Exámenes, parcialillos y para entregar 9-10 (tema 4)

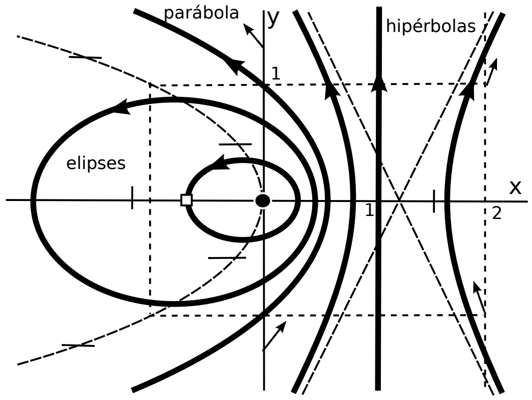
Soluciones del examen de febrero de 2010 **Ecuaciones Diferenciales I (grupo C)**

4. a] Resolver la ecuación de las órbitas y dibujar el mapa de fases del sistema $\begin{cases} x' = y(x-1) \\ y' = x + y^2 \end{cases}$.

b] Precisar un a tal que la solución con $x(0)=a$, $y(0)=0$ sea periódica no constante y hallar el periodo de esta solución (escribir el sistema en polares).

a] $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1} + \frac{x}{y(x-1)} \overset{z=y^2}{\to} z' = \frac{2z}{x-1} + \frac{2x}{x-1}$, $z = C(x-1)^2 + (x-1)^2 \int \frac{2x-2+2}{(x-1)^3} dx$, $\boxed{y^2 = C(x-1)^2 + 1 - 2x}$

($C<0$ elipses, $C>0$ hipérbolas).



Punto crítico $\binom{0}{0}$ con $\lambda = \pm i$. Centro de la AL, y del no lineal por ser simétricas las órbitas respecto a $y=0$.

v vertical si $y=0$ ó $x=1$ (órbita). Horizontal si $x=-y^2$.

$\mathbf{v}(0,y) = \binom{-y}{y^2}$, $\mathbf{v}(2,y) = \binom{y}{2+y^2}$.

La órbita más sencilla: $x = \frac{1-y^2}{2}$ (parábola).

Polares: $\begin{cases} r' = r^2(c^2 s + s^3) = r^2 \operatorname{sen}\theta \\ \theta' = c^2 + s^2 = 1 \to \theta = t + K \end{cases}$

$\frac{dr}{d\theta} = r^2 \operatorname{sen}\theta \to \frac{1}{r} = C + \cos\theta$, $1 - x = C\sqrt{x^2+y^2}$

(da de otra forma las mismas órbitas de arriba).

b] Para cualquier $a < \frac{1}{2}$ ($a \neq 0$) la solución es periódica no trivial (órbita elíptica).

[Para $a<0$ se puede decir sin usar las órbitas: debe decrecer y hasta encontrar $x=-y^2$, luego debe cortar el eje x (no puede tocar $x=1$), y, por simetría, es cerrada].

Todas ellas tienen periodo 2π (lo que tarda θ en volver).

Soluciones del examen de septiembre de 2010 **Ecuaciones Diferenciales I (grupo C)**

4. Sea $\begin{cases} x' = 1 + x - 2xy \\ y' = y^2 - y \end{cases}$. **a]** Hallar sus órbitas y, en concreto, la que pasa por $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. **b]** Dibujar su mapa de fases. **c]** Hallar la solución del sistema que cumple $x(0)=0$, $y(0)=1$. [2.5 puntos]

a] $f_x + g_y = 1 - 2y + 2y - 1 \equiv 0 \Rightarrow$ sistema exacto: $\begin{matrix} H_y = 1 + x - 2xy \\ H_x = y - y^2 \end{matrix}$, $\begin{matrix} H = y + xy - xy^2 + p(x) \\ H = xy - xy^2 + q(y) \end{matrix}$, $\boxed{y + xy - xy^2 = C}$.

