3. Soluciones por medio de series

En el capítulo anterior vimos las escasas formas de resolver elementalmente la ecuación con coeficientes variables

$$[\mathrm{e}]\quad \boxed{x''+a(t)x'+b(t)x=0}$$

Este capítulo trata una forma general de atacarla: **suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para determinar sus coeficientes**.

En la sección 3.1 recordaremos la definición de función **analítica** (función descrita por una serie de potencias convergente) y algunas manipulaciones matemáticas que se pueden hacer con ellas.

Cuando a y b son analíticas en t_o (punto **regular**, sección 3.2) siempre se podrán encontrar dos soluciones linealmente independientes de [e] en forma de serie de potencias por el siguiente camino: llevando una serie a la ecuación conseguiremos expresar sus coeficientes c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1, que serán las dos constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución de cualquier ecuación de segundo orden (algunas veces podremos dar la expresión general del c_k, pero otras nos deberemos limitar a ir calculando coeficiente a coeficiente). Un teorema, que aceptaremos sin demostración, nos asegurará que las series solución son convergentes al menos en el intervalo en que las series de a y b lo eran. Imponer datos iniciales en t_o será inmediato, pues tendremos que $x(t_o)=c_0$ y $x'(t_o)=c_1$.

Si a y b son 'casi' analíticas en t_o, es decir, si $(t-t_o)a(t)$ y $(t-t_o)^2b(t)$ lo son (t_o es **singular regular**), también se pueden utilizar series para resolver [e] de una forma sólo algo más complicada (es el **método de Frobenius** de la sección 3.3). Calcularemos primero una solución x_1 que (si $t_o=0$) será siempre de la forma $t^r\sum$ (siendo r una de las raíces del llamado **polinomio indicial**) y a continuación otra x_2, linealmente independiente de la anterior, que unas veces (según sea la diferencia entre las raíces del polinomio indicial) será del mismo tipo y otras contendrá además un término incluyendo el $\ln t$. De nuevo un teorema no demostrado garantizará la convergencia de las series que vayan apareciendo.

El cálculo de los coeficientes de las series es sencillo (aunque algo pesado). El problema básico de utilizar series para resolver ecuaciones es la dificultad de obtener información sobre las soluciones que se encuentran (y más cuando no podamos hallar su término general). Sin embargo ecuaciones del tipo [e] surgen a menudo en problemas reales y las series son el único instrumento para resolverlas. Por eso existen libros enteros (los de funciones especiales de la física) dedicados a estudiar las propiedades de las series solución de algunas de estas ecuaciones (las de Legendre, Hermite, Bessel, Laguerre, Tchebycheff, ...). Una pequeña muestra de tales estudios son las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de **Legendre, Hermite** y **Bessel** que se citan en la sección 3.4.

Las soluciones por serie en torno a cualquier punto (salvo que sean identificables con una función elemental) no dan ninguna información sobre el comportamiento de las soluciones cuando $t\to\infty$. En la sección 3.5, para estudiar para grandes valores de t las soluciones, introduciremos el llamado **punto del infinito** de una ecuación, punto $s=0$ de la ecuación que se obtiene haciendo $t=1/s$ en la inicial.

3.1 Funciones analíticas

$f(t)$ es **analítica** en $t=t_o$ si viene dada por una **serie de potencias** cerca de t_o:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_o)^k = c_0+c_1(t-t_o)+c_2(t-t_o)^2+\cdots$$

A partir de ahora, $t=0$ (si no, con $t-t_o=s$ estaríamos en ese caso): $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$.

A cada serie de potencias está asociado un **radio de convergencia** R tal que:

Si $R=0$, la serie sólo converge en $t=0$. Si $R=\infty$, converge para todo t.

Si $0<R<\infty$, converge si $|t|<R$ y diverge si $|t|>R$ (en $t=\pm R$ no sabemos).

Además, si $0<t_o<R$, la serie converge uniformemente en $[-t_o, t_o]$.

El R se puede calcular en muchas ocasiones aplicando el criterio del **cociente**:

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ y $p=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$. Entonces si $p<1$ la $\sum$ converge, y si $p>1$ diverge.

Propiedad básica de las series de potencias es que, para $|t|<R$ (si $R>0$), **se pueden derivar e integrar término a término**:

$$f'(t)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k t^{k-1}=c_1+2c_2t+\cdots,$$
$$f''(t)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2}=2c_2+6c_3t+\cdots, \quad \ldots \qquad (\Rightarrow f^{(k)}(0)=k!c_k)$$

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = C+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}t^{k+1} = C+c_0t+\frac{c_1}{2}t^2+\cdots \text{ si } |t|<R$$

También pueden sumarse, multiplicarse,... estas series como si fuesen polinomios:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \text{ si } |t|<R_f \text{ y } g(t)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \text{ si } |t|<R_g \Rightarrow \text{ Si } |t|<\min\{R_f,R_g\},$$

$$f(t)+g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}[a_k+b_k]t^k,\ f(t)g(t)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)t+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)t^2+\cdots$$

(también f/g es analítica si tiene límite en $t=0$;
ya veremos en ejemplos como hacer su desarrollo).

Caso importante de estas series son las de **Taylor**:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}}{k!}t^k, \quad \text{para } f \text{ con infinitas derivadas en } 0.$$

La mayoría de las funciones elementales coinciden con su serie de Taylor (y por tanto son analíticas) en todo el intervalo de convergencia de la serie. Por ejemplo:

$$e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}, \quad \operatorname{sen} t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!},$$

$$\operatorname{sh} t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{ch} t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall t\in \mathbf{R}.$$

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k, \quad \ln(1+t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1}, \quad \arctan t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1},$$

$$[1+t]^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots, \quad \text{si } |t|<1.$$

Aunque f sea $C^\infty(\mathbf{R})$ y su serie de Taylor converja $\forall t$ puede que ambas no coincidan, como le ocurre a $f(t)=e^{-1/t^2}, f(0)=0$ (que cumple $f^{(k)}(0)=0\ \forall k$, con lo que su serie de Taylor es $\sum 0\cdot t^k=0$ y, por tanto, f no es analítica). Para que una f lo sea, es necesario que tenga infinitas derivadas en el punto, pero no es suficiente.

