Solución de los problemas para entregar del tema 1

1a. Sea $y'=\frac{2t}{y^2-t^2+2y}$. Hallar su solución general y la que satisface $y(1)=-1$.

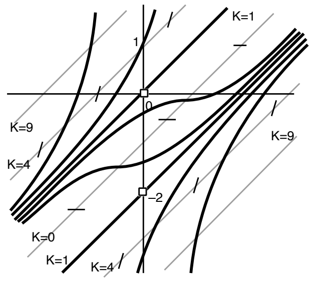
$2t+(t^2-y^2-2y)y'=0$ no exacta, pero $\frac{N_t-M_y}{M}=1 \Rightarrow$ hay $g(y)$ con $2tg+(\cdots)gy'=0$ exacta $\to g(y)=e^y \to$

$2t\,e^y+(t^2-y^2-2y)\,e^y y'=0$ exacta $\to \begin{array}{l} U=t^2e^y+p(y) \\ U=t^2e^y-y^2e^y+q(t) \end{array} \to \boxed{(t^2-y^2)e^y=C} \xrightarrow{\text{d.i.}} \boxed{y=-t}$. $\big[\frac{dt}{dy}=\cdots$ es Bernouilli$\big]$.

1b. Sea $y'=y-e^{t-t^2}$. Hallar la solución y_a con $y(0)=a$ y discutir el valor de $\lim_{t\to\infty} y_a$. $\big[\int_0^\infty e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\big]$.

Lineal. $y_a=e^t\Big[a-\int_0^t e^{-s^2}ds\Big]$. Si $a \gtrless \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ es $\lim_{t\to\infty} y_a=\pm\infty$. Si $a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\lim_{t\to\infty}\frac{a-\int_0^t e^{-s^2}ds}{e^{-t}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to\infty} e^{t-t^2}=0$.

2a. Sea $y'=(y-t+1)^2$. Dibujar sus isoclinas, su curva de puntos de inflexión y sus soluciones. Hallar su solución general. Precisar cuántas soluciones satisfacen: i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=-2$.



Isoclinas rectas: $f(x,x+b)=(b+1)^2=K$. Son solución si $K=1 \to b=0,-2$.
$y''=2(y-t+1)(y'-1)=2(y-t+1)(y-t)(y-t+2)=0 \to y=t-1$ inflexión (además de las soluciones rectas).

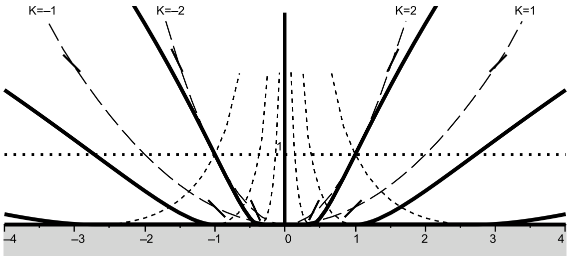
$z=y-t \to z'=z^2+2z$ (es de la forma $y'=at+by$ o Riccati con $y_p=t$).

Separable: $\int\frac{2dz}{z(z+2)}=\ln\frac{z}{z+2}=2t+C$, $z=\frac{2Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}} \to \boxed{y=t+\frac{2Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}}}$ (•)

Bernouilli: $u=\frac{1}{z} \to u'=-2u-1 \to u=C^*e^{-2t}-\frac{1}{2} \to \boxed{y=t+\frac{2}{C^*e^{-2t}-1}}$ (□)

f y f_y continuas en un entorno de cada punto $\Rightarrow$ **hay solución única para cualquier dato inicial**.
$\big[y(0)=0$ lo cumple $y=t$, no recogida en (□); $y(0)=-2$ lo cumple $y=t-2$, no recogida en (•)$\big]$.

2b. Sea $y'=\frac{2}{t}\sqrt{y}$. Resolverla. Dibujar isoclinas con $K=0,\pm1,\pm2$, inflexión y soluciones. Escribir la o las soluciones, si existen, que cumplen: i) $y(-1)=1$, ii) $y(0)=1$, iii) $y(1)=1$, iv) $y(1)=0$.



Separable. $\boxed{\sqrt{y}=\ln|t|+C}$ $\big[=\ln|C_*t|$, o bien $t=C^*e^{\sqrt{y}}\big]$.
¡Ojo!, sólo es $y=(\ln|t|+C)^2$ para $\ln|t|+C\geq 0 \Leftrightarrow |t|\geq e^{-C}$.

Ecuación definida si $y\geq 0$. Soluciones $\begin{array}{c}\text{crecen}\\ \text{decrecen}\end{array}$ si $t\gtrless 0$.

Isoclinas: $t=\frac{2\sqrt{y}}{K}$ $\big[y=\frac{K^2}{4}t^2$ sólo en parte$\big]$.

$y''=\frac{y'}{t\sqrt{y}}-\frac{2\sqrt{y}}{t^2}=2\frac{1-\sqrt{y}}{t^2} \to y=1$ inflexión.