Por $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ pasa la órbita con $C=1 \to y = \frac{x+1 \pm \sqrt{x^2-2x+1}}{2x} \to \boxed{y = \frac{1}{x}}$ ($y=1$ no pasa por ahí).

b] $\underset{y=0}{\overset{x=-1}{\uparrow}}$ $\underset{y=1}{\overset{x=1}{\uparrow}}$. La matriz de la aproximación lineal $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-2y & -2x \\ 0 & 2y-1 \end{pmatrix}$ en cada punto crítico es:

$\binom{-1}{0}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, silla: $1 \to \binom{1}{0}$, $-1 \to \binom{1}{-1}$,

$\binom{1}{1}$: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, silla: $-1 \to \binom{1}{0}$, $1 \to \binom{1}{-1}$.

Pendiente horizontal si $y = 0, 1$ (órbitas).

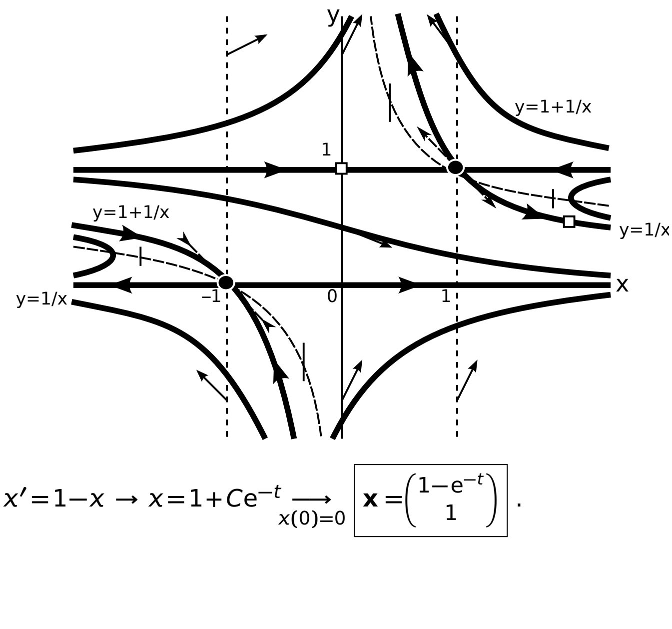
Vertical sobre la hipérbola $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$.

Separatrices de $\binom{1}{1}$: las halladas $y = \frac{1}{x}$ e $y=1$.

Las de $\binom{-1}{0}$ son $y=0$ e $y = 1 + \frac{1}{x}$ (para $C=0$).

$\mathbf{v}(1,y) = (y-1)\binom{-2}{y}$, $\mathbf{v}(-1,y) = y\binom{2}{y-1}$,

$\mathbf{v}(0,y) = \binom{1}{y^2-y}$, $\mathbf{v}(x,1/2) = \binom{1}{-1/4}$.



c] La solución pedida está asociada a la órbita $y=1 \to x' = 1 - x \to x = 1 + Ce^{-t} \underset{x(0)=0}{\longrightarrow} \boxed{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}}$.

2. Sea $x''=x+xx'+(x')^2$. **a]** Estudiar cómo se deforma la aproximación lineal cerca de su punto crítico.
b] Hallar la solución con: o bien i) $x(0)=-1\,,x'(0)=1$ o bien ii) $x(0)=1\,,\,x'(0)=1$ (sólo una es calculable). ¿Es estable la hallada?

a] $\begin{cases} x'=v \\ v'=x+xv+v^2 \end{cases}$. Único punto crítico $\binom{0}{0}$ $\left[\begin{smallmatrix} v=0\downarrow \\ x=0 \end{smallmatrix}\right]$.

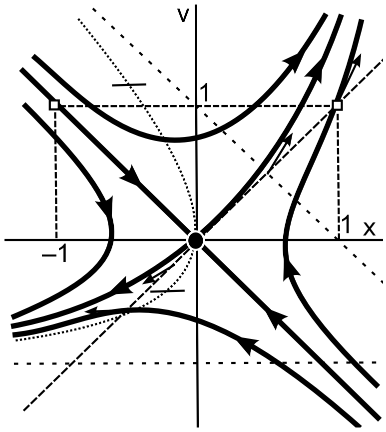
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \lambda=\pm 1 \to$ silla $\left[\mathbf{v}=\binom{1}{\lambda}\right.$ en las ecuaciones$\left.\right]$.