Ej 1. Hallemos de varias formas (algunas nada naturales) el desarrollo de $f(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$.

$$f(t)=-\tfrac{d}{dt}\tfrac{1}{1+t}\to\tfrac{1}{(1+t)^2}=-\tfrac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,k\,t^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(k+1)\,t^k \quad \text{si } |t|<1\,.$$

Otra forma:

$$(1+t)^{-2}=1-2t+\tfrac{-2(-2-1)}{2!}t^2+\tfrac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}t^3+\cdots=1-2t+3t^2-4t^3+\cdots\,,\ |t|<1\,.$$

Multiplicando: $f(t)=[\,1-t+t^2-\cdots][\,1-t+t^2-\cdots]$

$$=[\,1+(-1-1)t+(1+1+1)t^2+\cdots]=1-2t+3t^2-\cdots \ \text{ si } |t|<1\,.$$

También podemos 'dividir': buscar una serie $\sum c_k t^k$ tal que:

$$[\,c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots]\,[\,t^2+2t+1]=1\ ;$$

así se va obteniendo:

$$c_0=1\ ;\ \ 2c_0+c_1=0\to c_1=-2c_0=-2\ ;\ \ c_0+2c_1+c_2=0\to c_2=-c_0-2c_1=3\ ;\ \ldots$$

[**El radio R del desarrollo de un cociente P/Q, con P y Q polinomios, simplificados los factores comunes, y $Q(0)\neq 0$ es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de Q más próxima**].

Y con un caso sencillo de 'composición' de series:

$$\tfrac{1}{1+(2t+t^2)}=1-(2t+t^2)+(2t+t^2)^2-(2t+t^2)^3+\cdots=1-2t+(-1+4)t^2+\cdots$$

3.2 Puntos regulares

Sea la ecuación [e] $\boxed{x'' + a(t)x' + b(t)x = 0}$.

Se dice que $t=t_o$ **es un punto regular de** [e] **si** a **y** b **son analíticas en** $t=t_o$. En caso contrario se dice que $t=t_o$ es **punto singular** de [e].

Sea $t=0$ regular y llamemos R al menor de los radios de convergencia de a y b . Se podrá, pues, escribir:

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad , \quad b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \quad \text{para } |t|<R \, .$$

Si sus coeficientes son analíticos, se puede esperar que cualquier solución de [e] lo sea también, es decir que también se pueda escribir como una serie de potencias para $|t|<R$. Empecemos con un ejemplo:

Ej 1. $\boxed{(1+t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0}$, es decir, $x'' + \frac{2t}{1+t^2}x' - \frac{2}{1+t^2}x = 0$,

$a(t)$ y $b(t)$ analíticas en $t=0$ (regular) con $R=1$ ($t=\pm i$ ceros del denominador).

Llevemos una solución en forma de serie arbitraria (junto con sus derivadas) a la ecuación inicial (mejor que a la segunda, pues deberíamos desarrollar a y b) y tratemos de calcular sus coeficientes:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \ , \ \ x' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} \ , \ \ x'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} \rightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k t^{k-2} + k(k-1)c_k t^k] + \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k t^k = 0$$

[No es falso poner $k=0$ como índice inferior de sumación en las tres series, pues se ve que se anularía el primer término en la de $k=1$ y los dos primeros en la de $k=2$, pero así está claro la potencia con la que empieza cada serie].

La solución final de esta lineal de segundo orden deberá contener dos constantes arbitrarias así que una buena estrategia puede ser **intentar escribir los** c_k **en función de los dos primeros** c_0 y c_1 . Como para que una serie de potencias se anule han de ser 0 los coeficientes de cada potencia de t , deducimos:

$$t^0: \ \ 2\cdot 1\cdot c_2 - 2\cdot c_0 = 0 \ \rightarrow \ c_2 = c_0$$

$$t^1: \ \ 3\cdot 2\cdot c_3 + [2-2]c_1 = 0 \ \rightarrow \ c_3 = 0$$

....

$$t^k: \ \ (k+2)(k+1)c_{k+2} + [k(k-1) + 2k - 2]c_k = 0$$

[Hemos escrito aparte los primeros términos porque cada serie empieza a aportar términos para distintos k ; como potencia general hemos escogido t^k porque era la más repetida, pero también podríamos haber tomado t^{k-2}].

De la última expresión deducimos la **regla de recurrencia** que expresa un coeficiente en función de los anteriores ya conocidos (en este ejemplo, queda el c_{k+2} en función sólo de c_k , pero en otros pueden aparecer varios); para facilitar los cálculos, **factorizamos los polinomios que aparecen** calculando sus raíces:

$$c_{k+2} = -\frac{(k+2)(k-1)}{(k+2)(k+1)} \, c_k = -\frac{k-1}{k+1} \, c_k \ , \ \ k=0,1,\ldots$$

Si preferimos tener el c_k (en vez del c_{k+2}) en términos de los anteriores, basta cambiar k por $k-2$ en la expresión anterior:

$$c_k = -\frac{k-3}{k-1} \, c_{k-2} \ , \ \ k=2,3,\ldots$$

A partir de la regla de recurrencia escribimos algunos c_k más (siempre en función de c_0 o c_1) con el objetivo de encontrar la expresión del **término general** de la serie (en muchos ejemplos esto no será posible, pero aquí sí):

$$c_4=-\tfrac{1}{3}c_2=-\tfrac{1}{3}c_0\ ,\quad c_6=-\tfrac{3}{5}c_4=\tfrac{1}{5}c_0\ ,\quad c_8=-\tfrac{5}{7}c_6=-\tfrac{1}{7}c_0\ ,\ \ldots$$

$c_5=0$ por estar en función de c_3 que se anulaba. Análogamente $c_7=c_9=\cdots=0$.

Por si no está aún clara la expresión de los c_{2k}, usamos la recurrencia 'desde arriba':

$$c_k=-\tfrac{k-3}{k-1}c_{k-2}=\tfrac{k-3}{k-1}\tfrac{k-5}{k-3}c_{k-4}=\tfrac{k-5}{k-1}c_{k-4}=-\tfrac{k-7}{k-1}c_{k-6}=\cdots$$

El numerador de c_{2k} es 1, el denominador es $2k-1$ y el signo va alternando, así que:

$$c_{2k}=(-1)^{k+1}\tfrac{1}{2k-1}c_0\ ,\quad k=2,3,\ldots$$

Agrupamos los términos que acompañan a c_0 y c_1 (que quedan indeterminados) y obtenemos por fin:

$$x=c_0\big[1+t^2-\tfrac{1}{3}t^4+\tfrac{1}{5}t^6+\cdots\big]+c_1t=c_0\Big[1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\tfrac{t^{2k}}{2k-1}\Big]+c_1t=c_0x_1+c_1x_2$$

Esta expresión tiene la estructura clásica de las soluciones de las lineales de segundo orden. Pero para que lo sea de verdad, las series deben converger en un entorno de $t=0$, y además x_1 y x_2 han de ser linealmente independientes. Esto es lo que sucede. La serie de x_1 (como muestra el criterio del cociente) converge para $|t|<1$ y la 'serie' de x_2 (truncada a partir de su segundo término) converge para todo t. Y además el wronskiano de ambas soluciones en $t=0$ resulta ser 1 (pues $x_1(0)=1$, $x_1'(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_2'(0)=1$).

Si, en vez de la solución general, la que queremos es la que cumple $x(0)=x_o$, $x'(0)=x_o'$ (existe y es única por ser a y b analíticas) dada la forma de las series de x_1 y x_2 es inmediato que debe tomarse $c_0=x_o$, $c_1=x_o'$.