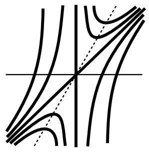
f continua en $(\mathbf{R}-\{0\})\times[0,\infty)$ y $f_y=\frac{1}{t\sqrt{y}}$ en $(\mathbf{R}-\{0\})\times(0,\infty) \Rightarrow$ solución única para i) y iii) [continuas en entorno de $(-1,1)$ y $(1,1)$], ambas con la expresión $y=(\ln|t|+1)^2$ $\big[$en $(-\infty,e^{-1}]$ o en $[e,\infty)\big]$.

$\frac{dt}{dy}=\frac{t}{2\sqrt{y}}$ y $\left(\frac{1}{f}\right)_t=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ continuas en entorno de $(0,1) \Rightarrow$ por ese punto sólo pasa la curva integral $t=0$ y no hay, pues, solución $y(t)$ para ii).

Para iv) los teoremas no aseguran ni la existencia. De la solución general obtenemos $y=(\ln t)^2$ para $t\geq 1$, pero otra solución clara con ese dato el $y=0$ (o más, empalmando). Hay soluciones, pero no hay unicidad.

3a. Sea $y'=\frac{3t-2y}{t}$. Precisar la estabilidad de las soluciones con i) $y(2)=0$, ii) $y(-1)=-1$.

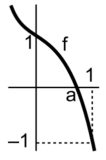
Lineal. La estabilidad de todas las soluciones a la derecha de $t=0$ $\big[$dónde $a(t)=-\frac{2}{t}$ es continua$\big]$ viene dada por $e^{\int a}=\frac{1}{t^2} \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Por tanto, la solución con $y(2)=0$ es **AE**.

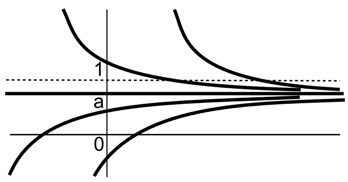


A la izquierda de $t=0$ no podemos usar el teorema. De hecho, la solución con $y(-1)=-1$, que es $y=t$ (definida $\forall t$), es **inestable** como muestra la solución general $y=t+\frac{C}{t^2}$ o un dibujo aproximado (las de $y(-1)=y_o\sim -1$ ni llegan a ∞).

3b. Precisar la estabilidad de la solución de $y'=1-y-y^3$ con $y(0)=0$.

Autónoma. Soluciones constantes no calculables exactamente: $f(y)=1-y-y^3=0$ sin soluciones enteras.
Pero $f'(y)=-1-3y^2<0$, $f(0)=1$, $f(1)=-1$
$\Rightarrow$ existe un único $a\in(0,1)$ con $f(a)=0$.





Como por debajo de $y\equiv a$ las soluciones crecen y por encima decrecen, y la ecuación es autónoma, todas las soluciones son **AE**, la que cumple $y(0)=0$ en particular.

Solución de los problemas para entregar del tema 2

4a. Resolver $\begin{cases} x' = 3x+y+6te^{2t} \\ y' = -x+y \end{cases}$, con $\begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{matrix}$, **i]** mediante matrices, **ii]** convirtiéndolo en ecuación, **iii]** utilizando Laplace.

i] $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} \lambda=2 \\ \text{doble} \end{matrix}$; $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}(t)=\begin{pmatrix} 6te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x_o}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\Big[e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix} 6se^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}ds\Big]=\mathbf{P}\Big[e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix}+e^{2t}\int_0^t\begin{pmatrix} 6s \\ 6ts-6s^2 \end{pmatrix}ds\Big]=e^{2t}\mathbf{P}\begin{pmatrix} 1+3t^2 \\ t-1+t^3 \end{pmatrix}=\boxed{e^{2t}\begin{pmatrix} t+3t^2+t^3 \\ 1-t-t^3 \end{pmatrix}}$$

ii] $x=y-y'$, $y'-4y'+4y=-6te^{2t} \underset{y_p=(At^3+Bt^2)e^{2t}}{\longrightarrow} \begin{cases} y=(c_1+c_2t-t^3)\,e^{2t} \\ y(0)=1,\, y'(0)=-0+1=1 \end{cases}$, $y=(1-t-t^3)\,e^{2t}$, $x=y-y'\uparrow$

iii] $\begin{cases} sX=3X+Y+\frac{6}{(s-2)^2} \\ sY-1=-X+Y \end{cases}$, $X=1-(s-1)Y$, $(s-2)^2Y=s-3-\frac{6}{(s-2)^2}$, $Y=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{6}{(s-2)^4}\uparrow$ $\Big[$ó $X=\frac{s^2+2s-2}{(s-2)^4}=\cdots\Big]$.

4b. Resolver $t^2x''+5tx'+4x=t^{-1}$: **i]** hallando la x_p con la fórmula de variación de las constantes, **iii]** probando una x_p adecuada, **c]** haciendo $x=t^{-2}\int u\,dt$.