Para ver cómo se deforman las separatrices:

$\mathbf{v}(x,x)=x\binom{1}{1+2x}$ (se deforma hacia arriba tanto en $x>0$ como en $x<0$)

$\mathbf{v}(x,-x)=\binom{-x}{x}$ (ésta **no se deforma**).

[Si quisiéramos dibujar el mapa de fases global pintaríamos el campo en varias rectas y la curva de pendiente horizontal:
$x=-\frac{v^2}{1+v}=1-v-\frac{1}{1+v}$].



b] Los datos de i) están asociados a la órbita recta [los de ii) a una no calculable, pues la ecuación de las órbitas no es resoluble]. Por tanto:

$$\binom{-1}{1} \to v=-x=\frac{dx}{dt} \to x=Ce^{-t} \underset{x(0)=-1}{\longrightarrow} \boxed{x=-e^{-t}} \,.$$

Como esta solución tiende hacia 0 y casi todas las de datos iniciales próximos no se parecen nada a ella (las de la derecha se van a ∞ y las de la izquierda a $-\infty$), esta solución es **inestable**.

3. Sea $\begin{cases} x'=y-x \\ y'=y-x^3 \end{cases}$. **a]** Hallar sus órbitas y dibujar el mapa de fases.
b] Dar un valor de a para el que la solución con $x(5)=y(5)=a$ no sea periódica.

a] $f_x+g_y\equiv 0$, **exacto**. $H_y=y-x \to H=\frac{1}{2}y^2-xy+p(x)$
$H_x=x^3-y \to H=\frac{1}{4}x^4-xy+q(y)$

Órbitas: $\boxed{y^2-2xy-\frac{1}{2}x^4=C}$, $y=x\pm\sqrt{x^2-\frac{x^4}{2}+C}$.

(Cada una de las órbitas tiene un dominio finito (el radicando se hace negativo para $|x|$ grande) y simétrico respecto del origen; cambiando x por $-x$ e y por $-y$ queda la misma órbita lo que implica que son simetricas respecto del origen).

Puntos críticos: $\binom{0}{0}$ y $\binom{\pm1}{\pm1}$. $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\binom{0}{0}$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda=-1 \to \binom{1}{0}$, $\lambda=1 \to \binom{1}{2}$, silla.

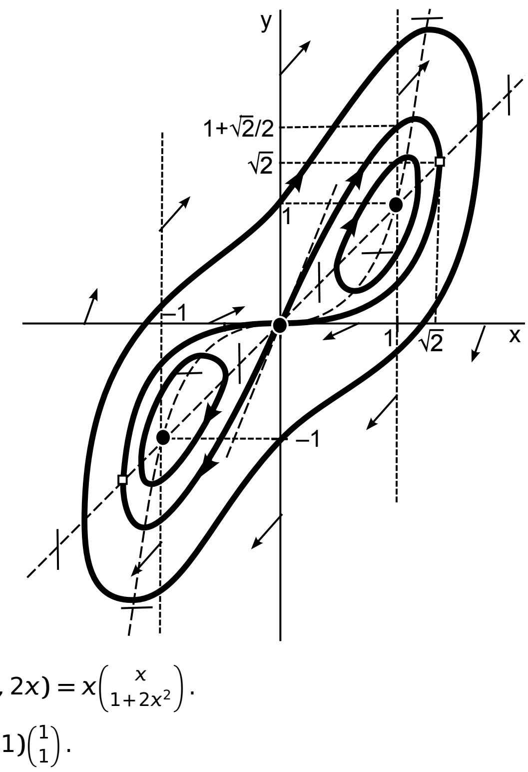
$\binom{\pm1}{\pm1}$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to \lambda=\pm i\sqrt{2}$, centros de la aproximación lineal y del no lineal (por ser exacto).

$y=x$ (pendiente horizontal). $y=x^3$ (vertical).

Por $\binom{0}{0}$ pasa la órbita (separatrices) $y=x\pm x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$,

que corta la recta $y=x$ si $x=0,\pm\sqrt{2}$

y pasa por $\left(1,1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-1,-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



Mas datos sobre las separatrices: $\mathbf{v}(x,0)=-x\binom{1}{x^2}$, $\mathbf{v}(x,2x)=x\binom{x}{1+2x^2}$.

