El teorema de la función implícita asegura que \mathbf{x}_0 es **aislado** (único punto crítico en un entorno). Si $|\mathbf{M}| = 0$ puede no ser aislado y si lo es no se parece al origen de [L], no aislado.

Si el origen es **nodo, punto silla o foco** de [L] entonces \mathbf{x}_0 es un punto crítico del mismo tipo y la misma estabilidad de [S].

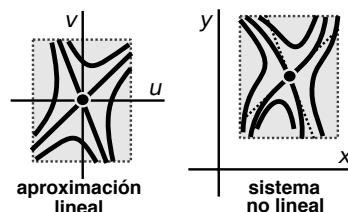
Si el origen es **nodo estelar o de una tangente** de [L] y f y g son C^2 entonces \mathbf{x}_0 es nodo del mismo tipo (y estabilidad) del sistema no lineal [S].

Teor 1. Las órbitas rectas que en los nodos y puntos sillas de [L] llegan o salen del origen se deforman, en general, en curvas de [S] que llegan o salen de \mathbf{x}_0 , pero manteniendo la tangencia dada por los vectores propios de [L].

Si el origen es **centro** de la aproximación lineal y f y g son analíticas entonces \mathbf{x}_0 es o un centro, o un foco estable o un foco inestable en el sistema no lineal.

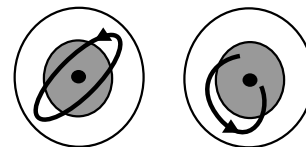
La demostración es complicada y no la damos. No es extraño que sean los centros los únicos puntos elementales que no se conservan pues los pequeños términos no lineales pueden hacer que las órbitas dejen de cerrarse sobre sí mismas. De otra forma: una pequeña perturbación puede apartar los $\lambda = \pm qi$ del eje imaginario. Por la misma razón podría pensarse que también puede separarse dos λ iguales, pero si $f, g \in C^2$ esto no sucede (si no lo son puede cambiar un nodo en un foco).

Así pues, analizando sistemas lineales sabemos, casi siempre, cómo son las órbitas de uno no lineal en un entorno de cada punto crítico (lejos de él serán totalmente diferentes de las del lineal). Este es el paso principal hacia el dibujo del mapa de fases de [S]. En muchos problemas, además, lo que se busca precisamente es el comportamiento de sus soluciones cerca de las de equilibrio. Para ver en cada caso cómo se deforman las órbitas de la aproximación lineal en el no lineal (por ejemplo, hacia dónde se doblan las separatrices de un punto silla) y obtener datos sobre el mapa global habrá que utilizar el campo \mathbf{v} (y las órbitas en el caso excepcional de que sean calculables). En los ejemplos iremos viendo cómo organizar este trabajo.



Es fácil extraer del teorema conclusiones sobre la **estabilidad de las soluciones de equilibrio**, similares a las dadas para las autónomas de primer orden.

El significado geométrico en el plano de fases de esta estabilidad es claro: \mathbf{x}_0 es estable si todas las órbitas que parten suficientemente cerca no se salen de cualquier círculo de radio dado. Es asintóticamente estable si además tienden a \mathbf{x}_0 si $t \rightarrow \infty$.



Teor 2. Si los autovalores de \mathbf{M} tienen $\text{Re}\lambda < 0$, \mathbf{x}_0 es solución constante asintóticamente estable de [S]. Si alguno de los λ tiene parte real positiva, \mathbf{x}_0 es inestable.

Como siempre queda la duda de qué pasa si $\text{Re}\lambda = 0$ (veremos que un punto con un $\lambda = 0$ y otro $\lambda > 0$ es inestable, aunque esto no se deduce del teorema 1). La inestabilidad de algunas **soluciones no constantes** es clara a la vista de un mapa de fases: si las órbitas se alejan, también lo hacen las soluciones de las que son proyección. Pero la estabilidad, en general, no se ve en el dibujo: órbitas próximas pueden corresponder a soluciones muy diferentes.

Pasemos ya a hacer dibujos de mapas de fases de sistemas no lineales (los de centros de la aproximación lineal se verán en secciones siguientes).

Primero hallaremos los posibles **puntos críticos** resolviendo $f(x, y) = g(x, y) = 0$ (en los ejemplos que siguen será posible, pero podría ser sistema no resoluble y habría que aproximarlos numéricamente). Evaluaremos la matriz \mathbf{M} en cada punto para clasificarlo y dibujaremos segmentos en torno a cada silla o nodo con la pendiente de los vectores propios.

Si podemos resolver la ecuación diferencial [o] de las **órbitas**, dibujaremos algunas de ellas (al menos las más sencillas y nos esforzaremos con las separatrices).

Utilizaremos el campo \mathbf{v} para completar la información anterior. Habitualmente:

- Buscaremos las curvas en que \mathbf{v} es **horizontal** o **vertical** ($g=0$ y $f=0$).
- A veces dibujaremos (si es fácil) alguna otra isoclina de la ecuación [o].
- Evaluaremos \mathbf{v} en los **ejes** (es muy fácil hacer $x=0$ ó $y=0$) y en **rectas que pasan por los puntos críticos** (no es raro que adopten formas sencillas, puesen los puntos críticos es donde se anulan tanto f como g).
- Para ver **cómo se deforman las separatrices** estudiaremos \mathbf{v} sobre las rectas que indica la aproximación lineal.
- Por último, daremos valores sueltos de \mathbf{v} en zonas en que haya pocos datos.

Ej 3. $\begin{cases} x' = 8x - y^2 \\ y' = -6y + 6x^2 \end{cases} \rightarrow y = x^2 \uparrow \rightarrow x(8 - x^3) = 0 \rightarrow (0), (2), (4)$. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2y \\ 12x & -6 \end{pmatrix}$ en cada punto es:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ es silla con $\lambda = 8 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = -6 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 24 & -6 \end{pmatrix}$ es foco inestable ($\lambda = 1 \pm i\sqrt{143}$).

Completamos la información local con el campo \mathbf{v} (la ecuación de las órbitas no es resoluble).

El campo es **horizontal** si $y = x^2$ y **vertical** si $8x = y^2$.

Para la deformación de las **separatrices** hallamos \mathbf{v} sobre las rectas dadas por la aproximación lineal, que aquí son los ejes:

$$\mathbf{v}(x, 0) = 2x \begin{pmatrix} 4 \\ 3x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0, y) = -y \begin{pmatrix} y \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Según esto, la variedad estable se deforma (y la inestable \smile .

El \mathbf{v} sobre los **ejes** en este ejemplo ya lo hemos hallado.

En **rectas que pasan por** $(2, 4)$ y en un punto con pocos datos:

$$\mathbf{v}(x, 4) = 2(x-2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3x+6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(2, y) = (4-y) \begin{pmatrix} 4+y \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(-2, -2) = 4 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Los vectores dibujados precisan también el sentido en el que se abre el foco y con toda la información anterior tenemos un mapa de fases más o menos como el de arriba.

No podemos resolver el sistema, pero están a la vista algunas propiedades de las soluciones. Por ejemplo, las soluciones constantes son inestables (estaba claro desde que dimos los λ). También vemos que son inestables las soluciones cuya proyecciones son las variedades estables de la silla (órbitas que parten cerca tienen un comportamiento totalmente diferente).

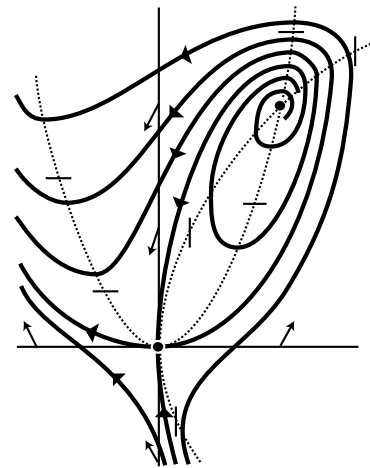
Pero hay otras propiedades de las soluciones que involucran a la variable t y que (como pasará normalmente) no podemos deducir del dibujo de las órbitas. ¿Estarán definidas para todo $t \geq 0$ otras soluciones? En caso afirmativo, ¿serían estables?

Para **calcular las soluciones** de un sistema autónomo no lineal deben darse demasiadas casualidades. Debe ser posible: i) hallar las órbitas, ii) despejar la y (o la x) de la expresión y iii) resolver la autónoma que resulta al llevar esta y a la ecuación para x' (o viceversa). Más habitual es que se pueda calcular alguna solución **asociada a una órbita sencilla**.

Para ilustrar esto volvamos al ejemplo 1: $x' = 3x - 2y$, $y' = 2x - 2y$, de órbitas $(2y - x)^2 (y - 2x) = C$. No podemos despejar y (ni x) y no llegamos por este camino a la conocida solución general del sistema lineal. Pero sí podemos hallar la que cumple $x(0) = 2$, $y(0) = 1$, asociada a la órbita $y = \frac{x}{2}$.

Sustituyéndola en la primera ecuación del sistema: $x' = 2x \rightarrow x = Ce^{2t} \xrightarrow{x(0)=2} x = 2e^{2t} \rightarrow y = e^t$.

Observemos que esta solución (asociada a la variedad inestable de la silla) es inestable a pesar de que el resto de las órbitas se peguen asintóticamente a ella al tender t hacia infinito.



Ej 4. $\begin{cases} x' = y(x-2) \\ y' = x(y-2) \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puntos críticos. Aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} y & x-2 \\ y-2 & x \end{pmatrix}$ en cada uno:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: \text{silla.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 2 \text{ doble y nodo estelar inestable.}$$

Utilizamos ahora \mathbf{v} (órbitas calculables, pero complicadas):

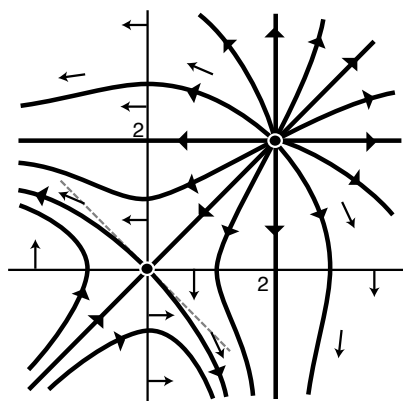
\mathbf{v} es **vertical** si $y=0$ o si $x=2$ [$\Rightarrow x=2$ órbita recta (más exactamente: está formada por tres órbitas)].

\mathbf{v} es **horizontal** si $x=0, y=2$ ($\Rightarrow y=2$ órbita). Además:

$$\mathbf{v}(x, x) = x(x-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ órbita} \quad \mathbf{v}(x, -x) = -x \begin{pmatrix} x-2 \\ x+2 \end{pmatrix} \text{ (se curva)}$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0, y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(1, 3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(3, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(-1, 3) = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(3, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(3, 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(4, 3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Excepcionalmente, la separatriz $y=x$ del lineal se conserva, aunque la otra se deforma.

Veamos algunas propiedades de las **soluciones** que se deducen del mapa de fases:

El segmento que une los puntos críticos corresponde a una solución **definida** $\forall t$ (ya que está acotada y no puede irse a infinito en tiempo finito). Esta solución (que sería calculable) es **inestable**, pues mientras ella tiende a $\mathbf{0}$, la x o la y de algunas cercanas $\rightarrow -\infty$.

Vamos ahora a calcular un par de soluciones asociadas a **órbitas sencillas**.

Por ejemplo, busquemos la que satisface $x(0)=1, y(0)=2$. Empezamos encontrando la órbita que pasa por $(1, 2)$ (o sea, la que cumple $y(x=1)=2$). Es claro aquí que esta órbita es $y=2$, que llevada a la primera ecuación da $x' = 2x - 4, x(0)=1 \rightarrow x = 2 - e^{2t}, y=2$, y está **definida** $\forall t$, aunque no podemos decir si es o no estable por no conocer las soluciones cercanas.