$\lambda^2+4\lambda+4=0 \to x=(c_1+c_2\ln t)\,t^{-2}+x_p$. **i]** Con variación de constantes:

$|\mathbf{W}[t]=t^{-5}$; $x_p=t^{-2}\ln t\int\frac{t^{-2}t^{-3}\,dt}{t^{-5}}-t^{-2}\int\frac{t^{-2}t^{-3}\ln t\,dt}{t^{-5}}=t^{-1}3\ln t+4 \to \boxed{x=(c_1+c_2\ln t)\,t^{-2}+t^{-1}}$.

ii] $t=e^s \to \cdots=e^{-s}$, $x_p=Ae^{-s}=At^{-1}$, $x_p'=-At^{-2}$, $x_p''=2At^{-3} \to 2A-5A+4A=1 \to x_p=t^{-1}\uparrow$.

iii] $x=t^{-2}\int u\,dt \to x'=-2t^{-3}\int u\,dt+t^{-2}u$, $x''=6t^{-3}\int u\,dt-4t^{-3}u+t^{-2}u'$

$\to u'=-\frac{u}{t}+\frac{1}{t} \to u=\frac{C}{t}+1$, $x=t^{-2}\,[C\ln t+K+t]\uparrow$

5a. Sea $x'''+2x''+2x'+ax=2$. **i]** Discutir su estabilidad según los valores de a. **ii]** Hallar una solución particular para todo valor de a. **iii]** Hallar si $a=0$ la solución con $x(0)=x'(0)=1$, $x''(0)=-2$.

i] $P(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+a$. Por el signo de los coeficientes, no es **AE** para $a=0$ y es **inestable si** $a<0$.

Routh-Hurwitz: $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \to 2$, $4-a>0$, $a>0 \to$ $\boxed{\textbf{AE si } 0<a<4}$ (e **I** si $a>4$).

Para $a=0$: $P(\lambda)=\lambda(\lambda^2+2\lambda+2) \to \lambda=0$ (simple) y $\lambda=-1\pm i \to$ **EnoA**

Para $a=4$: $P(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda^2+2) \to \lambda=\pm i\sqrt{2}$ (simples) y $\lambda=-2 \to$ **EnoA**

ii] Si $a\neq 0$, $\lambda=0$ no es autovalor y hay $x_p=A \to x_p=\frac{2}{a}$. Si $a=0$, $\lambda=0$ es autovalor y la $x_p=At \to x_p=t$.

iii] La solución general para $a=0$ es: $x=c_1+e^{-t}(c_2\cos t+c_3\,\mathrm{sen}\,t)+t \;\to$

$$\begin{matrix} x'=e^{-t}[(c_3-c_2)c-(c_2+c_3)s]+1 \\ x''=e^{-t}[-2c_3c+2c_2s] \end{matrix} \xrightarrow{d.i.} \begin{matrix} c_1+c_2=1 \\ c_3-c_2+1=1 \\ -c_3=-2 \end{matrix} \to \begin{matrix} c_2=c_3=1 \\ c_1=0 \end{matrix} \to \boxed{x=e^{-t}(\cos t+\mathrm{sen}\,t)+t} .$$

Laplace: $s^3X-s^2-s+2+2s^2X-2s-2+2sX-2=\frac{2}{s} \to X=\frac{s^3+3s^2+2s+2}{s^2(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+2} \to$

$A(s^3+2s^2+2s)+B(s^2+2s+2)+Cs^3+Ds^2=s^3+3s^2+2s+2 \to X=\frac{1}{s^2}+\frac{s+2}{(s+1)^2+1} \to x=t+e^{-t}L^{-1}\big[\frac{s+1}{s^2+1}\big]\uparrow$

5b. Sea $\begin{cases} x'=y+4z \\ y'=ay-2x \\ z'=y-4 \end{cases}$ **i]** Para $a=5$ hallar la solución con $x(0)=-2$, $y(0)=0$, $z(0)=3$. **ii]** Discutir la estabilidad del sistema según los valores de la constante a.

$$-\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 4 \\ -2 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-a\lambda^2+2\lambda+8 \quad [=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4) \text{ si } a=5].$$

i] $\mathbf{x}_p=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{cases} 0=b+4c \\ 0=5b-2a \\ 0=b-4 \end{cases} \to \begin{matrix} a=10 \\ b=4 \\ c=-1 \end{matrix}$. $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}+c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}+\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{d.i.}} \boxed{\begin{pmatrix} 10-12e^{-t} \\ 4-4e^{-t} \\ -1+4e^{-t} \end{pmatrix}}$

$x''=y'+4y-16$, $y'''=5y''-2y'-8y+32$, $\begin{cases} y=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+c_3e^{4t}+4 \\ y(0)=0,\, y'(0)=4,\, y''(0)=-4 \end{cases}$, $y=4-4e^{-t}$, $x=\frac{5y-y'}{2}$, $z=\frac{x'-y}{4}$.

Laplace: $\begin{cases} sX+2=Y+4Z \\ sY=5Y-2X \\ sZ-3=Y-\frac{4}{s} \end{cases}$, $\begin{cases} Y=sZ-3+\frac{4}{s} \\ X=(5-s)Y/2 \end{cases}$, $Z=\frac{3s^3-19s^2+30s+8}{s(s+1)(s-2)(s-4)}=\frac{3s-1}{s(s+1)}=\frac{4}{s+1}-\frac{1}{s}$, $y=4+z'$, $x=\frac{5y-y'}{2}$.

ii] Si $a>0$ es inestable, si $a=0$ no es AE y si $a<0$ necesitamos Routh-Hurwitz:

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ 8 & 2 & -a \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to -a$, $-2(a+4)$, $-16(a+4) \to$ $\boxed{\text{AE si } a<-4 \text{ , I si } a>-4}$, (y noAE si $a=-4$).