Otros valores del campo: $\mathbf{v}(0,y)=y\binom{1}{1}$, $\mathbf{v}(\pm1,y)=(y\pm1)\binom{1}{1}$.

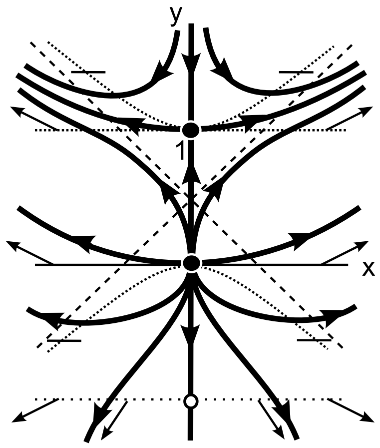
b] Las únicas soluciones no periódicas correspondientes a órbitas que pasan por (a,a) son las asociadas a las separatrices (las otras órbitas son cerradas o puntos críticos (soluciones constantes de cualquier periodo)).

Debe ser $\boxed{a=\sqrt{2}}$ ó $\boxed{a=-\sqrt{2}}$.

Solución de los problemas para entregar del tema 4 (9-10)

9a. Sea $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y(1-y)+x^2 \end{cases}$. **a]** Dibujar su mapa de fases. **b]** Hallar su solución con $x(1)=0$, $y(1)=-1$.

a] $2x=0 \to y(1-y)=0 \to \binom{0}{0}$ y $\binom{0}{1}$ puntos críticos. La aproximación lineal $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2x & 1-2y \end{pmatrix}$ en cada punto:



$\binom{0}{0}$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \lambda=1$, $\mathbf{v_1}=\binom{0}{1}$ y $\lambda=2$, $\mathbf{v_2}=\binom{1}{0}$. Nodo I ($\mathbf{v_1}$ manda).

$\binom{0}{1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \lambda=-1$, $\mathbf{v_1}=\binom{0}{1}$ (entra) y $\lambda=2$, $\mathbf{v_2}=\binom{1}{0}$ (sale). Silla.

Campo vertical si $x=0$ (órbita). Horizontal sobre $x^2-y^2+y=0$

(hipérbola que pasa por los puntos críticos con asíntotas $y=\frac{1}{2}\pm x$).

$\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}(x,1)=x\binom{2}{x}$ (la separatriz inestable se deforma $\smile$, la estable ya se vió que se conserva).

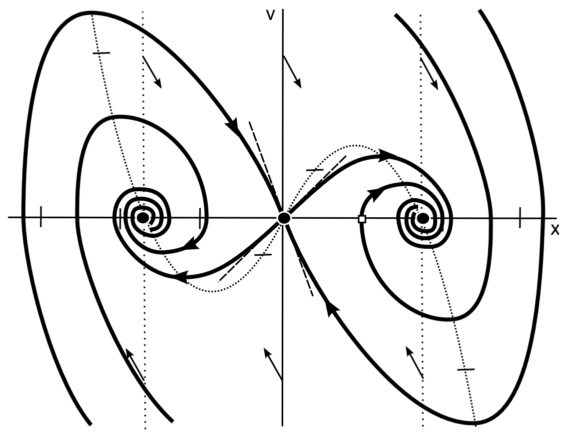
$\mathbf{v}(x,-1)=\binom{2x}{x^2-2}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}-\frac{y^2}{2x}+\frac{x}{2}$ Riccati no resoluble.

b] $x=0$ órbita que pasa por $(0,-1) \to y'=y(1-y)$ (separable o Bernouilli)

$\to\ y=\frac{1}{1+Ce^{-t}} \xrightarrow{y(1)=-1} \boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-2e^{1-t}} \end{pmatrix}}$ (explota para $t=1+\ln 2$).

9b. Sea [e] $x''=3x-x^3-2x'$. **a]** Dibujar su mapa de fases. **b]** Hallar el límite para $t\to\infty$ de la solución de [e] con $x(0)=1$, $x'(0)=0$. Interpretar físicamente las órbitas.

a] $\begin{cases} x'=v \\ v'=3x-x^3-2v \end{cases}$. Puntos críticos $\begin{matrix} v=0 \\ x=0,\pm\sqrt{3} \end{matrix}$.