En cambio, la solución con $x(0)=y(0)=3 \rightarrow y=x \rightarrow x' = x^2 - 2x$, **explota** en tiempo finito (por la potencia x^2). Como es calculable podemos dar el t de la asíntota: $x = 6/(3 - e^{2t}) \rightarrow t = \frac{1}{2} \ln t$.

No sabremos si casi todas las soluciones no constantes están o no definidas $\forall t$ ni precisar su estabilidad, pues no podemos calcularlas ya que no podemos despejar ninguna variable de la solución de la ecuación de las órbitas: $y + 2 \ln(y-2) = x + 2 \ln(x-2) + C$. Esta expresión nos da una información interesante: las órbitas son simétricas respecto a $y=x$.

Ej 5. $\begin{cases} x' = x(2-x-y) \\ y' = y(3-y-2x) \end{cases}$ Puede describir la evolución de la población de dos especies en competición. En ausencia de la otra, cada una sigue una ecuación logística. Y la presencia de cada una influye negativamente en el crecimiento de la otra (términos en xy). Dibujamos el $x, y \geq 0$, que es donde tiene sentido.

$$x(2-x-y)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0, 3 \\ y=2-x \rightarrow x=2, 1 \rightarrow y=0, 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ puntos críticos.}$$

La aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2-2x-2y & -x \\ -2y & 3-2y-2x \end{pmatrix}$ en cada punto:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodoE: } \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (captura la tangencia), } \lambda = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodoE: } \lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ (tangencia), } \lambda = -3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{nodoE: } \lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (tangencia), } \lambda = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

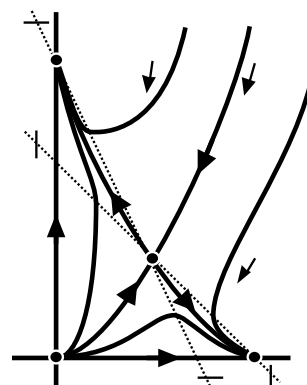
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{punto silla.}$$

\mathbf{v} es **vertical** si $x=0$ o si $y=2-x$ ($\Rightarrow x=0$ órbita).

\mathbf{v} es **horizontal** si $y=0, y=3-2x$ ($\Rightarrow y=0$ órbita).

Valores de \mathbf{v} sobre rectas que contienen puntos críticos:

$$\mathbf{v}(x, 3) = -x \begin{pmatrix} x+1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(2, y) = -y \begin{pmatrix} 2 \\ y+1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(x, 1) = (1-x) \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(1, y) = (1-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 3y \end{pmatrix}.$$



Si los datos iniciales están por encima de la variedad estable de la silla, la especie y tiende hacia su tope logístico y la x se extingue. Lo contrario sucede si están por debajo.

Si los términos de competición (los $-axy$) fuesen más pequeños las dos especies podrían coexistir (los nodos estables se vuelven sillas y pasa a existir un nodo estable en $x, y > 0$ hacia el que tienden todas las soluciones del primer cuadrante. Esto sucede, por ejemplo, con el sistema $x' = x(2-x-y/2), y' = y(3-y-x)$, para el que $x=1, y=2$ es nodo estable).

Las únicas soluciones calculables son las asociadas a $x=0$ o $y=0$ (a la ausencia de una especie). Aparece la ecuación logística cuyas soluciones son coherentes con las órbitas sobre los ejes.

Todo lo dicho sobre sistemas se puede, desde luego, aplicar al caso particular de las **ecuaciones autónomas** (su mapa de fases es el del sistema equivalente):

Sea [e] $x'' = g(x, x')$, o escrita en forma de sistema: [SE] $\begin{cases} x' = v \\ v' = g(x, v) \end{cases}$

(usamos la variable v porque en muchos problemas físicos será una velocidad).

La matriz de la aproximación lineal es $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x & g_v \end{pmatrix}$, evaluada en cada punto crítico.

La ecuación de las órbitas y el campo \mathbf{v} tienen la forma:

[o] $v \frac{dv}{dx} = g(x, v)$, $\mathbf{v}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ g(x, v) \end{pmatrix}$

Las propiedades particulares de los mapas de fases de ecuaciones son inmediatas:

- Los puntos críticos de [e] están sobre el eje $v=0$ [y las x de esos puntos son los ceros de $g(x, 0)$].
- Las órbitas se dirigen hacia la derecha en el semiplano superior y hacia la izquierda en el inferior.
- Las órbitas que cortan el eje $v=0$ lo hacen perpendicularmente.
- Las ecuaciones no poseen nodos estelares.
- Un vector propio asociado a un autovalor λ es $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Ej 6. $x'' = x - x^3 - xv$ $\begin{cases} x' = v \\ v' = x - x^3 - xv \end{cases}$. Puntos críticos $v=0$
 $x=0, \pm 1$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2-v & -x \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \pm 1 \nearrow \lambda = \frac{1}{2} [\mp 1 \pm i\sqrt{7}] \text{ focoE} \\ 0 \searrow \lambda = \pm 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \text{ silla} \end{matrix}$

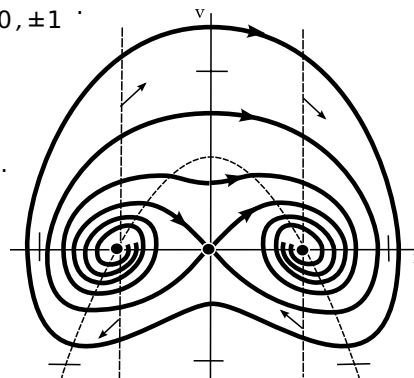
v horizontal si $v=1-x^2, x=0$. Vertical si $v=0$ (es ecuación).

v será sencillo sobre $x=\pm 1$: $\mathbf{v}(\pm 1, v) = \begin{pmatrix} v \\ \pm v \end{pmatrix}$,

Para analizar la deformación de las separatrices:

$\mathbf{v}(x, \pm x) = x \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \mp x - x^2 \end{pmatrix}$ (los v con x pequeño indican que se curvan según el dibujo).

[La parábola de pendiente horizontal ya nos lo aseguraba para las separatrices de $v > 0$].



La ecuación de las órbitas [o] $\frac{dv}{dx} = \frac{x-x^3}{v} - x$ no es de ningún tipo resoluble conocido.

Los vectores del campo \mathbf{v} son simétricos respecto al eje v (por ser g impar en x , sus pendientes en $(-x, v)$ y en (x, v) tienen signo opuesto). Entonces sus órbitas también serán **simétricas** respecto a $x=0$. Esta simetría obliga a las órbitas a cerrarse.

En el mapa de fases vemos que hay dos tipos esenciales de soluciones de la ecuación no resoluble: unas son periódicas y otras tienden a ± 1 cuando $t \rightarrow \pm \infty$. Pero sin las órbitas no podemos, por ejemplo, decir exactamente para qué datos iniciales son de uno u otro tipo, o dar una expresión que nos permita calcular los periodos.

Ej 7. $x'' = (x+2x')(x'-1)$ $\begin{cases} x' = v \\ v' = (x+2v)(v-1) \end{cases}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ punto crítico. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (términos lineales). $\lambda = -1$ doble. Nudo de 1tg.

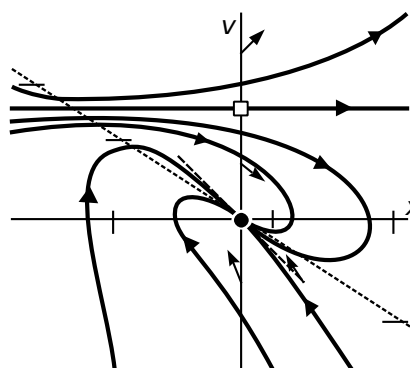
$\mathbf{v}(x, -x) = x \begin{pmatrix} -1 \\ 1+x \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0, v) = v \begin{pmatrix} 1 \\ 2(v-1) \end{pmatrix}$.

Campo horizontal si $v = -\frac{x}{2}$ o si $v=1$ (es órbita).

Calculemos la solución que cumple $x(2)=0, x'(2)=1$.

Órbita por $(0, 1) \rightarrow v=1=x' \rightarrow x=t+C \xrightarrow{x(2)=0} x=t-2$.

[Más soluciones no tenemos por ser [o] no resoluble, pero el mapa dice que esta solución es inestable].



Los dos ejemplos siguientes pueden describir sistemas físicos. Dibujamos sus órbitas e interpretamos algunas de ellas. Incluso aunque la ecuación sea lineal (como el primero) y, por tanto, resoluble, se pueden sacar conclusiones muy rápidas sobre las soluciones sólo a partir del mapa de fases.

Ej 8. $x'' + 2ax' + x = 0$, con $a \geq 0$ [sistema muelle-masa con rozamiento (si $a > 0$)].

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -x - 2av \end{cases} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ único punto crítico } \forall a. \lambda^2 + 2a\lambda + 1 = 0: \lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \rightarrow$$

Si $a = 0$, el origen es un centro ($\lambda = \pm i$ y el sistema es lineal).

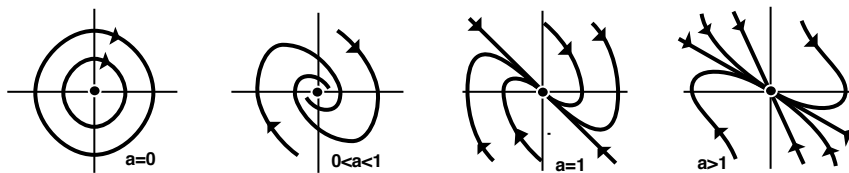
Si $0 < a < 1$, es un foco estable (autovalores complejos con $\text{Re}\lambda < 0$).

Si $a = 1$, es un nodo de una tangente estable (con $\lambda = -1$ doble).

Si $a > 1$, es un nodo estable ($\lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1} < -1 < \lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} < 0$).

Con alguna información más (el campo \mathbf{v} sobre $x=0$ y los puntos en que es horizontal $x = -2av$) podemos ya dibujar los mapas de fases. Como en todo sistema lineal se pueden hallar las órbitas, pero son complicadas y dicen poco. Un pequeño dato adicional es que no hay puntos de inflexión (se puede ver que esto ocurre para todo sistema lineal):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{v^2 + 2axv + x^2}{v^3} = 0 \rightarrow v = (-a \pm \sqrt{a^2 - 1})x, \text{ órbitas rectas.}$$



El origen representa siempre la solución trivial asociada a la posición de equilibrio estable de la masa en reposo en $x=0$. Si $a=0$ (no hay rozamiento), cada órbita cerrada describe un movimiento oscilatorio no amortiguado en torno a $x=0$: si, por ejemplo, la masa está inicialmente en $x=0$ con velocidad $v > 0$, empieza a aumentar x hasta su valor máximo en el instante en que $v=0$; disminuye después la x (el valor absoluto $|v|$ tiene un máximo y luego decrece cuando el movimiento es contra la fuerza del muelle); avanza hasta llegar a $x=0$ con la misma velocidad inicial y repite indefinidamente el movimiento. Si $0 < a < 1$ (rozamiento escaso), pasa infinitas veces por $x=0$, pero la amplitud de la oscilación va tendiendo a 0 con el tiempo. Si $a \geq 1$ (fuerte rozamiento), las órbitas describen movimientos que tienden hacia $x=0$, pero no son posibles las oscilaciones. Dependiendo de su posición y velocidad iniciales, o la masa tiende indefinidamente hacia la posición de equilibrio sin llegar a superarla, o la cruza una sola vez.

Ej 9. $x'' = x^2 + 3x - 4x'$ Puede describir el movimiento de una partícula en el eje x , sometido a una fuerza $x^2 + 3x$ que sólo depende de su posición y con un rozamiento $-4x'$ proporcional a su velocidad.