Para $\boxed{a=-4}$, $\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda+8=(\lambda+4)(\lambda^2+2) \to \lambda=-4$, $\lambda=\pm\sqrt{2}\,i$ simples: $\boxed{\text{EnoA}}$

6a. Hallar la 'solución' de: $\begin{cases} x''' - 3x'' + 2x' = f(t) \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=2 \end{cases}$, $f(t)=\begin{cases} 0\,, \ 0\le t<1 \\ 2\mathrm{e}[2t-3]\,, \ t\ge 1 \end{cases}$.

$f(t)=2\mathrm{e}u_1(t)\big[2(t-1)-1\big] \xrightarrow{L} s^3X-2s^2-2s-2-3s^2X+6s+6+2sX-4=2\mathrm{e}\mathrm{e}^{-s}\big[\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}\big]$,

$s(s-1)(s-2)X=2s(s-2)+2\mathrm{e}\mathrm{e}^{-s}\frac{2-s}{s^2}$, $X=\frac{2}{s-1}+\mathrm{e}\mathrm{e}^{-s}\big[\frac{-2}{s^3(s-1)}\big]=\frac{2}{s-1}+\mathrm{e}\mathrm{e}^{-s}\big[\frac{2}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s-1}\big] \to$

$$x=2\mathrm{e}^t+\mathrm{e}u_1(t)\big[2+2(t-1)+(t-1)^2-2\mathrm{e}^{t-1}\big]=\boxed{\begin{cases} 2\mathrm{e}^t\,, \ t\le 1 \\ \mathrm{e}(t^2+1)\,, \ t\ge 2 \end{cases}} \,.$$

[Como f es discontinua en $t=1$ la 'solución' sólo va a ser C^2 (y no C^3) en dicho punto].

Empalmando: Para $t\le 1$ es $x=c_1+c_2\mathrm{e}^t+c_3\mathrm{e}^{2t} \xrightarrow{d.i.(0)} x=2\mathrm{e}^t \Rightarrow x(1^+)=x'(1^+)=x''(1^+)=2\mathrm{e}$.

Para $t\le 1$, $x_p=At^2+Bt$, . . . , $x_p=\mathrm{e}t^2$, $x=c_1+c_2\mathrm{e}^t+c_3\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}t^2 \xrightarrow{d.i.(1)} x=\mathrm{e}(t^2+1)$.

6b. Sea $x^{iv}+4x'''+cx''+4x'+x=\operatorname{sen} t$. Hallar su solución general para i) $c=6$, ii) $c=2$, iii) $c=23/4$.
Discutir cuántas soluciones periódicas posee en los tres casos. (buscar bibliografía)

Si $\lambda=\pm i$ no es raíz de $P(\lambda)=\lambda^4+4\lambda^3+c\lambda^2+4\lambda+1$ ($c\neq 2$), la solución particular es de la forma
$x_p=A\cos t+B\operatorname{sen} t \to (A-B-cA+B+A)\cos t+(B+A-cB-A+B)\operatorname{sen} t=\operatorname{sen} t \to A=0,\ B=\frac{1}{2-c}$.

Para $c=2$, $x_p=At\cos t+Bt\operatorname{sen} t\cdots \to -8A\cos t-8B\operatorname{sen} t=\operatorname{sen} t \to A=0,\ B=-\frac{1}{8}$.

Los autovalores son evidentes para $c=6$: $P(\lambda)=(\lambda+1)^4 \to \lambda=-1$ cuádruple.

Para $c=2$ ya conocemos $\lambda=\pm i \to P(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2+4\lambda+1) \to \lambda=\pm i,\ \lambda=-2\pm\sqrt{3}$.

Para $c=\frac{23}{4}$, $4\lambda^4+16\lambda^3+23\lambda^2+16\lambda+4$ sólo tiene una raíz entera: $\lambda=-2$. Para hallar más:

Las raíces de $a\lambda^4+b\lambda^3+c\lambda^2+b\lambda+a=0$ se hallan haciendo $\lambda+\frac{1}{\lambda}=z \to az^2+bz+c-2a=0$. Aquí:

$$z^2+4z+\tfrac{15}{4}=0 \to z=-\tfrac{5}{2},-\tfrac{3}{2} \to \lambda^2+\tfrac{5}{2}\lambda+1=0,\ \lambda^2+\tfrac{3}{2}\lambda+1=0 \to \lambda=-2,-\tfrac{1}{2},\tfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{4} \,.$$

O bien, si $\frac{m}{k}\in\mathbf{Q}$ es raíz de un $P(\lambda)=a_0\lambda^n+\cdots+a_n$, m es divisor de a_n y k es divisor de a_0 .

$$4\lambda^4+16\lambda^3+23\lambda^2+16\lambda+4=(\lambda+2)(4\lambda^3+8\lambda^2+7\lambda+2)\xrightarrow{\downarrow}(\lambda+2)(2\lambda+1)(2\lambda^2+3\lambda+2)^{\uparrow}$$

Las soluciones generales son, pues, en cada caso: i) $\boxed{x=(c_1+c_2t+c_3t^2+c_4t^4)\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{4}\operatorname{sen} t}$,

ii) $\boxed{x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+c_3\,\mathrm{e}^{(-2+\sqrt{3})t}+c_4\,\mathrm{e}^{(-2-\sqrt{3})t}-\frac{t}{8}\operatorname{sen} t}$,

iii) $\boxed{x=c_1\,\mathrm{e}^{-2t}+c_2\,\mathrm{e}^{-t/2}+\Big(c_3\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t+c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{4}t\Big)\,\mathrm{e}^{-3t/4}-\frac{4}{15}\operatorname{sen} t}$.