[Esta ecuación se podía haber resuelto sin usar series. Era fácil darse cuenta de que $x_2=t$ era una solución, y podríamos haber calculado la x_1 siguiendo la sección 2.2:

$$x_1=x_2\int x_2^{-2}\,e^{-\int a}\,dt=t\int t^{-2}\,e^{-\int\frac{2t}{1+t^2}}\,dt=t\int t^{-2}(1+t^2)^{-1}dt=-1-t\arctan t\ ,$$

cuyo desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente].

Gran parte de lo visto en este ejemplo ocurre en general, como asegura el siguiente teorema que no demostraremos.

Teor 1. Si $t=0$ es regular, la solución general de [e] es

$$x=c_0x_1+c_1x_2=c_0\big[1+\sum\big]+c_1\big[t+\sum\big]\ ,$$

con c_0, c_1 arbitrarios, y las series, que contienen potencias t^k con $k\geq 2$, convergen, al menos, para $|t|<R$. Los coeficientes de estas series se determinan de forma única probando una serie de potencias arbitraria en la ecuación (con las funciones $a(t)$ y $b(t)$ desarrolladas) y expresando sus coeficientes c_k, para $k\geq 2$, en función de c_0 y c_1. La solución única de [e] con $x(0)=x_o$, $x'(0)=x_o'$ se obtiene simplemente sustituyendo $c_0=x_o$, $c_1=x_o'$.

[El desarrollo de a y b, desde luego, no será necesario si esas funciones son polinomios].

Para estudiar las soluciones de [e] en un entorno de otro t_o regular, el **cambio de variable** $s=t-t_o$ lleva a una ecuación en s para la que $s=0$ es regular. Probaríamos entonces para hallar su solución la serie:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\quad\Big[\text{es decir,}\ \ x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t-t_o)^k\ \Big].$$

Ej 2. $\boxed{x'' + (t-2)x = 0 \ , \ x(0)=2 \, , \ x'(0)=1}$

$t=0$ regular puesto que $a(t)=0$ y $b(t)=t-2$ son analíticas en todo **R**.

El primer ejemplo era demasiado sencillo. En general, y como en este, las cosas serán más complicadas. Llevando una serie arbitraria y sus derivadas a la ecuación e igualando a 0 los coeficientes de cada t^k:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \ \to \ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \big[c_k t^{k+1} - 2c_k t^k \big] = 0 \ \to$$

$$t^0: \ 2\cdot 1\cdot c_2 - 2\cdot c_0 = 0 \to c_2 = c_0 \ ; \quad t^1: \ 3\cdot 2\cdot c_3 + c_0 - 2\cdot c_1 = 0 \to c_3 = -\tfrac{1}{6}c_0 + \tfrac{1}{3}c_1 \ ; \ \ldots$$

$$t^{k-2}: \ k(k-1)c_k + c_{k-3} - 2c_{k-2} = 0 \ \to \ c_k = -\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3} + \tfrac{2}{k(k-1)}c_{k-2} \ , \ k=3,4,\ldots$$

(regla de recurrencia de tres términos que suele traer muchos más problemas que las de dos). Escribimos un par de términos más en función de c_0 y c_1:

$$c_4 = -\tfrac{1}{12}c_1 + \tfrac{2}{12}c_2 = \tfrac{1}{6}c_0 - \tfrac{1}{12}c_1 \ ; \ c_5 = -\tfrac{1}{20}c_2 + \tfrac{2}{20}c_3 = -\tfrac{1}{15}c_0 + \tfrac{1}{30}c_1$$

No hay forma de encontrar la expresión del término general, aunque paso a paso podemos ir calculando el número de términos que queramos.

La solución general es entonces:

$$x = c_0\big[1 + t^2 - \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{6}t^4 - \tfrac{1}{15}t^5 + \cdots\big] + c_1\big[t + \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{12}t^4 + \tfrac{1}{30}t^5 + \cdots\big]$$

Y la particular pedida: $x = 2 + t + 2t^2 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{15}t^5 + \cdots$, convergente $\forall t$ según el teorema.

Para calcular unos pocos términos (pero no para hallar muchos o para buscar la expresión del término general) de una serie solución cerca de un punto regular se puede seguir el siguiente camino:

Haciendo $t=0$ en la ecuación: $x''(0) + (0-2)x(0) = 0 \to x''(0) = 4$

Derivando la ecuación y volviendo a hacer $t=0$:

$$x''' + (t-2)x' + x = 0 \to x'''(0) = 2x'(0) - x(0) = 0$$

Derivando otra vez: $x'''' + (t-2)x'' + 2x' = 0 \to x''''(0) = 2x''(0) - 2x'(0) = 6$, ...

Por tanto: $x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2}t^2 + \frac{x'''(0)}{6}t^3 + \cdots = 2 + t + \frac{4}{2}t^2 + \frac{0}{6}t^3 + \frac{6}{24}t^4 + \cdots$

Si ahora queremos unos términos de la solución de la ecuación con $\boxed{x(2) = 6 \, , \, x'(2) = 0}$, la solución general de arriba, dada por series en $t=0$, claramente no sirve para imponer datos en $t=2$. Debemos resolver en torno a este punto:

$$s = t-2 \to \tfrac{d^2x}{ds^2} + sx = 0 \, , \ s=0 \text{ regular} \to x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \to \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k s^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{k+1} = 0 \to$$

$$s^0: \ 2c_2 = 0 \ ; \ s^1: \ 6c_3 + c_0 = 0 \, , \ c_3 = -c_0 \ ; \ \ldots \ ;$$

$$s^{k-2}: \ k(k-1)c_k + c_{k-3} = 0 \ \to \ c_k = -\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3} \ ; \ k=3,4,\ldots \ \to$$

$$c_5 = c_8 = \cdots = 0 \ ; \ c_4 = -\tfrac{1}{4\cdot 3}c_1 \ ; \ c_6 = -\tfrac{1}{6\cdot 5}c_3 = \tfrac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}c_0 \ ; \ c_7 = -\tfrac{1}{7\cdot 6}c_4 = \tfrac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}c_1 \ \to$$

$$x = c_0\big[1 - \tfrac{1}{6}s^3 + \tfrac{1}{120}s^6 + \cdots\big] + c_1\big[s - \tfrac{1}{12}s^4 + \tfrac{1}{504}s^7 + \cdots\big] \xrightarrow{\text{datos}}$$

$$x = 6 - s^3 + \tfrac{1}{20}s^6 + \cdots = 6 - (t-2)^3 + \tfrac{1}{20}(t-2)^6 + \cdots$$

(Aquí sí podemos expresar el término general, aunque no nos queda tan compacto como en el ejemplo 1:

$$x = c_0\Big[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k (t-2)^{3k}}{2\cdot 5\cdots(3k-1)\cdot 3\cdot 6\cdots(3k)}\Big] + c_1\Big[t + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k (t-2)^{3k+1}}{3\cdot 6\cdots(3k)\cdot 4\cdot 7\cdots(3k+1)}\Big] \text{).}$$

3.3 Puntos singulares regulares

Supondremos en esta sección que para [e] $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ es $t=t_o$ un **punto singular**, es decir, que o $a(t)$ o $b(t)$ o las dos no son analíticas en $t=t_o$, con lo que no es aplicable el método de la sección anterior. Sin embargo, interesa precisamente en muchas ocasiones conocer el comportamiento de las soluciones de [e] en las cercanías de sus puntos singulares. En general se podrá decir poco sobre este comportamiento, salvo para un tipo particular de puntos sólo débilmente singulares: los **singulares regulares** que vamos a definir.