$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3-3x^2 & -2 \end{pmatrix}$ $\pm\sqrt{3} \nearrow \lambda=-1\pm i\sqrt{5}$ focosE. $0 \searrow \lambda=1,-3 \to \binom{1}{\lambda}$ sillas.

Campo horizontal: $v=\frac{3x-x^3}{2}$. Vertical: $v=0$ (como en toda ecuación).

$\frac{dv}{dx}=\frac{3x-x^3}{v}-2$ no resoluble. $\mathbf{v}(0,v)=\mathbf{v}(\pm\sqrt{3},v)=v\binom{1}{-2}$.

$\mathbf{v}(x,x)=x\binom{1}{1-x^2}$, $\mathbf{v}(x,-3x)=x\binom{-3}{9-x^2}$ (las dos se deforman)

[No sería muy difiícil hallar y pintar la curva de puntos de inflexión de las órbitas, dada por $y=\frac{x(x^2-3)\left(1\pm\sqrt{4-3x^2}\right)}{3(1-x^2)}$].

b] A la vista del mapa de fases, la solución pedida tiende hacia $\sqrt{3}$ cuando $t\to\infty$.

La ecuación puede describir el movimiento de una partícula que se mueve sobre el eje x sometida a una fuerza $3x-x^3$ que depende sólo de la posición y con un rozamiento $-2x'$ proporcional a su velocidad. La fuerza apunta hacia la derecha en $(-\infty,-\sqrt{3})$ y en $(0,\sqrt{3})$, y hacia la izquierda en $(-\sqrt{3},0)$ y $(\sqrt{3},\infty)$. Discutamos, por ejemplo, el significado de las órbitas que parten de los puntos $(a,0)$ del eje x (partículas dejadas en reposo en $x=a$). Si $a=0,\pm\sqrt{3}$, permanecerá en su sitio indefinidamente (aunque, en el primer caso, una pequeña modificación de la posición o velocidad iniciales la alejaría de esa posición inestable). Para $0<a<\sqrt{3}$, la partícula oscilará acercándose al equilibrio estable $\sqrt{3}$. Para a algo mayor que $\sqrt{3}$ ocurre algo similar, pero a la derecha del punto de corte de la separatriz estable del origen con el eje (precisarlo exigiría cálculo numérico) la partícula consigue superar la fuerza que se le opone en $(0,\sqrt{3})$ y va a tender hacia el otro equilibrio asintóticamente estable $-\sqrt{3}$. Similar es la situación a la izquierda del origen.

10a. Sea $\begin{cases} x' = 3y^2-3 \\ y' = 6x+4x^3 \end{cases}$. **a]** Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. **b]** Discutir para qué números α es periódica la solución con $x(0)=0$, $y(0)=\alpha$. **c]** Determinar la estabilidad de sus soluciones constantes.

a] $f_x+g_y\equiv 0$, **exacto**. Órbitas: $\boxed{y^3-3y-x^4-3x^2=C}$.

(Son simétricas respecto a $x=0$, lo que también se deduce del hecho de que f es par en x y g es impar en x).

$3(y^2-1)=0 \to y=\pm 1$ (pendiente horizontal). $x(6+4x^2)=0 \to x=0$ (vertical).

Puntos críticos: $\binom{0}{1}$: $\begin{pmatrix}0&6\\6&0\end{pmatrix} \to \lambda=\pm 6$, $\mathbf{v}=\binom{\pm1}{1}$ silla.

$\binom{0}{-1}$: $\begin{pmatrix}0&-6\\6&0\end{pmatrix} \to \lambda=\pm 6i$, centro del lineal y del no lineal (exacto o simetría).