En los casos i) y iii) la ecuación sólo tiene 1 solución periódica (cuando sea $c_1=c_2=c_3=c_4=0$).
Se sabía, porque la homogénea sólo tenía la solución periódica trivial $x\equiv 0$.

En el caso ii) la ecuación no tiene ninguna solución periódica (no lo es para ningún c_1,c_2,c_3,c_4).
Sabíamos que podía tener infinitas o ninguna, pues la homogénea tenía infinitas 2π-periódicas.

Solución de los problemas para entregar del tema 3

7a. Sea $(1-t^2)x''-tx'+x=2-3t^2$. Resolver la homogénea por series en $t=0$ y hallar la solución de la no homogénea en términos de funciones elementales. Comprobar haciendo el cambio $t=\cos s$.

$t=0$ regular, $x=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k \to \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k[t^{k-2}-t^k]+\sum_{k=1}^{\infty}-kc_kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k=0 \to t^0:\ c_2=-\frac{1}{2}c_0;\ t^1:\ c_3=0;$

$t^k:\ [-k^2+k-k+1]c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2},\ c_{k+2}=\frac{k-1}{k+2}c_k \to c_4=-\frac{1}{8}c_0,\ c_6=-\frac{1}{16}c_0,\ \dots,\ c_5=c_7=\cdots=0,$

$c_{2k}=\frac{2k-3}{2k}c_{2k-2}=\frac{(2k-3)(2k-5)}{2k(2k-2)}c_{2k-4}=\cdots \to x=c_1t+c_0\left[1-\frac{1}{2}t^2-\cdots-\frac{(2k-3)(2k-5)\cdots5\cdot3\cdot1}{2^kk!}t^{2k}-\cdots\right]$

$x_1=t \to x_2=t\int\frac{e^{\int t/(1-t^2)}}{t^2}=t\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)^{1/2}}\overset{t=\cos s}{=}-t\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \to x=c_1t\overset{\uparrow}{+}c_2\sqrt{1-t^2}+t^2$ [f.v.c.]

$t=\cos s \to \frac{dx}{ds}=-\operatorname{sen}s\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{ds^2}=\operatorname{sen}^2s\frac{d^2x}{dt^2}-\cos s\frac{dx}{dt} \to \frac{d^2x}{ds^2}+x=\frac{1-3\cos 2s}{2},\ x\overset{\uparrow}{=}c_1\cos s+c_2\operatorname{sen}s+\frac{1+\cos 2s}{2}$

7b. Hallar el desarrollo hasta orden 3 en $t=1$ de la solución de $t^2x''+tx'+(t^2-\frac{1}{4})x=0$ con $x(1)=0$, $x'(1)=1$, **i]** directamente por series, **ii]** a partir de la solución exacta de esta ecuación de Bessel.

i] $t=s+1 \to (s+1)^2x''+(s+1)x'+(s^2+2s+\frac{3}{4})x=0,\ s=0$ regular $\to x=c_0+c_1s+c_2s^2+c_3s^3+\cdots \to$

$$(s^2+2s+1)(2c_2+6c_3s+\cdots)+(s+1)(c_1+2c_2s+\cdots)+(s^2+2s+\tfrac{3}{4})(c_0+c_1s+c_2s^2+\cdots)=0 \to$$

$s^0:\ 2c_2+c_1+\frac{3}{4}c_0=0,\ c_2=-\frac{3}{8}c_0-\frac{1}{2}c_1;\quad s^1:\ 6c_3+4c_2+2c_2+c_1+\frac{3c_1}{4}+2c_0=0,\ c_3=-c_2-\frac{7c_1}{24}-\frac{c_0}{3}=\frac{c_0}{24}+\frac{5c_1}{24}$

$\to x=c_0\left[1-\frac{3}{8}s^2+\frac{1}{24}s^3+\cdots\right]+c_1\left[s-\frac{1}{2}s^2+\frac{5}{24}s^3+\cdots\right]\xrightarrow{d.i.}\boxed{x=(t-1)-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{5}{24}(t-1)^3+\cdots}$

O bien: $x''(1)=-x'(1)-\frac{3}{4}x(1)=-1,\quad t^2x'''+3tx''+(t^2+\frac{3}{4})x'+2tx=0 \to x'''(1)=3-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}\uparrow$

ii] Bessel-$\frac{1}{2} \to x=c_1\frac{\cos t}{\sqrt{t}}+c_2\frac{\operatorname{sen}t}{\sqrt{t}}\underset{d.i.}{\to}\frac{\operatorname{sen}(t-1)}{\sqrt{t}}=\operatorname{sen}s\,(1+s)^{-1/2}=\left[s-\frac{1}{6}s^3+\cdots\right]\left[1-\frac{1}{2}s+\frac{3}{8}s^2+\cdots\right]\uparrow$

8a. Sea $t(1-t)x''+(1-t)x'+px=0$. Precisar para qué valores de p hay soluciones que son polinomios y escribir un polinomio para $p=9$. ¿Dónde convergen las series solución para los otros valores de p?