Suponemos a partir de ahora que el punto singular que tratamos es $t=0$. Sabemos que esto no supone pérdida de generalidad ya que en el caso de que queramos estudiar las soluciones cerca de un $t_o\neq 0$ el cambio $s=t-t_o$ traslada el problema al estudio de las soluciones cerca de 0 de la ecuación en s.

Conviene escribir [e] de otra forma. Multiplicándola por t^2 y llamando $a^*(t)=ta(t)$ y $b^*(t)=t^2b(t)$ obtenemos:

$$[\mathrm{e}^*]\quad \boxed{t^2x''+t\,a^*(t)x'+b^*(t)x=0}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} t=0 \text{ **es punto singular regular de** } [\mathrm{e}] - [\mathrm{e}^*] \text{ **si**} \\ a^*(t)=ta(t) \text{ y } b^*(t)=t^2b(t) \text{ **son analíticas en** } t=0\,. \end{array}}$$

Ej 1. $\boxed{t(t-1)^2x''-tx'+(t-1)x=0}$, es decir,

$$[\mathrm{e}]\ x''-\tfrac{1}{(t-1)^2}x'+\tfrac{1}{t(t-1)}x=0\,,\quad [\mathrm{e}^*]\ t^2x''-t\tfrac{t}{(t-1)^2}x'+\tfrac{t}{t-1}x=0\,.$$

$t=0$ y $t=1$ son puntos singulares de la ecuación (todos los demás son regulares).

Como $a^*(t)=-\frac{t}{(t-1)^2}$ y $b^*(t)=\frac{t}{t-1}$ son analíticas en $t=0$, el punto es singular regular.

Con $t-1=s$ obtenemos: $s^2(s+1)x''-(s+1)x'+sx=0$, es decir, $s^2x''-s\frac{1}{s}x'+\frac{s}{s+1}x=0$

(estas derivadas son con respecto a s, pero las hemos dejado tal cual, pues $\frac{ds}{dt}=1$).

Como $-\frac{1}{s}$ no es analítica en 0 (aunque $\frac{s}{s+1}$ sí lo sea), $t=1$ ($s=0$) es singular no regular.

[En torno a $t=1$ no sabremos resolver la ecuación por series (la teoría es complicada)].

Ej 2. $\boxed{t^2x''+\operatorname{sen}t\,x'+t^{5/3}x=0}$ $\to$ $x''+\frac{\operatorname{sen}t}{t^2}x'+t^{-1/3}x=0$ ó $t^2x''+t\frac{\operatorname{sen}t}{t}x'+t^{5/3}x=0$.

$a(t)$ y $b(t)$ no son ni continuas en $t=0$ (no es punto regular). Tampoco es singular regular: $a^*(t)=\frac{\operatorname{sen}t}{t}=\frac{t-\frac{1}{6}t^3+\cdots}{t}=1-\frac{1}{6}t^2+\cdots$ sí es analítica en $t=0$ (con radio $R=\infty$), pero no lo es $b^*(t)=t^{5/3}$ (es continua y derivable, pero ya no existe la derivada segunda en 0).

Los $t_o\neq 0$ son puntos regulares de la ecuación, por ser $a(t)$ y $b(t)$ analíticas en $t=t_o$.

[Escribir sus desarrollos en ese punto se podría hacer con un poco de trabajo; por ejemplo, en torno a $t=1$: $t=s+1$ $\to$ $x''+\frac{\cos 1\operatorname{sen}s+\operatorname{sen}1\cos s}{(s+1)^2}x'+(1+s)^{-1/3}x=0\ \ldots$].

Queremos resolver [e*] cerca de $t=0$ suponiendo que $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son analíticas en ese punto, es decir, que admiten desarrollo en serie válido en $|t|<R$ (mínimo de los radios de convergencia):

$$\boxed{a^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^*\,t^k=a_0^*+a_1^*t+\cdots\,,\quad b^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k^*\,t^k=b_0^*+b_1^*t+\cdots}\ ,\ |t|<R\,.$$

[Normalmente será $a_0^*=a^*(0)$ y $b_0^*=b^*(0)$ salvo para funciones como $\frac{\operatorname{sen}t}{t}$].

[e*] se resolverá con el **método de Frobenius**, que detallaremos en el teorema de esta sección. No lo probaremos, pero intentemos hacer creíbles sus hipótesis y conclusiones. La ecuación más sencilla del tipo [e*] es la de Euler (en ella $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son 'series' que se reducen a su primer término). Viendo sus soluciones está claro que no hay, en general, soluciones analíticas de [e*]. Pero ya que hay soluciones de Euler de la forma t^r se podría pensar que [e*] posee soluciones en forma de serie que comiencen por términos t^r.

Probemos por tanto en [e*] la solución $x = t^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 t^r + c_1 t^{r+1} + c_2 t^{r+2} + \cdots$.

Debe ser entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* t^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^{k+r}\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* t^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+r}\Big) = 0$$

El coeficiente que acompaña a la potencia de menor orden (t^r) debe anularse:

$$\big[r(r-1)+a_0^*\, r+b_0^*\big]c_0 = 0\,.$$

Si la serie ha de empezar por términos t^r, debe ser $c_0 \neq 0$. Por tanto, los únicos r para los que pueden existir soluciones no triviales de la forma $t^r \sum$ son las raíces del polinomio:

$\boxed{Q(r) \equiv r(r-1)+a_0^*\, r+b_0^*}$, llamado **polinomio indicial** de [e*].

Esto es coherente con las ecuaciones de Euler. Para ellas, si $Q(r)$ tenía dos raíces distintas r_1 y r_2, dos soluciones independientes de la ecuación eran t^{r_1} y t^{r_2}. Pero si la raíz era doble sólo existía una solución de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el $\ln t$; por tanto, también es de esperar que en la solución general de [e*] aparezcan logaritmos.