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = x^2 + 3x - 4v \end{cases} \rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x + 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Evaluando \mathbf{M} en los dos puntos críticos que hay:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1, -3, \text{ nodo E.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{7}, \text{ silla.}$$

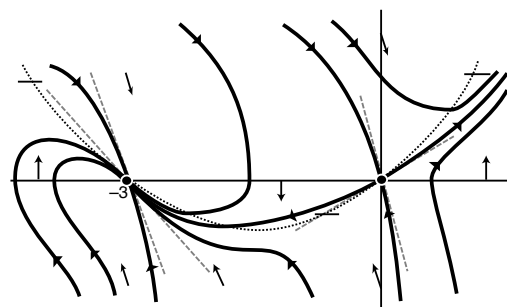
\mathbf{v} es horizontal sobre la parábola $v = \frac{x^2 + 3x}{4}$.

Más valores de \mathbf{v} (rectas con puntos críticos y puntos sobre rectas del nodo lineal):

$$\mathbf{v}(-3, v) = v \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-4, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-4, 3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-2, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-2, -3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Sabemos ya como se curvan las rectas del nodo. Evaluando $\mathbf{v}(x, \lambda x)$ se ve, tras unos cálculos, que las separatrices se deforman de la forma indicada y completamos el dibujo.

El sentido de las fuerzas es: $\rightarrow -3 \leftarrow 0 \rightarrow$ (por eso -3 es estable y 0 inestable). Supongamos la partícula inicialmente entre -3 y 0 y discutamos su movimiento según su velocidad v_0 inicial. Si $v_0 < 0$, tiende hacia el equilibrio estable. Si $v_0 > 0$ y pequeño, no puede superar la fuerza que se opone, llega a un x máximo, regresa y tiende hacia -3 . Si $v_0 > 0$ y gordo consigue cruzar $x=0$ y, ayudado por la fuerza, tiende a ∞ (¿en tiempo finito?) mientras aumenta su velocidad. Si $v_0 > 0$ es tal que estamos sobre la separatrix del punto silla tenemos un movimiento imposible en la práctica: acercarse sin cesar al equilibrio inestable. El problema (las órbitas no son calculables) es que es imposible hallar exactamente este último v_0 (y sería importante porque para valores superiores e inferiores de la velocidad los movimientos son radicalmente diferentes).



3.3 Sistemas y ecuaciones exactos

Un sistema del tipo [S] $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ se llama **exacto** si $f_x(x, y) + g_y(x, y) \equiv 0$.

(suponemos que f y g son de clase 1 en todo \mathbf{R}^2 como hicimos en la sección 3.1).

Si [S] es exacto, la ecuación diferencial de sus órbitas es

$$[o] \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \text{ es decir, } -g(x, y) + f(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

es también exacta, y por tanto resoluble:

Existe $H(x, y)$ con $f = H_y$ y $g = -H_x$, y las órbitas de [S] vienen dadas por $H(x, y) = C$.

Además se tiene el siguiente resultado sobre sus puntos críticos:

Teor 1. Los puntos críticos elementales de un sistema exacto sólo pueden ser centros o puntos silla.

Como $f_x + g_y \equiv 0$, los autovalores de la matriz de la aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{\mathbf{x}_0}$

en cualquier punto \mathbf{x}_0 crítico vienen dados por $\lambda^2 + |\mathbf{M}| = 0$, con lo que o bien (si $|\mathbf{M}| < 0$) tiene dos raíces reales de distinto signo y \mathbf{x}_0 es un punto silla (del lineal y del no lineal) o bien (si $|\mathbf{M}| > 0$) las raíces son imaginarias puras y hay un centro en la aproximación lineal. Además es fácil ver, por ser H continua, que $H(x, y) = H(x_0, y_0)$ contiene además del punto \mathbf{x}_0 todas las órbitas que tienden a dicho punto cuando t tiende a $+\infty$ o $-\infty$, con lo que [S] no puede tener focos (sería $H \equiv \text{cte}$ y $\mathbf{M} \equiv \mathbf{0}$ en todo un entorno y \mathbf{x}_0 no sería aislado) y los centros del lineal lo son también en el no lineal.

Ej 1. $\begin{cases} x' = 2x - 2xy \\ y' = 2x - 2y + y^2 \end{cases} = 0 \rightarrow x=0, y=1 \downarrow$
 $y=0, 2, x=\frac{1}{2}$. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ 2 & 2y-2 \end{pmatrix}$ en cada punto:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 2 & \mp 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2$: sillas. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2}i$: centro de la aproximación lineal.

Como sabemos este centro podría conservarse o ser un foco E o I de nuestro sistema.

Pero como es exacto: $f_x + g_y = 2 - 2y - 2 + 2y \equiv 0$, sigue siendo centro del no lineal.

$$H_x = -2x + 2y - y^2 \rightarrow H(x, y) = 2xy - xy^2 - x^2 = C \text{ son las órbitas.}$$

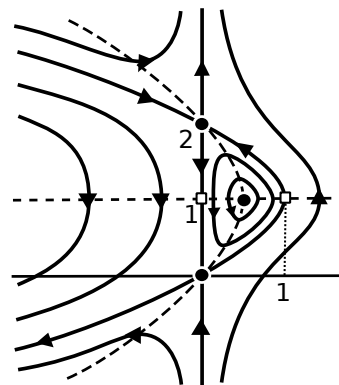
$$H_y = 2x - 2xy$$

Aunque se puede despejar la x o la y de la ecuación de segundo grado, dibujar todas las curvas $H = C$ es complicado. Pero para $C=0$ aparecen dos muy sencillas $x=0$ y $x=2y-y^2$, cada una de ellas formada por 5 órbitas distintas, entre ellas las separatrices.

El campo \mathbf{v} es horizontal sobre la parábola $x = y - \frac{1}{2}y^2$ y vertical en la órbita $x=0$ y en la recta $y=1$.

Podemos dibujar ya las órbitas, si bien aún no están orientadas. Para ello basta dar algún valor a \mathbf{v} o fijarse en algún vector propio de los puntos sillas. Por ejemplo, podemos hallar:

$$\mathbf{v}(x, 0) = 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ó } \mathbf{v}(x, 2) = 2x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Calculemos alguna solución sencilla, aunque para los sistemas exactos el primer paso hacia la solución general (tener las órbitas) siempre se puede dar (salvo primitivas no calculables).

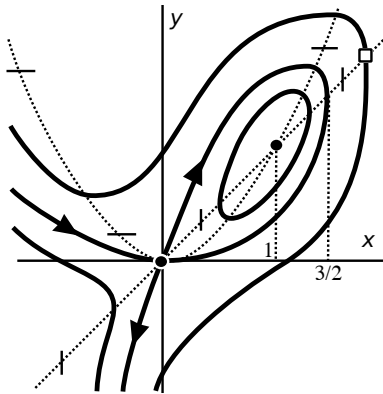
$$x(0)=0, y(0)=1 \rightarrow \text{órbita } x=0 \rightarrow y' = y^2 - 2y, y(0)=1 \rightarrow y = \frac{2}{1+e^{2t}}.$$

$$x(0)=y(0)=1 \rightarrow x = 2y - y^2 \rightarrow y' = 2y - y^2, y(0)=1 \rightarrow y = \frac{2}{1+e^{-2t}} \rightarrow x = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Estas soluciones tienen las propiedades predichas ya por el mapa de fases: están definidas $\forall t$ y tienden cuando $t \rightarrow \pm\infty$ a las soluciones constantes que indican las órbitas correspondientes.

No podemos dar otras fuera de las separatrices por aparecer $x' = \pm 2\sqrt{x^2 - x^3 - Cx}$ no integrable y no podemos calcular el periodo de las órbitas cerradas. Pero el mapa nos dice que ese periodo tiende a ∞ cuando se acercan a las separatrices, pues estas se recorren en un tiempo infinito.

Ej 2. $\begin{cases} x' = y-x \\ y' = y-x^2 \end{cases}$ Dibujemos sus órbitas y veamos si es periódica la solución con $x(0)=y(0)=2$.



Puntos críticos: $y=x \rightarrow x-x^2=0 \rightarrow x=y=0, 1$. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es silla $[\lambda = \pm 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es centro del lineal.

$f_x + g_y \equiv 0 \Rightarrow$ el sistema es exacto y el centro se conserva.

Las órbitas son: $\begin{matrix} H_x = x^2 - y \\ H_y = y - x \end{matrix} \rightarrow \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2} = C$.

\mathbf{v} es horizontal sobre $y=x^2$ y vertical en $y=x$.

Las separatrices [pasan por $(0,0) \rightarrow C=0$] vienen dadas por:

$$y^2 - 2xy + \frac{2}{3}x^3 = 0 \rightarrow y = x \pm x\sqrt{1 - \frac{2x}{3}}$$

que están definidas si $x \leq \frac{3}{2}$ (cuando $x = \frac{3}{2}$ se juntan en $y=x$).

La órbita que pasa por $(2,2)$ está fuera del lazo que forma la separatriz y la solución correspondiente **no** es periódica.

[Como siempre, la información de la aproximación lineal es sólo local: cerca del centro hay seguro órbitas cerradas, pero lejos dejarán normalmente de serlo, como en este ejemplo (y el anterior)].

Ej 3. $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 1 + 3x^2 - y^2 \end{cases}$ Puntos críticos: $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 6x & -2y \end{pmatrix}$.

\mathbf{M} en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, silla.

\mathbf{M} en $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, silla.

Las órbitas se hallan fácilmente por ser exacto:

$$\begin{matrix} H = xy^2 - x^3 - x + p(y) \\ H = xy^2 + q(x) \end{matrix} \rightarrow xy^2 - x^3 - x = C$$

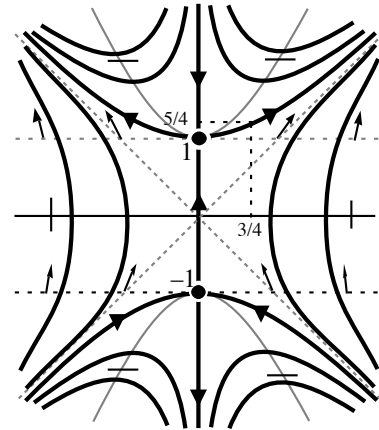
[También es de Bernoulli (más largo):

$$2yy' = -\frac{y^2}{x} + \frac{1+3x^2}{x} \xrightarrow{z=y^2} z' = -\frac{z}{x} + \frac{1+3x^2}{x}, z = \frac{1}{x}C + 1 + x^2]$$

Las separatrices se obtienen para $C=0$ con lo que son

la recta $x=0$ y la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$.

[$\mathbf{v}(x, \pm 1) = \begin{pmatrix} \pm 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$ confirma la deformación de las separatrices].



Pendiente horizontal sobre la hipérbola $y^2 - 3x^2 = 1$. Es vertical en la separatriz $x=0$ y en $y=0$.

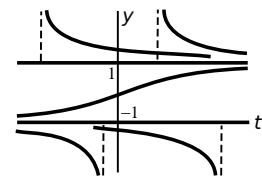
[Simetría respecto a ambos ejes: H depende de y^2 , cambiando x por $-x$ sale la órbita $H=-C$].

Intentemos dar la solución general. Es posible despejar la y de $H=C$, pero de ahí no pasamos:

$$y = \pm \sqrt{\frac{C}{x} + 1 + x^2} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm 2\sqrt{Cx + x^2 + x^4}, \text{ no integrable.}$$

Como en otras muchas ocasiones, se pueden hallar soluciones asociadas a órbitas sencillas. Las más fáciles son aquellas cuya proyección es $x=0$:

$$y' = 1 - y^2 \rightarrow \int \frac{2dy}{1-y^2} = \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = 2t + C, y = \frac{Ce^{2t}-1}{Ce^{2t}+1} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \pm 1 \dots$$



Pero muchas propiedades de una autónoma están en su dibujo (unido al hecho de que todas sus soluciones no acotadas explotan por el y^2).