$t^2x''+tx'+\frac{pt}{1-t}x=0,\ t=0$ singular regular, $r=0$ doble $\forall p$; sólo $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ puede dar polinomios.

$\sum_2 k(k-1)c_k[t^{k-1}-t^k]+\sum_1 kc_k[t^{k-1}-t^k]+\sum_0 pc_kt^k=0$ [No olvidemos que, en general, las series de un punto singular regular empiezan en 0]. $\to$

$t^0:\ c_1+pc_0=0 \to c_1=-pc_0;\quad t^1:\ 2c_2+2c_2-c_1+pc_1=0 \to c_2=\frac{1-p}{4}c_1=-\frac{p(1-p)}{4}c_0;$

$t^k:\ [-k(k-1)-k+p]c_k+[(k+1)k+(k+1)]c_{k+1} \to c_{k+1}=\frac{k^2-p}{(k+1)^2}c_k,\ c_3=\frac{p(1-p)(4-p)}{2^23^2},\dots$

Cuando $\boxed{p=n^2}$, $n=0,1,\dots$, es $c_{n+1}=0$ (y los siguientes), con lo que x_1 es un P_n de grado n.

En particular, si $p=9$, $c_1=-9c_0$, $c_2=18c_0$, $c_3=-10c_0$, $\boxed{P_3=1-9t+18t^2-10t^3}$.

Las series, según Frobenius, convergen al menos si $|t|<1$, y ahí lo hacen según dice el criterio del cociente:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}t^{k+1}}{c_kt^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{|k^2-p|}{(k+1)^2}|t|=|t|<1 \Rightarrow \text{converge.}$$

8b. Sea $t(t-1)x''+(4t-2)x'+2x=0$. **i]** Probar que hay una solución analítica en torno a $t=0$ y calcularla. **ii]** Identificar esta solución entre las que se obtendrían si resolviésemos por series en torno a $t=1$. **iii]** Estudiar si todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando $t\to\infty$.

i] $t^2x''+t\frac{4t-2}{t-1}x'+\frac{2t}{t-1}x=0,\ t=0$ singular regular, $r(r-1)+2r=0,\ r=0,-1;\ x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ analítica $\to$

$$\sum_2 k(k-1)c_k[t^k-t^{k-1}]+\sum_1 kc_k[4t^k-2t^{k-1}]+\sum_0 2c_kt^k=0 \to$$

$t^0:\ -2c_1+2c_0=0 \to c_1=c_0;\quad t^1:\ -2c_2+4c_1-4c_2+2c_1=0 \to c_2=c_1=c_0;$

$t^k:\ [k(k-1)k+4k+2]c_k-[(k+1)k+2(k+1)]c_{k+1}=(k+2)(k+1)[c_k-c_{k+1}]=0 \to \boxed{x_1=\sum_{k=0}^{\infty}t^k=\frac{1}{1-t}}$

ii] $t=s+1 \to s(s+1)x''+(4s+2)x'+2x=0 \to r=0,-1$: Será la $x_2=\frac{1}{s}$ de Frobenius (con $d=0$ y $b_k=0$, $k>0$).

iii] Haciendo $t=\frac{1}{s}$ se tiene $s^2(1-s)\ddot{x}-2s\dot{x}+2x=0$, con $r=2,1$, cuyas soluciones $\to 0$ cuando $s\to 0$:

$$x_1=s^2\sum\underset{s\to0}{\to}0,\quad x_2=s\sum+dx_1\ln s\underset{s\to0}{\to}0\ \ (s^2\ln s\to0\text{, aunque fuese } d\neq0).$$

O bien, $x_2=\frac{1}{1-t}\int\frac{e^{-\int(4t-2)/(t^2-t)}}{1/(1-t)^2}=\frac{1}{1-t}\int\frac{(1-t)^2}{(t^2-t)^2}=\frac{1}{1-t}\int\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t(t-1)}\underset{t\to\infty}{\to}0$, al igual que x_1.

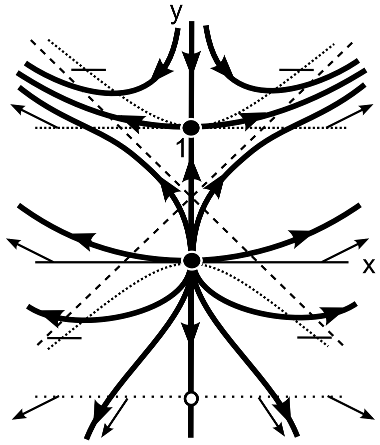
Solución de los problemas para entregar del tema 4

9a. Sea $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y(1-y)+x^2 \end{cases}$. **a]** Dibujar su mapa de fases. **b]** Hallar su solución con $x(1)=0$, $y(1)=-1$.

a] $2x=0 \to y(1-y)=0 \to \binom{0}{0}$ y $\binom{0}{1}$ puntos críticos. La aproximación lineal $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2x & 1-2y \end{pmatrix}$ en cada punto:

$\binom{0}{0}$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \lambda=1$, $\mathbf{v_1}=\binom{0}{1}$ y $\lambda=2$, $\mathbf{v_2}=\binom{1}{0}$. Nodo I ($\mathbf{v_1}$ manda).