Pero al resolver por series [e*] pueden aparecer problemas que no se presentan en el caso particular de las de Euler. Igualando a 0 el coeficiente que acompaña a t^{r+k} tenemos:

$$\big[(r+k)(r+k-1)+(r+k)a_0^*+b_0^*\big]c_k + \big[(r+k-1)a_1^*+b_1^*\big]c_{k-1} + \cdots = 0$$

donde los puntos representan los términos con c_{k-2}, $c_{k-3}, \ldots$ De esta expresión podemos despejar el c_k en función de los anteriores ya calculados siempre que el corchete que le acompaña, que es $Q(r+k)$, no se anule. Si r_1 es la mayor de las dos raíces $Q(r_1+k)\neq 0\ \forall k$. Pero si r_2 es la menor, y r_1-r_2 es un entero positivo n, el $Q(r_2+k)=0$ si $k=n$, y, salvo que los demás sumandos también se anulen (con lo que c_n quedaría indeterminado), no hay forma de anular el coeficiente de t^{r_2+n} y no pueden existir soluciones $t^{r_2}\sum$.

Enunciamos ya el **teorema de Frobenius** (aunque se podría considerar el caso de raíces complejas del Q, nos limitamos, por sencillez, a los casos reales):

Teor 1.

Supongamos que el polinomio indicial $Q(r)= r(r-1) + a_0^* r + b_0^*$ tiene raíces reales r_1, r_2 con $r_1 \geq r_2$.

Entonces siempre existe una solución x_1 de [e*] de la forma

$$x_1 = t^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \ ,\ c_0 \neq 0\,.$$

La segunda solución x_2 linealmente independiente es, según los casos:

a] Si r_1-r_2 no es cero ni entero positivo: $x_2 = t^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, $b_0\neq 0$.

b] Si $r_1=r_2$, $x_2 = t^{r_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1 \ln t$.

c] Si $r_1-r_2=1,2,3,\ldots$, $x_2 = t^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + d x_1 \ln t$, $b_0\neq 0$, $d\in\mathbf{R}$.

Todas las soluciones están definidas al menos para $0<t<R$ y los coeficientes c_k, b_k y la constante d se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

Se comprueba sin dificultad que a partir de las soluciones anteriores obtenemos otras válidas en $-R<t<0$ sin más que sustituir $\ln t$ por $\ln|t|$ y las expresiones de la forma t^r que preceden a las series por $|t|^r$. En el caso **c]** la constante d puede ser perfectamente 0 (como ocurre en las ecuaciones de Euler), con lo que, a pesar de todo, hay dos soluciones independientes de la forma $t^r\sum$.

Ej 3. $\boxed{2tx''+x'+tx=0}$, o sea, $t^2x''+t\frac{1}{2}x'+\frac{t^2}{2}x=0 \;\to\; a^*(t)=\frac{1}{2}$, $b^*(t)=\frac{t^2}{2}$.

$a^*(t)$ y $b^*(t)$ analíticas ($R=\infty$) $\Rightarrow$ $t=0$ singular regular. Como $a_0^*=\frac{1}{2}$ y $b_0^*=0$, el polinomio indicial es $r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=r(r-\frac{1}{2}) \to r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=0$, con $r_1-r_2\notin\mathbf{N}$.

Las dos series solución linealmente independientes son, pues:

$x_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+1/2}$, $c_0\neq 0$ y $x_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kt^k$, $b_0\neq 0$ (convergen $\forall t\in\mathbf{R}$, según el teorema).

Llevando x_1 a la ecuación inicial (las series se derivan como las de potencias habituales):

$$\sum_{k=0}^{\infty}2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_kt^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{1}{2})c_kt^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+3/2}=0$$

(ahora las 3 series empiezan por $k=0$ pues no se anulan los primeros términos al derivar).

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de t :

$t^{-1/2}$: $\big[2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\big]c_0=0\cdot c_0=0$ y c_0 queda indeterminado como debía.

$t^{1/2}$: $\big[2(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})+\frac{3}{2}\big]c_1=0\to c_1=0$,

$t^{k-1/2}$: $\big[2(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+(k+\frac{1}{2})\big]c_k+c_{k-2}=0\to c_k=-\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}$, $k=2,3,\ldots$

Por tanto: $c_3=c_5=\cdots=0$, $c_2=-\frac{1}{2\cdot 5}c_0$, $c_4=-\frac{1}{4\cdot 9}c_2=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}c_0$, ... y la primera solución es:

$$x_1=t^{1/2}\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot 5\cdot 9\cdots(4m+1)}\,t^{2m}\Big] \text{ (eligiendo, por ejemplo, } c_0=1\text{).}$$

Para la otra raíz del polinomio indicial: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2k(k-1)b_kt^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}kb_kt^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kt^{k+1}=0\to$

t^0: $b_1=0$, t^1: $[4+2]b_2+b_0=0\;\to\; b_2=-\frac{1}{6}b_0$.

t^{k-1}: $[2k(k-1)+k]b_k+b_{k-2}=0\;\to\; b_k=-\frac{1}{k(2k-1)}b_{k-2}$, $k=2,3,\ldots\to$

$b_3=b_5=\cdots=0$, $b_4=-\frac{1}{4\cdot 7}b_2=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}b_0$, $\ldots\to\; x_2=1+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot 3\cdot 7\cdots(4m-1)}\,t^{2m}$

El criterio del cociente prueba que, como debían, las series convergen $\forall t$. La x_2 vale $\forall t$, pero x_1 sólo si $t>0$ (en $t=0$ no derivable). Una x_1 válida $\forall t\neq 0$ es $x_1=|t|^{1/2}[1+\sum]$.

Ej 4. $\boxed{t^2x''+2t^2x'+(t^2+\frac{1}{4})x=0}$ $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=t^2+\frac{1}{4}$ analíticas en $\mathbf{R}$.

$t=0$ singular regular; $r(r-1)+\frac{1}{4}=0\to r=\frac{1}{2}$ doble $\to$

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+1/2}\;\to\;\sum_{k=0}^{\infty}\big[k^2c_kt^{k+1/2}+(2k+1)c_kt^{k+3/2}+c_kt^{k+5/2}\big]=0\ ,$$

$$\to\; c_1=-c_0\ ,\quad c_k=-\tfrac{2k-1}{k^2}c_{k-1}-\tfrac{1}{k^2}c_{k-2}\ ,\; k=2,3,\ldots$$

$$\to c_2=\tfrac{1}{2}c_0\ ,\; c_3=-\tfrac{1}{6}c_0\ ,\ldots,\; c_k=(-1)^k\tfrac{1}{k!}c_0\to\; x_1=t^{1/2}\mathrm{e}^{-t}$$

Como la raíz es doble, la otra solución necesariamente contiene un logaritmo:

$$x_2=t^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+x_1\ln t\;\to\; x_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{3}{2})b_kt^{k+1/2}+\tfrac{1}{t}x_1+x_1'\ln t\ ,$$

$$x_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{3}{2})(k+\tfrac{1}{2})b_kt^{k-1/2}-\tfrac{1}{t^2}x_1+\tfrac{2}{t}x_1'+x_1''\ln t\to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k^2+2k+1)b_kt^{k+3/2}+(2k+3)b_kt^{k+5/2}+b_kt^{k+7/2}\big]+\ln t\big[t^2x_1''+2t^2x_1'+(t^2+\tfrac{1}{4})x_1\big]=0$$

El último corchete es 0 por ser x_1 solución (lo que acompaña a $\ln t$ siempre se anula).

$$\to\; b_0=b_1=b_2=\cdots=0\;\to\; x_2=t^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\ln t$$

[Para comprobarlo podemos hacer $y=re^tx\to t^2y''+\frac{1}{4}y=0$ (Euler) $\to y=c_1t^{1/2}+c_2t^{1/2}\ln t$; o también, una vez hallada la x_1 , se puede calcular otra solución con la fórmula de 2.2:

$x_2=t^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\int\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t\mathrm{e}^{-2t}}\,dt=t^{1/2}\mathrm{e}^{-t}\ln t$, exactamente la misma x_2 hallada con las series].