Busquemos ahora la solución del sistema que cumple $x(0)=3/4, y(0)=5/4$:

$$\text{Por } \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \text{ pasa la órbita de } C = \frac{3}{4} \left(\frac{25}{16} - \frac{9}{16} - 1\right) = 0 \rightarrow y^2 - x^2 = 1 \rightarrow$$

$$x' = 2x\sqrt{1+x^2}, x(0) = \frac{3}{4}, \text{ o mejor } y' = 2y^2 - 2, y(0) = \frac{5}{4} \rightarrow 2t = \int_{5/4}^y \frac{ds}{s^2-1}$$

Hallando la primitiva y despejando obtendríamos la $y(t)$ [y de ella y la órbita, la $x(t)$].

Pero, de nuevo, hay propiedades de las autónomas de primer orden que se ven sin necesidad de integrar: $y(t) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow -\infty, y(t)$ explota para un $t_1 > 0 \dots$

Podemos precisar la estabilidad de las soluciones identificadas que están definidas hasta ∞ :

Los dos puntos críticos son inestables (para decirlo bastaba hallar los λ).

Las soluciones con $x(0)=0, y(0)=b$ son inestables si $-1 < b < 1$ o $b > 1$, porque, aunque su $y(t) \rightarrow 1$ para todas, la $x(t)$ de soluciones cercanas tiende a $\pm\infty$.

Caso particular de los sistemas exactos son las **ecuaciones exactas**:

$$\boxed{x'' = g(x)} \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = g(x) \end{cases} \rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g'(x) & 0 \end{pmatrix}, [0] \quad v \frac{dv}{dx} = g(x).$$

Sus órbitas vienen dadas entonces por:

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} - \int g(x) dx = C, \text{ o sea, } \boxed{\frac{v^2}{2} + V(x) = C, \text{ si } V(x) = -\int g(x) dx}.$$

[Si la ecuación describe el movimiento (sin rozamiento) sobre el eje x de una partícula sometida a una fuerza que sólo depende de su posición, H representa la energía total, $v^2/2$ es la cinética y $V(x)$ es la potencial].

A la vista de la solución está claro que las órbitas son simétricas respecto al eje x y que la órbita u órbitas asociadas a cada valor de C son curvas definidas en los intervalos del eje x para los que $V(x) \leq C$ y que cortan dicho eje en los x tales que $V(x) = C$. Con esto y el teorema siguiente **podremos dibujar el mapa de fases conociendo simplemente la gráfica de la función potencial $V(x)$** .

Teor 2. Si V tiene un mínimo en x_0 entonces $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un centro del mapa de fases. Si V tiene un máximo, \mathbf{x}_0 es un punto silla.

Si V tiene un extremo en x_0 es $V'(x_0) = -g(x_0) = 0$ y \mathbf{x}_0 es punto crítico.

La ecuación de autovalores en \mathbf{x}_0 es $\lambda^2 + V''(x_0) = 0$ y así se trata de un centro si $V''(x_0) > 0$ (mínimo de V) o de un punto silla si $V''(x_0) < 0$ (máximo de V).

[El teorema es válido también aunque \mathbf{x}_0 sea no elemental, es decir, si $V''(x_0) = 0$, aunque en este caso las sillas no son exactamente iguales y puede aparecer otro tipo de puntos asociados a puntos de inflexión (veremos ejemplos de ello en 4.1)].

Ej 4. $\boxed{x'' = 1 - x^2} \rightarrow V(x) = -x + \frac{1}{3}x^3.$

De sólo la gráfica de $V(x)$ del dibujo superior se deduce el mapa de fases del inferior: como V posee un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$ el mapa de fases tiene el punto silla y el centro dibujados abajo.

Trazamos ahora diferentes rectas $V = C$ y las órbitas asociadas a cada una de ellas $v^2/2 = C - V(x)$.

Para $C = 0$, $V(x) \leq 0$ si $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ (y la órbita, curva simétrica definida en ese intervalo y que corta $v = 0$ en sus extremos, será una curva cerrada rodeando al mínimo) o si $x \leq -\sqrt{3}$ (la órbita sólo corta $v = 0$ en $x = -\sqrt{3}$ y, por tanto, es abierta).

Similares son las dos órbitas dibujadas para un $C < 0$.

La $V = C$ que pasa por el máximo de V nos da una órbita que corta $v = 0$ en dos puntos uno de los cuales es el punto silla. Nos proporciona, pues, cuatro órbitas: el punto, la órbita que sale y entra en él (que suele llamarse órbita 'homoclínica') y las separatrices de la izquierda.

Para un C mayor se tiene la última órbita.

Las órbitas se orientan como en toda ecuación (hacia la derecha arriba, hacia la izquierda abajo).

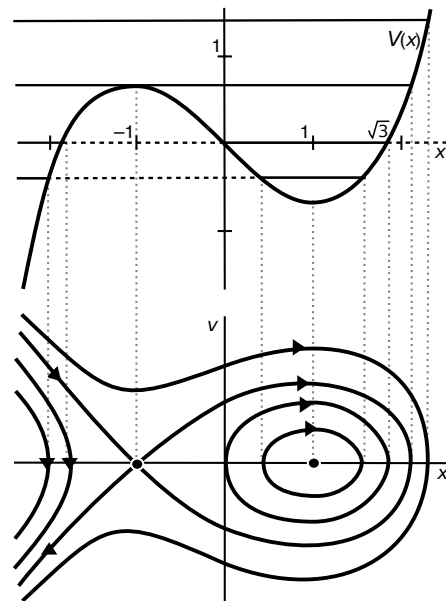
Podríamos precisar el dibujo usando las técnicas generales de las secciones anteriores: vectores propios del punto silla, puntos de pendiente horizontal (que serán siempre las rectas verticales que contienen a los puntos críticos, pues se obtienen haciendo $g(x) = 0$), ... Pero las principales características de las órbitas ya se ven en el dibujo anterior.

Es fácil dar interpretación física a cada una de las órbitas del mapa de fases dibujado.

Como para una ecuación exacta tenemos unas órbitas bastante sencillas, parece que se podría calcular su solución general (pero casi siempre nos encontramos con primitivas no calculables):

$$v = \pm \sqrt{2} \sqrt{C - V(x)} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2} \sqrt{C - V(x)}} = t + K,$$

Por ejemplo, en este caso tenemos la 'integral elíptica' no calculable $\int [x - \frac{1}{3}x^3 + C]^{-1/2} dx$.



Ej 5. $x'' = x^3 - 7x^2 + 10x$ Dibujemos sus órbitas y precisemos sus soluciones periódicas.

El mapa de fases se deduce de la función potencial:

$$g(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2, x = 5.$$

$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 5x^2.$$

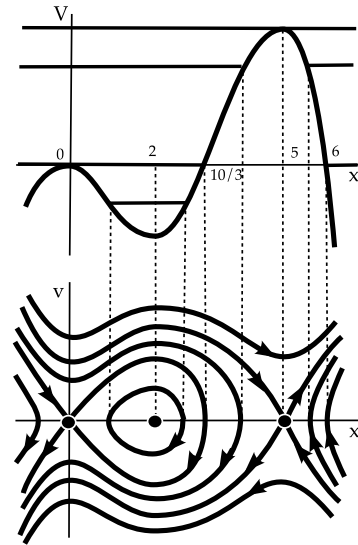
$$V(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{10}{3}, x = 6.$$

$$V(0) = 0, V(2) = -\frac{16}{3}, V(5) = \frac{125}{12}.$$

Las soluciones periódicas no triviales corresponden a órbitas cerradas del mapa de fases (asociadas a segmentos entre las paredes del potencial). En el mapa se ve que lo son todas las órbitas que están dentro de la separatriz que entra y sale del origen.

Preocupémonos en concreto para qué valores a es periódica la solución con $x(0) = a, x'(0) = 0$ (dónde hay que dejar en reposo la partícula para que oscile). Se ve que esto ocurre si $0 < a < \frac{10}{3}$.

[Además, si $a = 0, a = 2, a = 5$, la solución es periódica trivialmente, pues es constante, pero si atinamos a dejar la partícula en los inestables $x = 0$ ó $x = 5$, un pequeño soplo nos va a convertir el movimiento en uno no periódico].



Intentemos calcular el periodo T de una solución, por ejemplo, cuando $a = 3$. Su órbita es:

$$C = -\frac{81}{4} + 63 - 45 = -\frac{9}{4} \rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2 - \frac{9}{4}, v = \pm \frac{\sqrt{3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27}}{\sqrt{6}} = \frac{dx}{dt}$$

Además de en 3 la órbita cerrada corta $v = 0$ en otro punto que exige usar el ordenador:

$$3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27 = (x-3)(3x^3 - 19x^2 + 3x + 9) = 0 \rightarrow x = 3, x_1 \approx 0.835 \text{ (y } x_2 < 0, x_3 > 6).$$

Por simetría, el periodo será el doble de lo que tarda en ir de x_1 a 3:

$$T = 2\sqrt{6} \int_{x_1}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x^4 - 28x^3 + 60x^2 - 27}} \approx 2.849 \text{ (de nuevo con el ordenador).}$$

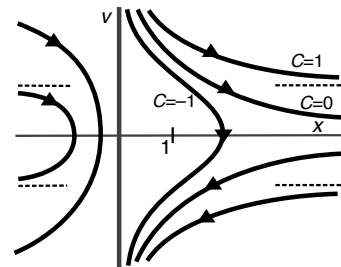
[A diferencia de los sistemas lineales, el periodo T de cada solución es distinto. Ya dijimos que $T \rightarrow \infty$ al acercarnos a la separatriz (recorrida en tiempo infinito), o sea, si $a \rightarrow 0$ (ó $a \rightarrow 10/3$).

Se puede probar además que el T de las oscilaciones de pequeña amplitud (con $a \sim 2$) tiende al de la aproximación lineal, y en este caso (para el que $\lambda = \pm\sqrt{6}i$), debe $T \rightarrow \pi\sqrt{2/3} \approx 2.565$].

Ej 6. $x'' = -x^{-2}$ Sin puntos críticos. Órbitas $x = \frac{2}{\sqrt{2-C}}, v = \pm\sqrt{C + \frac{2}{x}}$.

Describe, para $x > 0$, el movimiento bajo un campo gravitatorio en unidades adecuadas. La interpretación física del mapa es clara:

Si $x(0) = 2$ (por ejemplo), $x'(0) = v_0$ y es $v_0 < 1$, la partícula cae al origen; $v_0 = 1$ es la llamada velocidad de escape: para velocidades iniciales mayores que ella la partícula se aleja del origen indefinidamente (a una velocidad que tiende a constante).



Calculemos el tiempo T que tardaría una partícula, inicialmente en reposo en $x = 2$, en llegar hasta el origen. Su órbita [$v(x=2) = 0$] es la de $C = -1$. Así pues:

$$T = \int_0^T dt = -\int_2^0 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2-x}} = \left[\sqrt{x}\sqrt{2-x} + 2 \arctan \sqrt{\frac{2}{x}-1} \right]_2^0 = \pi.$$

Ej 7. $x'' = \sqrt{x}$ La ecuación sólo tiene sentido para $x \geq 0$.

El único punto crítico es el origen y la única solución constante es $x \equiv 0$. En ese punto la aproximación lineal no existe, pues f no es derivable.