$\binom{0}{1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \lambda=-1$, $\mathbf{v_1}=\binom{0}{1}$ (entra) y $\lambda=2$, $\mathbf{v_2}=\binom{1}{0}$ (sale). Silla.



Campo vertical si $x=0$ (órbita). Horizontal sobre $x^2-y^2+y=0$

(hipérbola que pasa por los puntos críticos con asíntotas $y=\frac{1}{2}\pm x$).

$\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}(x,1)=x\binom{2}{x}$ (la separatriz inestable se deforma $\smile$, la estable ya se vió que se conserva).

$\mathbf{v}(x,-1)=\binom{2x}{x^2-2}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}-\frac{y^2}{2x}+\frac{x}{2}$ Riccati no resoluble.

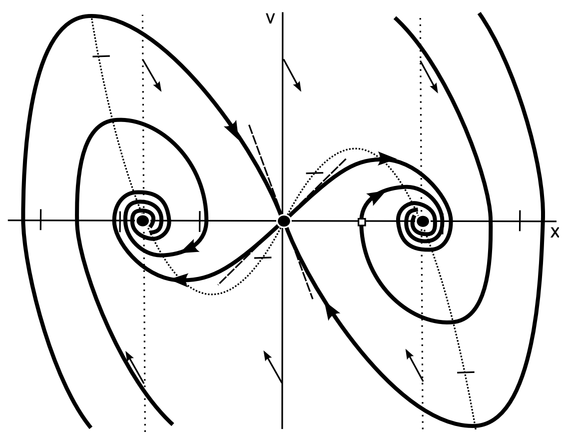
b] $x=0$ órbita que pasa por $(0,-1) \to y'=y(1-y)$ (separable o Bernouilli)

$\to y=\frac{1}{1+Ce^{-t}} \xrightarrow{y(1)=-1} \boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-2e^{1-t}} \end{pmatrix}}$ (explota para $t=1+\ln 2$).

9b. Sea [e] $x''=3x-x^3-2x'$. **a]** Dibujar su mapa de fases. **b]** Hallar el límite para $t\to\infty$ de la solución de [e] con $x(0)=1$, $x'(0)=0$. Interpretar físicamente las órbitas.

a] $\begin{cases} x'=v \\ v'=3x-x^3-2v \end{cases}$. Puntos críticos $\begin{matrix} v=0 \\ x=0,\pm\sqrt{3} \end{matrix}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3-3x^2 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \pm\sqrt{3} \nearrow & \lambda=-1\pm i\sqrt{5} \text{ focosE.} \\ 0 \searrow & \lambda=1,-3 \to \binom{1}{\lambda} \text{ sillas.} \end{matrix}$



Campo horizontal: $v=\frac{3x-x^3}{2}$. Vertical: $v=0$ (como en toda ecuación).

$\frac{dv}{dx}=\frac{3x-x^3}{v}-2$ no resoluble. $\mathbf{v}(0,v)=\mathbf{v}(\pm\sqrt{3},v)=v\binom{1}{-2}$.

$\mathbf{v}(x,x)=x\binom{1}{1-x^2}$, $\mathbf{v}(x,-3x)=x\binom{-3}{9-x^2}$ (las dos se deforman)

[No sería muy difiícil hallar y pintar la curva de puntos de inflexión de las órbitas, dada por $y=\frac{x(x^2-3)(1\pm\sqrt{4-3x^2})}{3(1-x^2)}$].

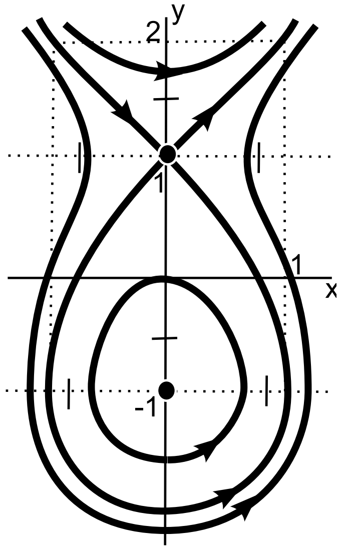
b] A la vista del mapa de fases, la solución pedida tiende hacia $\sqrt{3}$ cuando $t\to\infty$.

La ecuación puede describir el movimiento de una partícula que se mueve sobre el eje x sometida a una fuerza $3x-x^3$ que depende sólo de la posición y con un rozamiento $-2x'$ proporcional a su velocidad. La fuerza apunta hacia la derecha en $(-\infty,-\sqrt{3})$ y en $(0,\sqrt{3})$, y hacia la izquierda en $(-\sqrt{3},0)$ y $(\sqrt{3},\infty)$. Discutamos, por ejemplo, el significado de las órbitas que parten de los puntos $(a,0)$ del eje x (partículas dejadas en reposo en $x=a$). Si $a=0,\pm\sqrt{3}$, permanecerá en su sitio indefinidamente (aunque, en el primer caso, una pequeña modificación de la posición o velocidad iniciales la alejaría de esa posición inestable). Para $0<a<\sqrt{3}$, la partícula oscilará acercándose al equilibrio estable $\sqrt{3}$. Para a algo mayor que $\sqrt{3}$ ocurre algo similar, pero a la derecha del punto de corte de la separatriz estable del origen con el eje (precisarlo exigiría cálculo numérico) la partícula consigue superar la fuerza que se le opone en $(0,\sqrt{3})$ y va a tender hacia el otro equilibrio asintóticamente estable $-\sqrt{3}$. Similar es la situación a la izquierda del origen.