Como se ha visto en el ejemplo anterior, son más largas las cuentas para el cálculo de la x_2 en el caso **b]** del teorema que en el **a]**. Y también son más complicadas las del **c]**, caso al que pertenecen los tres siguientes ejemplos.

Ej 5. $\boxed{t^2x''+2t^2x'-2x=0}$ $t=0$ singular regular, $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=-2$ analíticas en **R**.

El polinomio indicial $r(r-1)+0\,r-2$ tiene por raíces $r_1=2$ y $r_2=-1$. Así pues:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2}\ ,\ c_0\neq 0\ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_kt^{k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}2(k+2)c_kt^{k+3}-\sum_{k=0}^{\infty}2c_kt^{k+2}=0$$

$$\to\ c_0\ \text{indeterminado},\quad c_k=-\tfrac{2(k+1)}{k(k+3)}c_{k-1}\ ,\ k=1,2,\dots$$

$$\to\ c_1=-c_0\ ,\ c_2=\tfrac{3}{5}c_0\ ,\ c_3=-\tfrac{4}{15}c_0\ ,\ \dots,$$

$$c_k=(-1)^k\,\tfrac{2(k+1)}{k(k+3)}\,\tfrac{2k}{(k-1)(k+2)}\,\tfrac{2(k-1)}{(k-2)(k+1)}\cdots c_0=\tfrac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}\,6c_0$$

Por tanto, eligiendo $c_0=\frac{1}{6}$, $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}\,t^{k+2}\ \to\ x_1'=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)(k+2)}{(k+3)!}\,t^{k+1}$

La segunda solución (caso **c]** del teorema) es

$$x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k-1}+dx_1\ln t\ ,\ b_0\neq 0\ ,\ d\ \text{constante (quizás nula)}\ \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k-1)(k-2)b_kt^{k-1}+2(k-1)b_kt^k-2b_kt^{k-1}\big]$$
$$+\,d\big[(-1+2t)x_1+2tx_1'\big]+d\ln t\big[t^2x_1''+2t^2x_1'-2x_1\big]=0$$

Como siempre, el tercer corchete se anula, por ser x_1 solución. Sustituyendo las series de x_1 y x_1' escritas arriba en el segundo corchete y agrupando potencias de t:

$$-2b_0-2b_1-2b_2t+\big[2b_3+2b_2-2b_3-\tfrac{d}{6}+\tfrac{2d}{3}\big]t^2+\cdots=0\ \to$$
$$b_1=-b_0\ ,\ b_2=0\ ,\ d=0\ ;\ \ b_0\,,\ b_3\ \text{indeterminados.}$$

Como $d=0$, en la expresión de x_2 no aparece el $\ln t$. Sabíamos que debía ser $b_0\neq 0$. El hecho de que también b_3 quede indeterminado se debe a que proporciona potencias t^2, comienzo de la serie de x_1. Elegimos $b_0=1$ y $b_3=0$ (para no volver a calcular x_1). Como en la regla de recurrencia cada b_k depende de b_{k-1} es $b_4=b_5=\cdots=0$.

Concluimos que: $x_2=\frac{1}{t}(1-t)=\frac{1}{t}-1$ [es fácil comprobar que satisface la ecuación].

[De esta solución x_2 sacaríamos otra con: $x_1^*=\frac{1-t}{t}\int\frac{t^2e^{-2t}}{(1-t)^2}dt$. La primitiva no parece calculable, pero esto no impide desarrollar e integrar para obtener una serie solución:

Lo más corto para desarrollar el integrando (se podría hacer un cociente) es:

$$\tfrac{1}{(1-t)^2}=\tfrac{d}{dt}\tfrac{1}{1-t}\ \to\ t^2[1-2t+2t^2+\tfrac{4}{3}t^3+\cdots][1+2t+3t^2-4t^3+\cdots]=t^2+t^4+\tfrac{2}{3}t^5+\cdots$$
$$\to\ x_1^*=\big[\tfrac{1}{t}-1\big]\big[\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^5+\tfrac{1}{9}t^6+\cdots\big]=\tfrac{1}{3}t^2-\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{5}t^4-\tfrac{4}{45}t^5+\cdots\ .$$

Aunque no lo pareciese, la primitiva sí se puede hallar: $u=t^2e^{-2t}$, $dv=\frac{1}{(1-t)^2}\ \to$

$$\int\tfrac{t^2e^{-2t}}{(1-t)^2}dt=\tfrac{t^2e^{-2t}}{1-t}-\int 2te^{-2t}dt=\tfrac{1}{2}\tfrac{1+t}{1-t}e^{-2t}\ \to\ x_1^\bullet=(1+\tfrac{1}{t})\,e^{-2t}\ .$$

x_1 no es exactamente ni x_1^* ni $x_1^\bullet$ (es $3x_1^*$ y una combinación lineal de x_2 y $x_1^\bullet$)].

[En este ejemplo, si, en vez de partir de la raíz mayor de la ecuación indicial, hubiésemos sustituido la x_2, habríamos obtenido las dos series de un tirón; pero esto ocurriría por que casualmente resulta ser $d=0$; si fuera $d\neq 0$ sólo obtendríamos la solución trivial $x=0$ y deberíamos empezar de nuevo desde el principio].

Para distinguir en el caso **c]** del teorema de Frobenius si aparecen logaritmos o no (es decir, si es o no $d\neq 0$) no es necesario hallar la expresión del término general, bastan con los primeros términos de la x_1. Esto es lo que haremos en los dos últimos ejemplos.