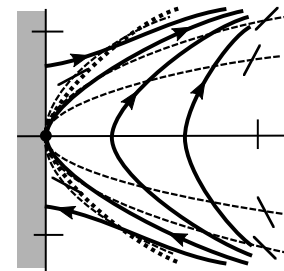
Sus órbitas son $v^2 = \frac{4}{3}x^{3/2} + C$. Dibujamos sus isoclinas $\frac{\sqrt{v}}{x} = K$, para $K = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \infty$ y la curva de inflexión de las órbitas $v^2 = 2x^{3/2}$.

Calculemos la solución con $x(2) = 1/9, x'(2) = 2/9$. Para dar la órbita asociada imponemos que $v(x=1/9) = 2/9 \rightarrow C = 0$. Así pues:

$$v = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/4} = \frac{dx}{dt}, 2\sqrt{3}x^{1/4} = t + k, x = \frac{(t+k)^4}{144} \xrightarrow{x(2)=1/9} x = \frac{t^4}{144}.$$

[En $x = 0$ podía fallar la unicidad y hay dos soluciones cumpliendo $x(0) = x'(0) = 0$: ésta y $x \equiv 0$].

$\left| x^{3/4} - \sqrt{x^{3/2} + C} \right| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ pero ignoramos si nuestra solución es estable [no calculable $x(t), C \neq 0$].



3.4 ¿Centro o foco? Técnicas sencillas

Vimos en la sección 3.2 que el único caso en que no basta el estudio de la aproximación lineal para clasificar un punto crítico elemental \mathbf{x}_0 de un sistema no lineal

$$[S] \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

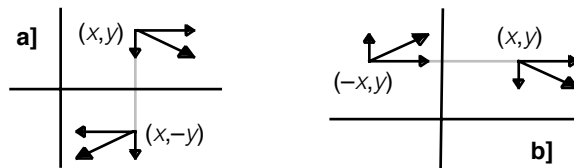
es el caso en que la aproximación lineal posea un centro, ya que entonces el punto de [S] (si es analítico) puede también ser un centro o bien ser un foco estable o inestable. Tratamos en la sección anterior una situación en la que el centro del lineal se conservaba: si [S] era **exacto**. En esta sección veremos otras técnicas sencillas para atacar el problema: el estudio de las posibles simetrías y una primera utilización de las coordenadas polares.

Desde luego se conservará un centro si las órbitas de [S] poseen **simetría** respecto a alguna recta que pase por \mathbf{x}_0 (las órbitas en torno a un centro pueden ser asimétricas y hay puntos críticos con simetría especular (los focos, claramente no la tienen) que no son centros, pero si un punto con esta simetría es o centro o foco, necesariamente será centro).

El análisis de las simetrías se podrá hacer a la vista de las órbitas, en el caso excepcional de que la ecuación diferencial de las órbitas sea resoluble, o a partir del propio campo \mathbf{v} . Un ejemplo de esto último lo da el siguiente teorema:

Teor 1.

Si \mathbf{x}_0 es punto crítico de [S], la aproximación lineal posee un centro y o bien **a]** \mathbf{x}_0 está sobre el eje x , $f(x, -y) = -f(x, y)$, $g(x, -y) = g(x, y)$, o bien **b]** \mathbf{x}_0 está sobre el eje y , $f(-x, y) = f(x, y)$, $g(-x, y) = -g(x, y)$, entonces \mathbf{x}_0 es un centro del sistema no lineal [S].



Las hipótesis sobre f y g aseguran en el caso **a]** que las órbitas son simétricas respecto a $y=0$ y en el **b]** que lo son respecto a $x=0$ (y que se recorren en sentidos opuestos a cada lado del eje, como debe ser en un centro). De ello se sigue el resultado.

En el caso particular de las ecuaciones las condiciones sobre f se satisfacen siempre y basta comprobar las de la g : debe ser par en y o, si \mathbf{x}_0 es el origen, impar en x .

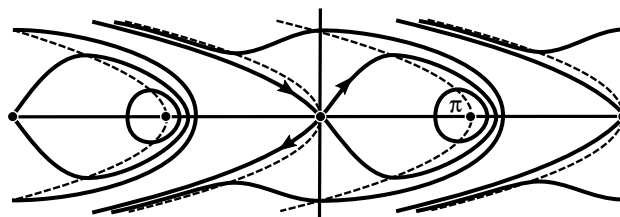
[Conocer las simetrías de un sistema no sólo es útil para distinguir entre centro y foco. Nos da bastante información sobre un mapa de fases, según vimos en algún ejemplo de secciones anteriores (como el 6 de 3.2, el 3 de 3.3 o las ecuaciones exactas)].

Ej 1. $x'' = \text{sen}(x + [x']^2)$, es decir, $\begin{cases} x' = v \\ v' = \text{sen}(x + v^2) \end{cases}$. Clasifiquemos sus puntos críticos.

Estos resultan ser $\begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, con aproximación lineal $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x+v^2) & 2v \cos(x+v^2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, si k es par son puntos silla (del lineal y no lineal como siempre) y si k impar son centros de la aproximación lineal. Como g es par en v , estos centros lo son también del sistema no lineal (y las órbitas son simétricas respecto al eje x).

Para dibujar el mapa de fases vemos además que las órbitas son horizontales sobre las parábolas $x = K\pi - v^2$, los vectores propios de las sillas y el hecho de que el campo \mathbf{v} se repite periódicamente en la variable x . La orientación es la de toda ecuación.



Ej 2. $x'' = x - x^3 - x(x')^2 \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = x - x^3 - xv^2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ silla ($\lambda = \pm 1$), $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ centros del lineal.

Los centros se conservan, pues también se cumple el apartado **a**] del teorema 1 (g es par en v). Pero aquí no era necesario, pues podemos hallar sus órbitas explícitamente:

$$\frac{dv}{dx} = -xv + \frac{x-x^3}{v} \text{ (Bernouilli)} \rightarrow v^2 = Ce^{-x^2} + 2-x^2$$

y comprobar su simetría respecto de ambos ejes.

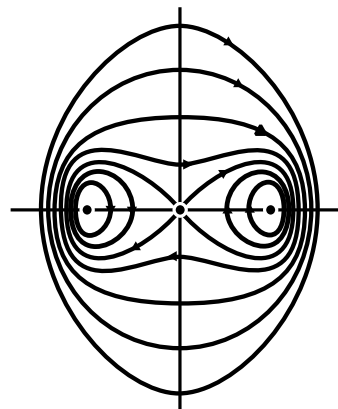
Con las órbitas podemos hacer un preciso mapa de fases.

La separatriz (que aparece para $C = -2$) corta $y=0$, además de en $x=0$, en los x tales que:

$$2e^{-x^2} = 2-x^2 \quad (x \approx \pm 1.26 \text{ con ordenador})$$

y para $C > -2$ todas las órbitas son cerradas (si $C=0$ circular).

El campo es horizontal sobre $x^2 + v^2 = 1$ y sobre $x=0$ (y vertical como en toda ecuación sobre $y=0$).



Ej 3. $x'' = x^3 - x - xx'$ $\begin{cases} x' = v \\ v' = x^3 - x - xv \end{cases}$ $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 1 - v & -x \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \mp 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \mp 2, \pm 1$ (sillas).

En $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\lambda = \pm i$. $g(-x, v) = -g(x, v) \Rightarrow$ centro en el sistema no lineal (y simetría respecto al eje v).

\mathbf{v} es horizontal si $x=0$ y si $v=x^2-1$. $\mathbf{v}(\pm 1, v) = \begin{pmatrix} v \\ \mp v \end{pmatrix}$.
Vertical si $v=0$, como en toda ecuación.

En principio [o] $v \frac{dv}{dx} = x(x^2-1-v)$ no sabemos resolverla.

Las separatrices adoptan un aspecto parabólico $v = A(x^2-1)$

$$\rightarrow 2A^2(x^3-x) = x^3-x-A(x^3-x) \rightarrow y = 1-x^2, y = \frac{x^2-1}{2}$$

que son precisamente las separatrices de las sillas.

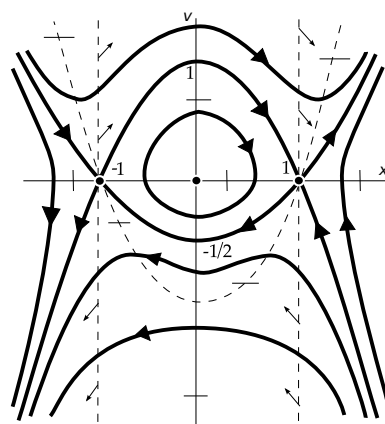
Sugiere esto hacer en [o] el cambio de variable $u = \frac{1}{2}[x^2-1]$

$$\rightarrow \frac{dv}{du} x = \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = \left[\frac{2u}{v} - 1 \right] x \rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{2u-v}{v}$$

que es homogénea (y, por tanto, resoluble): $z = \frac{v}{u} \rightarrow \int \frac{z dz}{(z+2)(z-1)} = C - \int \frac{du}{u} \rightarrow (v+2u)^2(v-u) = C$.

Deshaciendo el cambio obtenmos las órbitas de nuestro sistema: $(v+x^2-1)^2(2v-x^2+1) = C$.

En la expresión se vuelve a ver la simetría (y las separtrices halladas antes tanteando).



Ej 4. $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1) \end{cases}$ [El sistema es, con parámetros muy concretos, el de Lotka-Volterra que rige la evolución de la población de dos especies en relación predador-presa].

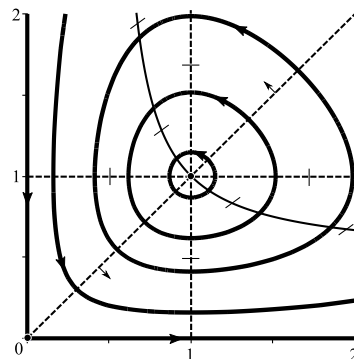
Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ punto silla y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ centro de la aproximación lineal.

¿Seguirá el centro siendo un centro del sistema no lineal? Se podría llevar al origen haciendo $u = x-1, v = y-1$ e intentar aplicar el teorema 1, pero el sistema en uv que resulta no satisface ninguna de las dos parejas de condiciones.

Pero podemos calcular la expresión implícita de las órbitas (es ecuación separable): $y - \ln y + x - \ln x = C$.

Como esta expresión no varía al cambiar los papeles de x e y , las órbitas son simétricas respecto a la recta $y=x$, con lo que el centro se mantiene en el no lineal.

En el dibujo están también las rectas de pendiente horizontal y vertical, los valores de $\mathbf{v}(x,x)$ y la isoclina de pendiente 1.



[En el teorema 1 nos hemos limitado a precisar las posibles simetrías respecto a los ejes, pero se podrían dar condiciones sobre \mathbf{v} que diesen la simetría respecto a $y=x$ u otras rectas].

[Una forma alternativa (y generalizable) de probar que sigue el centro es considerar el sistema

$$[\bullet] \begin{cases} x' = \frac{1}{y} - 1 \\ y' = 1 - \frac{1}{x} \end{cases}, \text{ que tienen las mismas órbitas que el inicial en } x, y > 0, \text{ pues } \mathbf{v}^* = \frac{1}{xy} \mathbf{v}.$$

Como el $[\bullet]$ es exacto ($f_x^* + g_y^* \equiv 0$), no puede tener focos en la región y el centro se conserva].

En ocasiones es fácil precisar que el centro pasa a ser foco estable o inestable escribiendo el sistema en **coordenadas polares** (en general aparece un sistema más complicado que el inicial, pero es el camino hacia los resultados generales de la siguiente sección).