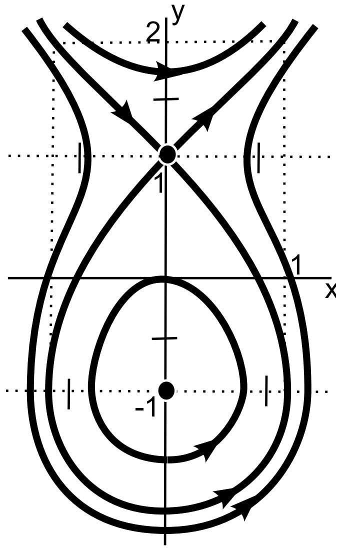
Por $\binom{0}{1}$ pasa la órbita (separatrices) $y^3-3y+2=x^4-3x^2$ que corta:

el eje x si $x^4+3x^2-2=0$, $x^2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, $x\approx\pm 0.75$.

el eje y si $y^3-3y^2+2=0$, $y=1$ (la silla) e $y=-2$.

las rectas $y=-1$ e $y=2$ si $x^4+3x^2-4=0$, $x=\pm 1$.

Mas datos sobre las separatrices: $\mathbf{v}(x,1\pm x)=x\binom{6\pm 3x}{6+4x^2}$.



b] Las soluciones correspondientes a órbitas que pasan por $(0,\alpha)$ son periódicas si $-2<\alpha<1$ (todas las órbitas limitadas por la que sale y entra del punto de silla son curvas cerradas).

c] La solución $\binom{0}{1}$ es **inestable** (se sabía desde que hallamos los autovalores de la aproximación lineal).

La $\binom{0}{-1}$ es **estable no asintóticamente** (aquí no bastaban los autovalores, pues podía ser un foco E o I).

10b. Sea $2x''-(x')^2+x(x-2)=0$. **a]** Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. **b]** Hallar su solución con $x(2)=1$, $x'(2)=-1$. ¿Es estable?

a] $\begin{cases} x'=v \\ v'=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}v^2 \end{cases}$. Puntos críticos $\begin{matrix} v=0 \\ x=0,2 \end{matrix}$.

$\begin{pmatrix}0&1\\1-x&v\end{pmatrix}$ $0\nearrow \lambda=\pm 1 \to$ sillas ($\mathbf{v}=\binom{1}{\lambda}$ en las ecuaciones).
$2\searrow \lambda=\pm i \to$ centro de la aproximación lineal.

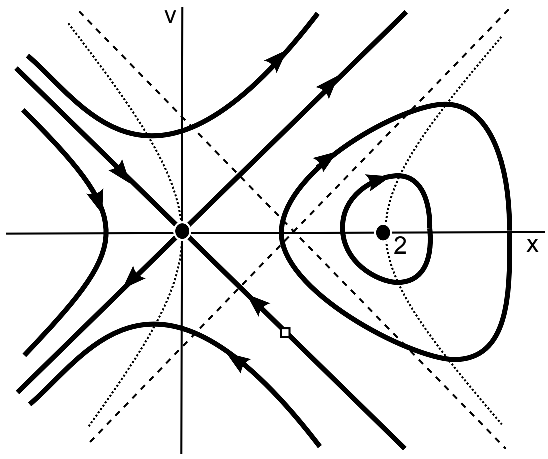
Como g es par en v las órbitas son simétricas respecto al eje x y el centro lo sigue siendo del sistema no lineal.

Órbitas (Bernouilli): $2v\frac{dv}{dx}=v^2+2x-x^2 \xrightarrow{v^2=z} z'=z+2x-x^2$ $\xrightarrow{z_p=Ax^2+Bx+C} z=Ce^x+x^2$. $\boxed{v^2=Ce^x+x^2}$ (confirmada simetría).

$C=0 \to v=\pm x$, separatrices rectas.

Campo horizontal sobre la hipérbola: $v^2-x^2+2x=0$.

Vertical sobre $y=0$. $\mathbf{v}(0,v)=\mathbf{v}(2,v)=v\binom{1}{v/2}$.



b] Por $\binom{1}{-1}$ pasa la órbita $v=-x=\frac{dx}{dt} \to x=Ce^{-t} \xrightarrow[x(2)=1]{} \boxed{x=e^{2-t}}$ solución pedida.

Como esta solución tiende hacia 0 y casi todas las de datos iniciales próximos no se parecen nada a ella (las de arriba son periódicas, las de abajo tienden hacia $-\infty$), esta solución es **inestable**.