Ej 6. Estudiemos cuántas soluciones analíticas linealmente independientes tiene:

$$\boxed{2tx''+(t-2)x'+3x=0}\ ,\ \text{es decir,}\quad t^2x''+t(\tfrac{t}{2}-1)x'+\tfrac{3t}{2}x=0\ .$$

$t=0$ singular regular. $r(r-1)-r=0\to r_1=2$, $r_2=0$. Es seguro analítica $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2}$

$$\to\ \sum_{k=0}^{\infty}\big[2(k+2)(k+1)c_kt^{k+1}-2(k+2)c_kt^{k+1}+(k+2)c_kt^{k+2}+3c_kt^{k+2}\big]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}2(k+2)kc_kt^{k+1}+(k+5)c_kt^{k+2}]=0\ .$$

Calculemos, por ejemplo, los tres primeros términos de esta primera serie:

t^1: $0\,c_0=0$, c_0 indeterminado ; t^2: $6c_1+5c_0=0$, $c_1=-\frac{5}{6}c_0$;

t^3: $16c_2+6c_1=0$, $c_2=-\frac{3}{8}c_1=\frac{5}{16}c_0$; . . . $\to$

$$x_1=t^2-\tfrac{5}{6}t^3+\tfrac{5}{16}t^4+\cdots\ \big[\to\ x_1'=2t-\tfrac{5}{2}t^2+\tfrac{5}{4}t^3+\cdots\ \big]$$

La $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+dx_1\ln t$ será analítica si $d=0$ y no lo será si $d\neq 0$. Hay que trabajar:

$$x_2'=\sum_{k=1}^{\infty}kb_kt^{k-1}+dx_1'\ln t+\tfrac{d}{t}x_1\ ;\quad x_2''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kt^{k-2}+dx_1''\ln t+\tfrac{2d}{t}x_1'-\tfrac{d}{t^2}x_1\ \to$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kt^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}[kb_kt^k-2kb_kt^{k-1}]+\sum_{k=0}^{\infty}3b_kt^k+4dx_1'-\tfrac{4d}{t}x_1+dx_1=0\ \to$$

t^0: $-2b_1+3b_0=0\to b_1=\frac{3}{2}b_0$;

t^1: $4b_2+b_1-4b_2+3b_1+8d-4d=0\to d=-b_1=-\frac{3}{2}b_0\neq 0$.

Por tanto, la segunda solución contiene el $\ln t$ y no es analítica en $t=0$:

$$x_2=1+\tfrac{3}{2}t+\cdots-\tfrac{3}{2}x_1\ln t\ .$$

[No es analítica, pero sí es continua en $t=0$, pues $x_1\ln t\underset{t\to 0}{\to}0$ (si $a>0$, $t^a\ln t\underset{t\to 0}{\to}0$)].

Ej 7. $\boxed{tx''+2e^tx'=0}$. Sabemos resolverla siguiendo 2.2, pero utilicemos Frobenius:

$t=0$ es singular regular [$a^*(t)=2e^t$ y $b^*(t)\equiv 0$ analíticas en todo **R**]. $r_1=0$, $r_2=-1$.

La $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ se ve (¡a ojo!) que es $x_1\equiv 1$. La otra es: $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k-1}+d\ln t\ \to$

$$x_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)b_kt^{k-2}+\tfrac{d}{t}\ ,\quad x_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)b_kt^{k-3}-\tfrac{d}{t^2}\to$$

$$2b_0t^{-2}+2b_3t+\cdots-dt^{-1}+\big[2+2t+t^2+\tfrac{1}{3}t^3+\cdots\big]\big[dt^{-1}-b_0t^{-2}+b_2+2b_3t+\cdots\big]=0\to$$

t^{-2}: $2b_0-2b_0=0\to b_0$ indeterminado como debía.

t^{-1}: $-d+2d-2b_0=0\to d=2b_0$ (aparecen, pues, logaritmos).

t^0: $2d-b_0+2b_2=0\to b_2=\frac{1}{2}b_0-d=-\frac{3}{2}b_0$.

t^1: $2b_3+d-\frac{1}{3}b_0+2b_2+4b_3=0\to b_3=\frac{2}{9}b_0$.

. . . .

$$\to\quad x_2=2\ln t+\tfrac{1}{t}-\tfrac{3}{2}t+\tfrac{2}{9}t^2+\cdots$$

Resolvamos la ecuación ahora sin series: $x'=v\ \to\ v'=-\frac{2e^t}{t}v\ \to$

$$v=Ce^{-\int 2t^{-1}e^tdt}=Ce^{-\int(-2/t-2-t-t^2/3+\cdots)dt}=Ct^{-2}e^{-2t-t^2/2-t^3/9+\cdots}=$$
$$=Ct^{-2}\big[1+(-2t-\tfrac{1}{2}t^2-\tfrac{1}{9}t^3-\cdots)+\tfrac{1}{2}(-2t-\tfrac{1}{2}t^2-\cdots)^2+\tfrac{1}{6}(-2t-\cdots)^3+\cdots\big]\to$$

$$x=K+C\int\big[t^{-2}-2t^{-1}+\tfrac{3}{2}-\tfrac{4}{9}t+\cdots\big]dt=K-C\big[2\ln t+\tfrac{1}{t}-\tfrac{3}{2}t+\tfrac{2}{9}t^2+\cdots\big].$$

3.4 Ecuaciones de Legendre, Hermite y Bessel

La ecuación de **Legendre** es [L] $\boxed{(1-t^2)x'' - 2tx' + p(p+1)x = 0}$, $p\geq 0$.

Resolvemos primero en torno a $t=0$ que es punto regular. Como $a(t)=-2t/(1-t^2)$ y $b(t)=p(p+1)/(1-t^2)$ son analíticas en $|t|<1$ la ecuación tiene series solución que convergen al menos en ese intervalo. Probamos pues:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \to \sum_{k=2}^{\infty}\big[k(k-1)c_k t^{k-2} - k(k-1)c_k t^k\big] - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)c_k t^k = 0 \to$$

$$c_k = -\frac{(p-k+2)(p+k-1)}{k(k-1)}\, c_{k-2} \ ,\ k=2,3,\ldots \ \to\ c_2=-\frac{p(p+1)}{2\cdot 1}c_0 \ ,$$

$$c_3=-\frac{(p-1)(p+2)}{3\cdot 2}c_1 \ ,\ c_4=\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}c_0 \ ,\ c_5=\frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}c_1 \ ,\ \ldots \to$$

$$x_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-2)\cdots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}\, t^{2n}$$

$$x_2 = t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}$$

Si p es un entero par positivo, $p=2m$, x_1 se reduce a un polinomio de grado $2m$:

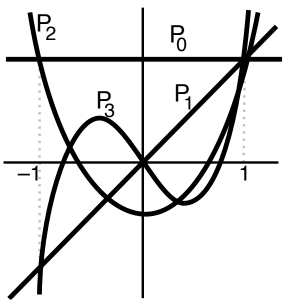
$$p=0 \to x_1=1 \ ,\ \ p=2 \to x_1=1-3t^2 \ ,\ \ p=4 \to x_1=1-10t^2+\tfrac{35}{3}t^4 \ ,\ \ldots$$

Si p impar, $p=2m+1$, es x_2 quien se convierte en un polinomio de grado $2m+1$:

$$p=1 \to x_2=t \ ,\ \ p=3 \to x_2=t-\tfrac{5}{3}t^3 \ ,\ \ p=5 \to x_2=t-\tfrac{14}{3}t^3+\tfrac{21}{5}t^5 \ ,\ \ldots$$