10a. Sea $\begin{cases} x' = 3y^2-3 \\ y' = 6x+4x^3 \end{cases}$. **a]** Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. **b]** Discutir para qué números a es periódica la solución con $x(0)=0$, $y(0)=a$. **c]** Determinar la estabilidad de sus soluciones constantes.

a] $f_x+g_y \equiv 0$, **exacto**. Órbitas: $\boxed{y^3-3y-x^4-3x^2 = C}$.

(Son simétricas respecto a $x=0$, lo que también se deduce del hecho de que f es par en x y g es impar en x).



$3(y^2-1)=0 \to y=\pm 1$ (pendiente horizontal). $x(6+4x^2)=0 \to x=0$ (vertical).

Puntos críticos: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}0&6\\6&0\end{pmatrix} \to \lambda=\pm 6$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\pm 1\\1\end{pmatrix}$ silla.

$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}0&-6\\6&0\end{pmatrix} \to \lambda=\pm 6i$, centro del lineal y del no lineal (exacto o simetría).

Por $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ pasa la órbita (separatrices) $y^3-3y+2=x^4-3x^2$ que corta:

el eje x si $x^4+3x^2-2 = 0$, $x^2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, $x \approx \pm 0.75$.

el eje y si $y^3-3y^2+2 = 0$, $y=1$ (la silla) e $y=-2$.

las rectas $y=-1$ e $y=2$ si $x^4+3x^2-4=0$, $x=\pm 1$.

Mas datos sobre las separatrices: $\mathbf{v}(x, 1\pm x) = x\begin{pmatrix}6\pm 3x\\6+4x^2\end{pmatrix}$.

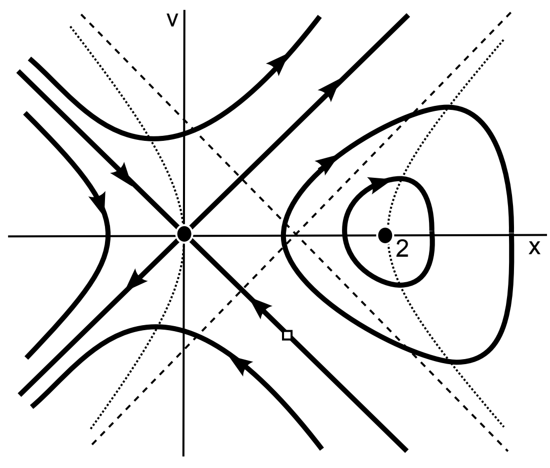
b] Las soluciones correspondientes a órbitas que pasan por $(0,a)$ son periódicas si $-2<a<1$ (todas las órbitas limitadas por la que sale y entra del punto de silla son curvas cerradas).

c] La solución $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ es **inestable** (se sabía desde que hallamos los autovalores de la aproximación lineal).

La $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ es **estable no asintóticamente** (aquí no bastaban los autovalores, pues podía ser un foco E o I).

10b. Sea $2x''-(x')^2+x(x-2) = 0$. **a]** Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. **b]** Hallar su solución con $x(2)=1$, $x'(2)=-1$. ¿Es estable?

a] $\begin{cases} x'=v \\ v'=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}v^2 \end{cases}$. Puntos críticos $\begin{matrix} v=0 \\ x=0\,,2 \end{matrix}$.



$\begin{pmatrix}0&1\\1-x&v\end{pmatrix}$ $0 \nearrow \lambda=\pm 1 \to$ sillas $\left(\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix}\right.$ en las ecuaciones$\left.\right)$.
$2 \searrow \lambda=\pm i \to$ centro de la aproximación lineal.

Como g es par en v las órbitas son simétricas respecto al eje x y el centro lo sigue siendo del sistema no lineal.

Órbitas (Bernouilli): $2v\frac{dv}{dx}=v^2+2x-x^2 \xrightarrow{v^2=z} z'=z+2x-x^2$

$\xrightarrow{z_p=Ax^2+Bx+C} z=Ce^x+x^2$. $\boxed{v^2=Ce^x+x^2}$ (confirmada simetría).

$C=0 \to v=\pm x$, separatrices rectas.

Campo horizontal sobre la hipérbola: $v^2-x^2+2x=0$.

Vertical sobre $y=0$. $\mathbf{v}(0,v)=\mathbf{v}(2,v)=v\begin{pmatrix}1\\v/2\end{pmatrix}$.

b] Por $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ pasa la órbita $v=-x=\frac{dx}{dt} \to x=Ce^{-t} \underset{x(2)=1}{\longrightarrow} \boxed{x=e^{2-t}}$ solución pedida.

Como esta solución tiende hacia 0 y casi todas las de datos iniciales próximos no se parecen nada a ella (las de arriba son periódicas, las de abajo tienden hacia $-\infty$), esta solución es **inestable**.