Derivando $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$ se obtiene:
$$\begin{cases} r' \cos \theta - \theta' r \sin \theta = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ r' \sin \theta + \theta' r \cos \theta = g(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

Y multiplicando por $\cos \theta$ o $\sin \theta$ y sumando o restando según convenga deducimos:

$$\begin{cases} r' = \cos \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \theta' = \frac{1}{r} [\cos \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta)] \end{cases}$$

Ej 5. Precisemos la estabilidad de las soluciones constantes de
$$\begin{cases} x' = y + x^3 \\ y' = -x + y^3 \end{cases}$$

$x=y^3 \rightarrow y(1+y^8)=0 \rightarrow y=0 \rightarrow x=0$. El único punto crítico es el origen con $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hay, pues, un centro en la aproximación lineal, y todavía no conocemos su estabilidad. Como no es exacto ni presenta simetrías (a pesar de ello, aún podría ser un centro) pasamos a polares:

$$\begin{cases} r' = r^3(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \theta' = -1 + \sin \theta \cos \theta(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{cases}$$

Como $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta > 0 \forall \theta$, r crece con el tiempo \Rightarrow el origen (la solución trivial) es (foco) **inestable**.

Ej 6.
$$\begin{cases} x' = ax - 2y - x^3 \\ y' = 2x + ay - 2x^2y - y^3 \end{cases}$$
 Clasifiquemos el origen para todo valor de a .

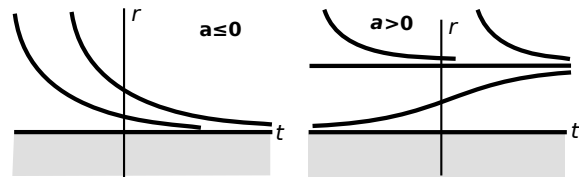
Como la matriz de la aproximación lineal $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ tiene por autovalores $\lambda = a \pm 2i$ deducimos que:

Si $a < 0$ es foco estable, si $a > 0$ es foco inestable y si $a = 0$ es centro del lineal.

Por no ser exacto ni simétrico el sistema hacemos el trabajo de pasar a polares, obteniendo:

$$\begin{cases} r' = ar - r^3 \\ \theta' = 2 - r^2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

Por suerte sale una sencilla ecuación autónoma para r fácil de dibujar. Al decrecer la distancia al origen con t podemos asegurar que para $a = 0$ es un foco estable (no lo sabíamos).



Utilicemos la expresión en polares para dar el mapa de fases para otro valor de a concreto: $a = 1$.

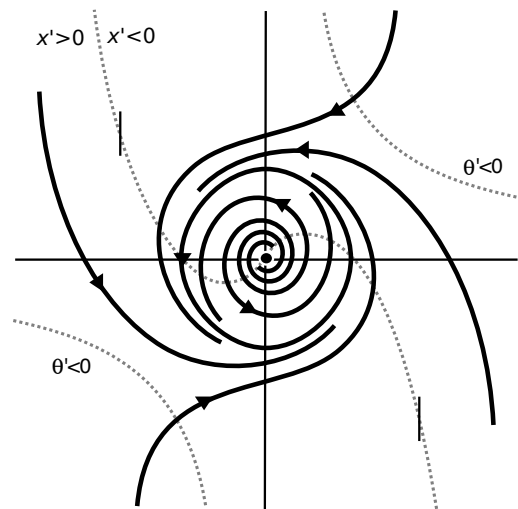
Entonces $r' = r - r^3$ tiene sólo la solución constante $r = 1$ en $r > 0$. Además de $r = 0$ (que da otra vez el punto crítico) y $r = -1$ (sin sentido en polares).

Para $r = 1$ es $\theta' = 2 - \sin 2\theta/2 > 0$. Hay por tanto una órbita (la circunferencia unidad) tal que $r = 1$ para todo t y tal que su θ crece con el tiempo [se llama **ciclo límite a una órbita cerrada aislada** como esta]. Se ve en la autónoma de primer orden que toda el resto de órbitas tienden hacia ella cuando $t \rightarrow \infty$.

Vemos también que no hay más puntos críticos que el $(0,0)$ (es difícil verlo con la expresión cartesiana) pues $r' = \theta' = 0$ no tiene más soluciones (para una solución constante tanto r como θ deben ser constantes).

[Para cualquier otro $a \in (0,4)$ hay también ciclo límite de radio \sqrt{a} . Si $a \geq 4$ aparecen puntos críticos en él].

Dibujando además la curva de puntos con $x' = 0$ y con $\theta' = 0$ [$y = (x - x^3)/2$ y $xy = 2$, respectivamente] se puede ya trazar el mapa de fases.



Es fácil precisar qué soluciones del sistema están definidas para todo t : las periódicas asociadas al ciclo límite y las asociadas a las órbitas contenidas en su interior, por estar acotadas. Llegan, sin embargo, a infinito en tiempo negativo finito aquellas cuya proyección cae fuera del ciclo límite, pues lo hace su distancia al origen, como se deduce de la ecuación para r' .

[Cuando para un valor de un parámetro cambia radicalmente (como en este caso para $a = 0$) la estructura del mapa de fases, se dice que se ha producido una **bifurcación** en el sistema].

Ej 7. $\begin{cases} x' = y + x^2 y \\ y' = -x + x y^2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ único punto crítico. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm i$ centro de la aproximación lineal.

Es resoluble: $\frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2-1)}{y(x^2+1)}$, $\int \frac{2y dy}{y^2-1} = \int \frac{2x dx}{x^2+1} + C$, $\ln(y^2-1) = \ln(x^2+1) + C$, $y^2 = 1 + C(x^2+1)$ (cónicas).

Por ser simétricas respecto a ambos ejes (o por ser cónicas), el centro lo sigue siendo del no lineal.

Podemos dibujar el mapa a partir de las órbitas. Si $C=0$ la cónica degenera en dos rectas, si $C>0$ son hipérbolas, si $C<0$, elipses.

Como $x' = (1+x^2)y$, las órbitas se recorren en el sentido de las ecuaciones: arriba hacia la derecha, abajo hacia la izquierda.

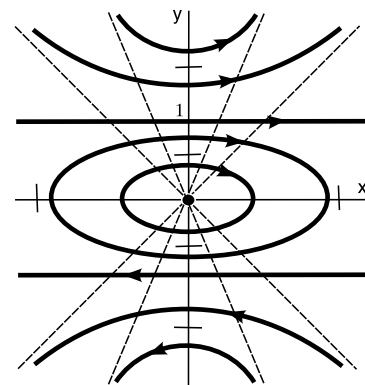
\mathbf{v} es horizontal si $x=0$ ó si $y=\pm 1$ (órbitas). Es vertical si $y=0$.

Calculemos el **periodo** T de las órbitas periódicas. Para hacerlo conviene escribir el sistema en polares:

$$\begin{cases} r' = \cos \theta f + \sin \theta g = r^3 \cos \theta \sin \theta \\ \theta' = \frac{1}{r} [\cos \theta g - \sin \theta f] = -1 \quad (\text{confirma sentido horario}). \end{cases}$$

Como $\theta = K - t$ es claro aquí que para todas las elipses es $T = 2\pi$.

En general, **el periodo del sistema no lineal tiende al de la aproximación lineal cuando la amplitud tiende a cero.**



[En este ejemplo particular coinciden exactamente con el de ella. \mathbf{M} es la matriz de $x'' + x = 0$].

[La afirmación es consecuencia del hecho de que un sistema del tipo $x' = ay + \dots$, $y' = -ax + \dots$ escrito en polares tiene una ecuación para θ del tipo $\theta' = a + rh(r, \theta) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \theta' = a$].

De la sencilla θ calculada deducimos también que las órbitas rectas se recorren en un tiempo finito π . Podemos calcular las soluciones (por ejemplo la de abajo) y comprobarlo:

$$\text{La órbita con } y(x=0) = -1 \text{ es } 1 = 1 + 2C \rightarrow y = -1 \rightarrow x' = -(1+x^2) \rightarrow x = \tan(C-t).$$

Y también nos dice la θ que explotan en tiempo finito las soluciones asociadas a las hipérbolas.

Lo comprobamos utilizando cartesianas: $y = \pm \sqrt{1 + C + Cx^2}$, $C > 0 \rightarrow x' = \pm (x^2 + 1) \sqrt{1 + C + Cx^2}$, cuyas soluciones (todas no acotadas, pues no tiene esta ecuación soluciones constantes) se comportan para x grande como las de $x' = x^3$ según el teorema de las ecuaciones autónomas.

Acabamos la sección con un ejemplo de un tercer tipo de punto en el que puede convertirse un centro lineal cuando el sistema es **no analítico**: el llamado **centro-foco**.

Ej 8. $\begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2)^2 \sin \frac{\pi}{x^2 + y^2} \\ y' = -x + y(x^2 + y^2)^2 \sin \frac{\pi}{x^2 + y^2} \end{cases}$ En polares adopta la forma: $\begin{cases} r' = r^5 \sin \frac{\pi}{r^2} \\ \theta' = -1 \end{cases}$.

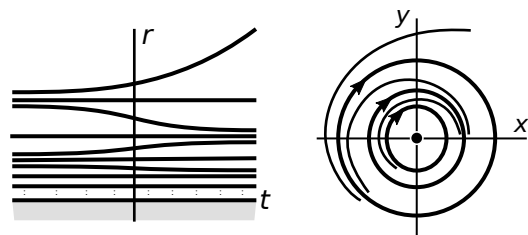
El único punto crítico (en polares es claro) es el origen. Existen las parciales en él y es $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

El sistema es claramente no analítico (las derivadas de órdenes mayores dejan de existir).

A este centro de la aproximación lineal corresponde un nuevo tipo de punto del no lineal.

La autónoma tiene infinitas soluciones constantes para r cerca del origen: $r = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbf{N}$.

Cada una da lugar a una solución periódica aislada (ciclo límite) y el resto de las órbitas se acercan a ellas o se alejan de ellas cuando $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow -\infty$ dependiendo de la paridad de n .



3.5 Cambio de estabilidad de centros elementales

Consideremos un sistema analítico para el que el origen sea un punto elemental cuya aproximación lineal tenga autovalores imaginarios puros. Este sistema, con cambios lineales y salvo un factor constante de los segundos miembros, y agrupando los términos homogéneos del mismo orden, se podrá escribir en la forma:

$$[S] \begin{cases} x' = y + A^2(x, y) + A^3(x, y) + \dots = y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots \\ y' = -x + B^2(x, y) + B^3(x, y) + \dots = -x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + \dots \end{cases}$$

Estudiemos cuándo se convierte en un foco estable o inestable del sistema no lineal [S]. Escribiendo [S] en polares se tiene $[c = \cos \theta, s = \sin \theta]$:

$$\begin{cases} r' = [cA^2(c, s) + sB^2(c, s)]r^2 + [cA^3(c, s) + sB^3(c, s)]r^3 + \dots \equiv M_2r^2 + M_3r^3 + \dots \\ \theta' = -1 + [cB^2(c, s) - sA^2(c, s)]r + [cB^3(c, s) - sA^3(c, s)]r^2 + \dots \equiv -1 + m_2r + m_3r^2 + \dots \end{cases}$$

Desarrollando en serie de potencias de r la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema en polares obtenemos:

$$\begin{aligned} [e] \frac{dr}{d\theta} &\equiv R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3 + R_4(\theta)r^4 + R_5(\theta)r^5 + \dots \\ &= -\frac{M_2r^2 + M_3r^3 + M_4r^4 + \dots}{1 - [m_2r + m_3r^2 + \dots]} = -(M_2r^2 + M_3r^3 + M_4r^4 + \dots)(1 + m_2r + [m_2^2 + m_3]r^2 + \dots) \\ &= -M_2r^2 - [M_2m_2 + M_3]r^3 - [M_2m_2^2 + M_2m_3 + m_2M_3 + M_4]r^4 \\ &\quad - [M_2m_2^3 + 2M_2m_2m_3 + m_2^2M_3 + M_3m_3 + m_2M_4 + M_2m_4 + M_5]r^5 - \dots \end{aligned}$$

La solución $r(\theta)$ con $r(0) = r_0$ de [e] será una función analítica de r_0 , que se anula si $r_0 = 0$:

$$r(\theta) \equiv u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + u_3(\theta)r_0^3 + \dots$$

Haciendo $\theta = 0$:

$$r_0 \equiv u_1(0)r_0 + u_2(0)r_0^2 + u_3(0)r_0^3 + \dots \Rightarrow u_1(0) = 1, u_k(0) = 0 \text{ si } k > 1.$$

Llevando la expresión de $r(\theta)$ a [e] obtenemos:

$$u_1' r_0 + u_2' r_0^2 + u_3' r_0^3 + \dots = u_1^2 R_2 r_0^2 + [2u_1 u_2 R_2 + u_1^3 R_3] r_0^3 + \dots$$

Igualando potencias: $u_1' = 0$, que junto al dato inicial $u_1(0) = 1$ nos lleva a que $u_1(\theta) = 1$. Además:

$$\begin{aligned} u_2' &= R_2 \\ u_3' &= 2u_2 R_2 + R_3 \\ u_4' &= [2u_3 + u_2^2] R_2 + 3u_2 R_3 + R_4 \\ u_5' &= 2[u_4 + u_3 u_2] R_2 + 3[u_2^2 + u_3] R_3 + 4u_2 R_4 + R_5 \quad \dots \end{aligned}$$

Este sistema, unido al dato $u_k(0) = 0$ nos permitirá ir calculando sucesivamente los $u_k(\theta)$:

$$u_2(\theta) = \int_0^\theta R_2, \quad u_3(\theta) = \int_0^\theta [2u_2 R_2 + R_3], \quad u_4(\theta) = \int_0^\theta [(2u_3 + u_2^2) R_2 + 3u_2 R_3 + R_4], \dots$$

El hecho de que 0 sea centro o foco dependerá de que, cerca de 0, el valor de la $r(\theta)$ en $\theta = 2\pi$ sea igual o distinto que el valor para el inicial $\theta = 0$. En concreto, como θ decrece con t cerca de 0, será foco estable si $r(2\pi) > r(0)$ e inestable si la desigualdad es la opuesta.

Nos interesa, pues, hallar el signo de:

$$r(2\pi) - r(0) = u_2(2\pi)r_0^2 + u_3(2\pi)r_0^3 + u_4(2\pi)r_0^4 + \dots$$

Este signo, para r_0 pequeño, lo dará el **primer término no nulo** de este desarrollo [será centro si y sólo si todos los $u_k(2\pi) = 0$]. Calculemos los primeros $u_k(2\pi)$, llamados valores focales o constantes de Lyapunov, con el menor número de cuentas posibles.

Como M_k y m_k son polinomios homogéneos en c y s de grado $k+1$, los R_k serán sumas de polinomios de paridad opuesta a la de k . Está claro entonces que $u_2(2\pi)=0$.

Para el u_3 , tenemos que

$$2 \int_0^\theta u_2 R_2 = u_2^2 \rightarrow u_3 = u_2^2 + S_3, \text{ siendo } S_3 = \int_0^\theta R_3.$$

Los términos de R_3 que contengan potencias impares de s ó c tendrán promedio 0. Así:

$$u_3(2\pi) = S_3(2\pi) = \int_0^{2\pi} [-a_{30}c^4 - (b_{21}+a_{12})c^2s^2 - b_{03}s^4 - a_{20}b_{20}c^6 + (2a_{20}a_{11} - 2b_{20}b_{11} - a_{11}b_{11} - a_{02}b_{20} - a_{20}b_{02} + a_{20}b_{20})c^4s^2 + (2a_{11}a_{20} - 2b_{11}b_{02} + a_{11}b_{11} + a_{02}b_{20} + a_{20}b_{02} - a_{02}b_{02})c^2s^4 + a_{02}b_{02}s^6] d\theta$$

La integral entre 0 y 2π de c^4 , c^2s^2 , s^4 , c^6 , c^4s^2 , c^2s^4 , s^6 vale, respectivamente, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$

Sustituyendo en la expresión de $S_3(2\pi)$, dividiendo por 1/4 y cambiando el signo del resultado para que el signo menos esté asociado a la estabilidad, concluimos que:

Teor. El origen de [S] es foco estable o inestable si, respectivamente, es menor o mayor que cero la expresión:

$$I_3 \equiv 2a_{20}b_{20} - 2a_{02}b_{02} + b_{11}(b_{20} + b_{02}) - a_{11}(a_{20} + a_{02}) + 3a_{30} + b_{21} + a_{12} + 3b_{03}.$$

El I_3 debe anularse (y así lo hace) si, por ejemplo, las órbitas son simétricas respecto a alguno de los ejes ($\Rightarrow a_{20} = a_{02} = a_{30} = a_{12} = b_{11} = b_{21} = b_{03} = 0$ ó $a_{11} = a_{30} = a_{12} = b_{20} = b_{02} = b_{21} = b_{03} = 0$) o si el sistema es exacto ($\Rightarrow 2a_{20} + b_{11} = 0$, $a_{11} + 2b_{02} = 0$, $3a_{30} + b_{21} = 0$, $a_{12} + 3b_{03} = 0$).

Vamos a comprobar con el teorema la inestabilidad del foco del ejemplo 6 de la sección anterior en el caso dudoso $a=0$. Sus órbitas tienen el sentido apuesto a las de:

$$\begin{cases} x' = y - \frac{1}{2}x^3 \\ y' = -x - x^2y - \frac{1}{2}y^3 \end{cases} \quad a_{30} = b_{03} = -\frac{1}{2}, b_{21} = -1 \Rightarrow I_3 = -4 \Rightarrow \text{foco E de este sistema.}$$

[Y el inicial tiene, pues, el foco I que las (sencillas) polares decían].

En el caso de que el sistema provenga de una **ecuación** (es decir, cuando todos los $a_{kj} = 0$) el coeficiente I_3 adopta esta forma particular: $I_{3e} = b_{11}(b_{20} + b_{02}) + b_{21} + 3b_{03}$.

Ej 1. $x'' = -x + bx^2x' - (x')^3$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + bx^2y - y^3 \end{cases}$ $b_{21} = b, b_{03} = -1, I_{3e} = b - 3 \Rightarrow \begin{matrix} b < 3 \text{ foco E.} \\ b > 3 \text{ foco I.} \end{matrix}$

Y para $b=3$, su estabilidad la daría la siguiente constante de Lyapunov no nula.

Cuando sea $I_3 = 0$ [es decir, si $u_3(2\pi) = 0$] hay que hallar el siguiente $u_k(2\pi)$ no nulo que resulta ser $u_5(2\pi)$. Haciendo integrales como antes se llega a una larga expresión que se puede simplificar sumando múltiplos adecuados de I_3 . Por ejemplo, podemos llegar en el caso de **ecuaciones** a esta expresión de la constante de Lyapunov I_5 :

$$I_{5e} \equiv 3(b_{41} + b_{23} + 5b_{05}) + b_{11}(3b_{40} + b_{22} - 5b_{04}) + (5b_{20} + 7b_{02})b_{31} + (3b_{20} + 9b_{02})b_{13} - 3(b_{21}b_{30} + b_{21}b_{12} + 6b_{03}b_{30} + 4b_{03}b_{12}) - 2b_{11}^2b_{03} + b_{11}(2b_{20} + b_{02})(b_{30} - b_{12}) + (5b_{20} + 3b_{02})(b_{20}b_{21} - 3b_{20}b_{03}).$$

O despejando b_{21} de $I_{3e} = 0$ y sustituyendo se tiene esta alternativa:

$$I_{5e}^* \equiv 3(b_{41} + b_{23} + 5b_{05}) + b_{11}(3b_{40} + b_{22} - 5b_{04}) + (5b_{20} + 7b_{02})b_{31} + (3b_{20} + 9b_{02})b_{13} - 3(b_{12} + 3b_{30})(b_{03} - b_{11}b_{02}) + b_{11}(b_{20} - b_{02})(5b_{30} + b_{12}) - 2b_{11}^2b_{03} - (3b_{03} + b_{11}b_{02})(5b_{20} + 3b_{02})(b_{20} + b_{02}).$$

Como I_3 , debe anularse también I_{5e} si la ecuación es exacta, o si g es par en y o impar en x . (Es decir, cuando $b_{kj} = 0$, si $k \neq 0$, o cuando $b_{11} = b_{21} = b_{03} = b_{31} = b_{13} = b_{41} = b_{23} = b_{05} = 0$ o cuando $b_{20} = b_{02} = b_{21} = b_{03} = b_{40} = b_{22} = b_{04} = b_{41} = b_{23} = b_{05} = 0$).

Para el ejemplo 1 de arriba, es $I_5 = 0$ con lo que seguimos sin precisar la estabilidad para $b=3$. Hay que llegar al I_7 para ver que es foco I cuyas órbitas se alejan muy lentamente del origen.

Ej 2. Estudiemos la ecuación: $x'' = -x + bx^2 + cx x' + d(x')^2$. Para ella es $I_3 = c(b+d)$.

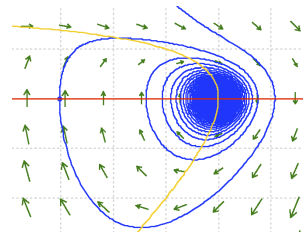
Si $I_3 < 0$ en el origen hay un foco estable y habrá uno inestable si el producto es mayor que cero.

Por ejemplo, $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + xy - y^2 \end{cases}$, con $I_3 = -1$, tiene un foco E.

Lo comprobamos integrando gráficamente con el pplane.jar.

Se ve que, a diferencia de los focos lineales, que se van al origen exponencialmente, aquí se aproximan lentamente.

En la gráfica se muestra también (en amarillo) la curva de pendiente horizontal $x = y^2/(y-1)$.



Pero ¿qué ocurre cuando $c(b+d) = 0$? Se ve que se anula el I_5 (y, si se calculase, también $I_7 = 0$). Esto no prueba, desde luego, que haya un centro en el origen. Deberían ser los infinitos $I_k = 0$. Pero vamos a comprobar que de hecho lo hay en todos los casos en que $I_3 = 0$:

Si $c = 0$, las órbitas son simétricas respecto al eje $y = 0$. [Y si además $d = 0$, es ecuación exacta].

Si $b = d = 0$, lo son respecto a $x = 0$. Más difícil es probar la conservación del centro si $b = -d \neq 0$:

[bc] $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + bx^2 + cxy - by^2 \end{cases}$. Entonces hay también un punto silla en $(\frac{1}{b}, 0)$ de autovalores:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2b} [c \pm \sqrt{c^2 + 4b^2}] \quad (\text{raíces de } b\lambda^2 - c\lambda - b = 0).$$

La integración numérica para $b = 1, c = 3/2$ ($\lambda_{\pm} = 2, -1/2$) sugiere que además de conservarse el centro parecen no deformarse las separatrices del punto silla.

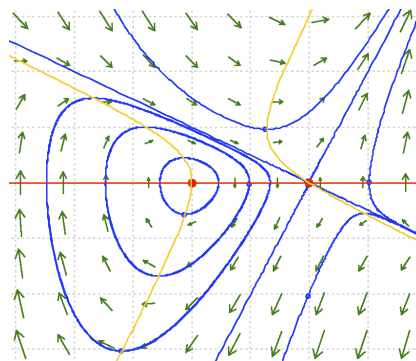
Esto es fácil de comprobar en general: el campo sobre las rectas $y = \lambda_{\pm}(x - 1/b)$ está contenido en ellas.

Tal vez un cambio lineal de variables que lleve estas rectas a los ejes convierta [bc] en un sistema más sencillo.

En efecto, haciendo $\begin{cases} p = x + \lambda_+ y - \frac{1}{b} \\ n = x + \lambda_- y - \frac{1}{b} \end{cases}$

(y usando que $\lambda_+ \lambda_- = -1, \lambda_+ + \lambda_- = \frac{c}{b}$) el sistema pasa a ser el integrable $\begin{cases} p' = \lambda_+ p(1 + bn) \\ n' = \lambda_- n(1 + bp) \end{cases}$.

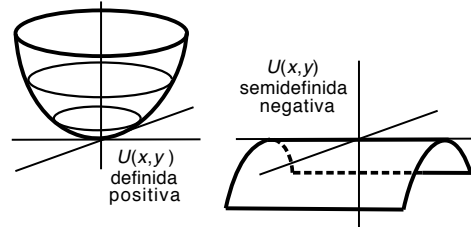
Así, una integral primera del sistema [bc] es: $\left| x - \lambda_+ y - \frac{1}{b} \right|^{\lambda_+} \left| x + \lambda_+ y - \frac{1}{b} \right|^{-\lambda_-} e^{b(\lambda_+ - \lambda_-)x} = K$.



3.6 Funciones de Lyapunov

El método directo de Lyapunov tiene como objetivo determinar la estabilidad de un punto crítico. Esto, en la mayoría de los casos, es más fácil hacerlo analizando la aproximación lineal, pero cuando ésta no decide (centros o puntos no elementales) puede ser útil acudir a dicho método. Antes de dar los resultados necesitamos unas definiciones previas:

Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ y $(0,0) \in D$. Una función $U(x,y)$ se dice **definida positiva** en D si $U(0,0) = 0$ y $U(x,y) > 0$ para cualquier otro $(x,y) \in D$. Si sustituimos $>$ por $<$ ó \leq , la U se dice, respectivamente, **definida negativa** o **semidefinida negativa**.



Por ejemplo $U(x,y) = x^2 + 2y^2$ es definida positiva y $U(x,y) = -x^2$ es semidefinida negativa en todo \mathbf{R}^2 .

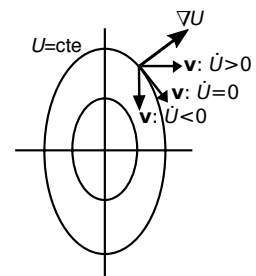
[Más en general, $U(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ es definida positiva si $A, B > 0$ y $B^2 < 4AC$, como es fácil comprobar directamente o escribiendo el Hessiano de U . Y, por ejemplo, claramente no tienen signo definido $x^2 - y^2$, x^2y o cualquier polinomio homogéneo con términos cúbicos].

Dados [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ y $U(x,y)$ será $\dot{U}(x,y) = U_x(x,y)f(x,y) + U_y(x,y)g(x,y)$ ($f, g, U \in C^1$).

Teor 1.

Supongamos que el origen es punto crítico de [S]. Si existen un conjunto D y una función U de clase 1 definida positiva en D tal que \dot{U} es definida negativa, semidefinida negativa o definida positiva en D , entonces el origen es, respectivamente, asintóticamente estable, estable o inestable. A una U con cualquiera de esas propiedades se le llama **función de Lyapunov**.

La idea de la prueba es sencilla: como $\dot{U} = \nabla U \cdot \mathbf{v}$, el ∇U es perpendicular a las curvas cerradas $U = cte$ que rodean el origen y \mathbf{v} es tangente a las órbitas, el hecho de que el producto escalar sea < 0 , ≤ 0 o > 0 en D implica que las órbitas cruzan todas las curvas de nivel de U contenidas en D hacia dentro, que no las cruzan hacia fuera o que sí lo hacen.



La dificultad del método es hallar una U adecuada. En un problema físico se puede intentar probar como U la energía total del sistema, pero en otras ocasiones deberemos tantear con funciones U que sepamos que son definidas positivas (y en muchas ocasiones no sabremos encontrar la U).

[Observemos que la inestabilidad de un punto silla no la veremos con funciones de Lyapunov].
[A veces una U aporta información que no da la aproximación lineal (resultados sólo locales). Si, por ejemplo, es $\dot{U} < 0$ en D se deduce que todas las órbitas que parten de un punto de D acaban yendo al origen. Y si D fuese todo el plano, cualquier órbita acaba en él].

Ej 1. $\begin{cases} x' = y + x^3 - xy^2 \\ y' = -x + y^3 \end{cases}$ El origen es centro de la aproximación lineal. Buscamos una U tanteando con las funciones definidas positivas más sencillas: $U = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$.

Para ellas se tiene que: $\dot{U} = 2ax(y + x^3 - xy^2) + 2by(-x + y^3) = 2(a-b)xy + 2ax^4 - 2ax^2y^2 + 2by^4$.

Para que tenga signo definido debe ser $a=b$ [$=1/2$, por ejemplo] $\rightarrow \dot{U} = x^4 - x^2y^2 + y^4$ que es definida positiva en todo \mathbf{R}^2 [$\dot{U} = (x^2 - y^2)^2 + x^2y^2$]. El origen es inestable (foco).

Podíamos afirmar esto con las técnicas de las secciones anteriores.

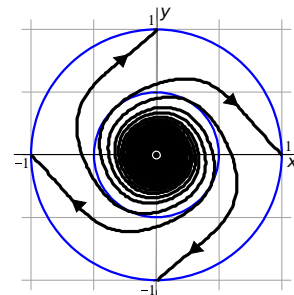
Por ejemplo, pasando a polares obtenemos:

$$\begin{cases} r' = r^3 [\cos^4\theta - \sin^2\theta \cos^2\theta + \sin^4\theta] > 0 \text{ si } r > 0 \\ \theta' = -1 + r^2 \sin\theta \cos\theta [2\sin^2\theta - \cos^2\theta] \end{cases}$$

O, directamente, hallando el I_3 de la última sección:

$$a_{30} = b_{03} = 1, \quad a_{12} = -1 \text{ y el resto cero } \Rightarrow I_3 = 3 - 1 + 3 = 5.$$

A la derecha, algunas órbitas y (en azul) dos curvas de nivel de U .



Ej 2. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + xy - y^2 \end{cases}$ Vimos al final de 3.5 que era un foco estable, puesto que era $I_3 = -1$. Los términos cuadráticos dan más problemas que los cúbicos (también si la escribimos en polares) y hay que tantear más para dar una U .

Empezamos con $U = x^2 + y^2 + Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3$ (los cuadráticos son esos salvo constante) $\Rightarrow \dot{U} = -Dx^3 + (3C - 2E)x^2y + (2D - 3F + 2)xy^2 + (E - 2)y^3 + \dots \Rightarrow D = 0, E = 2, F = \frac{2}{3}, C = \frac{4}{3}$, para que no haya términos cúbicos. Pero esta U no nos vale, pues $\dot{U} = 2y^2(2x^2 - xy - y^2)$ sin signo definido. Pasamos ahora a probar: $U = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + \frac{2}{3}x^3 + Gx^4 + Hx^3y + Jx^2y^2 + Kxy^3 + Ly^4 \Rightarrow \dot{U} = -Hx^4 + 2(2G - J)x^3y + (3H - 3K + 4)x^2y^2 + 2(J - 2L - 1)xy^3 + (K - 2)y^4 + \dots$.

Buscando que estos términos adopten la forma $-H(x^2 + y^2)^2 + \dots$ llegamos a esta U :

$$U = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + \frac{2}{3}x^3 + Gx^4 + \frac{1}{4}x^3y + 2Gx^2y^2 + \frac{7}{4}xy^3 + (G - \frac{1}{2})y^4.$$

Con $G = \frac{1}{2}$, por ejemplo, concluimos que: $U = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3y + x^2y^2 + \frac{7}{4}xy^3$, definida positiva en un entorno del origen, ya que los términos con r^3, r^4 no pueden con el r^2 .

Para esta U es: $\dot{U} = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{4}xy(x - y)(x^2 + 8xy + 21y^2)$, definida negativa cerca del origen.

Ej 3. $x'' + x' + 2x^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ y' = -v - 2x^3 \end{cases}$. El origen no es elemental: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Podemos interpretar la ecuación como describiendo el movimiento con rozamiento de un punto sobre el eje x sometido a una fuerza $-2x^3$. Esto nos hace suponer que el origen debe ser asintóticamente estable y nos sugiere probar como U la energía total:

$$U(x, y) = \frac{v^2}{2} + \frac{x^4}{2} \rightarrow \dot{U} = 2x^3v + 2v(-v - 2x^3) = -2v^2 \text{ semidefinida negativa.}$$

El teorema nos dice que el origen es al menos estable, pero esperábamos estabilidad asintótica. De hecho, dicho teorema es la versión menos fina de todos los que existen: debería suceder que si, como en el ejemplo, las órbitas cruzan hacia dentro cada curva de nivel excepto en un par de puntos de cada una (los de $v = 0$ en este caso) deberíamos tener no sólo estabilidad, sino estabilidad asintótica. Pronto enunciaremos un teorema que precisa esta idea.

Por ahora, podemos probar la estabilidad asintótica con el teorema 1, aunque para ello hay que tantear con más términos. Haciéndolo se encuentra, por ejemplo, esta otra V :

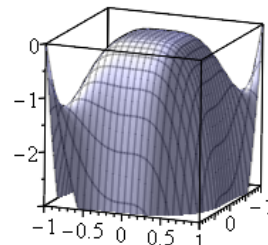
$$V(x, y) = (x + v)^2 + x^4 + v^4 \rightarrow \dot{V} = -4x^4 - 4v^4 - 8x^3v^3,$$

que es definida negativa en un entorno del origen, pues los términos de orden 6, aunque no tienen signo definido, son despreciables respecto a los de orden 4 en las proximidades del origen.

[Que no era definida negativa en todo el plano lo dice por ejemplo:

$$V(x, -x) = 8x^4(x^2 - 1) \geq 0 \text{ cuando } |x| \geq 1].$$

A la derecha se ha incluido un dibujo (hecho con Maple) de la \dot{V} .



El segundo teorema (en versiones más generales) se suele llamar teorema de LaSalle:

Teor 2. Sea el origen punto crítico de $[S]$ y sea U de C^1 definida positiva en D y tal que $\dot{U}(\mathbf{x}) \leq 0$ en D . Supongamos que el conjunto $\{\mathbf{x} \in D : \dot{U}(\mathbf{x}) = 0\}$ no contiene más órbitas que el propio origen. Entonces el origen es asintóticamente estable.

Con este teorema, bastaba la U del ejemplo 3 para deducir la estabilidad asintótica del origen.

Que la hipótesis de que el conjunto sólo contenga el origen es necesaria lo prueba este otro ejemplo:

Ej 4. $\begin{cases} x' = 2y^3 \\ y' = -xy^2 - y^3 \end{cases} U = ax^2 + by^2 \rightarrow \dot{U} = 2(2a - b)xy^3 - 2by^4. U = x^2 + 2y^2 \rightarrow \dot{U} = -4y^4 \leq 0$ estable.

Pero no puede haber estabilidad asintótica pues $y = 0$ es una recta de puntos críticos. De hecho, sus órbitas son casi las mismas que las del foco estable

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -x - y \end{cases} \text{ (el campo } \mathbf{v} \text{ tiene la misma dirección y sentido salvo en el eje } x \text{).}$$

El mapa de fases (global) es el de la derecha (con algunas curvas de nivel de U en azul y la recta de pendiente horizontal en verde).

[Todos los puntos son no elementales, como debía ser si no son aislados].