Se llama **polinomio de Legendre de grado** n al polinomio P_n solución de [L] con $p=n\in\mathbf{N}$, $P_n(1)=1$, es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_0=1 \ ,\ \ P_1=t \ ,\ \ P_2=\tfrac{3}{2}t^2-\tfrac{1}{2} \ ,\ \ P_3=\tfrac{5}{2}t^3-\tfrac{3}{2}t \ , \\ P_4=\tfrac{35}{8}t^4-\tfrac{15}{4}t^2+\tfrac{3}{8} \ ,\ \ P_5=\tfrac{63}{8}t^5-\tfrac{35}{4}t^3+\tfrac{15}{8}t \ ,\ \ldots \end{array}}$$



Como $P_n(-t)=(-1)^n P_n(t)$, los P_{2m} tienen simetría par y los P_{2m+1} impar. Observemos que los P_{2m+1} y las derivadas P'_{2m} se anulan en 0 . Se pueden probar además las siguientes propiedades de los P_n :

$$P_n(t)= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\,(t^2-1)^n \text{ , fórmula de } \textbf{Rodrigues}.$$

P_n tiene n ceros reales, todos en $(-1,1)$. Los P_n son **ortogonales**:

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m \, dt = 0 \ ,\ \text{si } m\neq n \quad ; \quad \int_{-1}^{1} P_n^2 \, dt = \frac{2}{2n+1}$$

Para las aplicaciones de la ecuación [L] a las EDPs se necesitará saber cuáles de sus soluciones están acotadas en $[-1,1]$. Se demuestra que, salvo constantes, **las únicas soluciones de** [L] **acotadas a la vez en** $t=1$ **y** $t=-1$ **son los polinomios de Legendre**.

Para intentar comprobar esto resolvemos la ecuación en torno a $t=1$, haciendo $s=t-1$:

$$[\mathrm{L}_1] \ \ s(s+2)x'' + 2(s+1)x' - p(p+1)x = 0$$

Para [L$_1$] es $s=0$ singular regular, y $a^*(s)=\frac{2(s+1)}{s+2}$, $b^*(s)=-\frac{p(p+1)s}{s+2}$ analíticas para $|s|<2$.

Es $r=0$ doble $\forall p$. Por tanto sus soluciones linealmente independientes son:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \ \ \text{y} \ \ x_2 = |s| \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k + x_1 \ln|s| \ ,\ \ c_0=1$$

y las series convergen al menos si $|s|<2$. Sin hallar ningún coeficiente podemos ya afirmar que x_1 siempre está acotada en $s=0$ ($t=1$), mientras que x_2 no lo está ($\to -\infty$ si $s\to 0$).

Calculemos x_1 y comprobemos que si $p=n$ obtenemos los P_n [pues $x_1(1)=1$]. Debe ser:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\big[k(k-1)c_k s^k+2k(k-1)c_k s^{k-1}\big]+\sum_{k=1}^{\infty}\big[2kc_k s^k+2kc_k s^{k-1}\big]-\sum_{k=0}^{\infty}p(p+1)c_k s^k=0$$

$$\to\ c_k=\frac{(p+1)p-k(k-1)}{2k^2}c_{k-1}\ ,\quad k=1,2,\dots\ \to$$

$$x_1(s)=1+\frac{(p+1)p}{2}s+\frac{(p+1)p[(p+1)p-2\cdot 1]}{16}s^2+\cdots+\frac{(p+1)p[(p+1)p-2\cdot 1]\cdots[(p+1)p-n(n-1)]}{2^n(n!)^2}s^n+\cdots$$

Si $p=n$ la regla de recurrencia nos dice que c_{n+1} y lo siguientes se anulan. En particular:

$$p=0\to x_1=1\ ;\ p=1\to x_1=1+s=t\ ;\ p=2\to x_1=1+3s+\frac{6[6-2]}{16}s^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\ ;\ \dots$$

Faltaría probar que si $p\neq n$ la x_1 no está acotada cuando $s\to-2$ ($t\to-1$) para comprobar que no hay más soluciones de [L] acotadas en $t=\pm1$ que los P_n.

Otra ecuación ligada a problemas físicos es la de **Hermite**: [H] $\boxed{x''-2tx'+2px=0}$.

Tiene solución analítica ($t=0$ regular), convergente en todo **R**. Resolvemos:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k\to\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k t^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_k t^k+\sum_{k=0}^{\infty}2pc_k t^k=0\to c_k=2\frac{k-2-p}{k(k-1)}c_{k-2}\ ,\quad k=2,3,\dots$$

$$\to x=c_1\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{(-p)(2-p)\cdots(2n-2-p)}{(2n)!}t^{2n}\Big]+c_2\Big[t+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{(1-p)(3-p)\cdots(2n-1-p)}{(2n+1)!}t^{2n+1}\Big]$$

Como para Legendre, [H] posee solución polinómica cuando $p=n\in N$. Si $p=2m$, la primera solución x_1 pasa a ser un polinomio de grado $2m$, y si $p=2m+1$ es la otra x_2 la que se convierte en un polinomio de ese mismo grado:

$$p=0\to x_1=1\ ;\ p=1\to x_2=t\ ;\ p=2\to x_1=1-2t^2\ ;\ p=3\to x_2=t-\frac{2}{3}t^3\ ;\ \dots$$

Los **polinomios de Hermite** $H_n(t)$ son las soluciones polinómicas de [H] tales que los términos que contienen la potencia más alta de t son de la forma $2^n t^n$, es decir:

$$\boxed{H_0=1\ ;\quad H_1=2t\ ;\quad H_2=4t^2-2\ ;\quad H_3=8t^3-12t\ ;\quad \dots}$$

Citemos, también sin prueba, algunas propiedades de los H_n que serán útiles, por ejemplo, cuando aparezcan en física cuántica. Una forma de generarlos todos es:

$e^{2ts-s^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(t)s^n$ (a esa exponencial se le llama **función generatriz** de los H_n).

[Nos limitamos a comprobarlo para los 4 que ya hemos calculado:

$$\big(1+2ts+2t^2s^2+\tfrac{4t^3}{3}s^3+\cdots\big)\big(1-s^2+\tfrac{1}{2}s^4-\cdots\big)=1+2ts+(2t^2-1)s^2+\big(\tfrac{4t^3}{3}-2t\big)s^3+\cdots\ ].$$

De la función generatriz sale otra fórmula de **Rodrigues**: $H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$.

$$\Big[\text{Pues } H_n(t)=\frac{\partial e^{2ts-s^2}}{\partial s^n}\Big|_{s=0}=e^{t^2}\frac{\partial e^{-(t-s)^2}}{\partial s^n}\Big|_{s=0}=\big(t-s=z,\ \tfrac{\partial}{\partial s}=-\tfrac{\partial}{\partial s}\big)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\Big|_{z=t}\Big].$$

En cuántica no aparece [H], sino $u''+(2p+1-t^2)u=0$. Haciendo $u=xe^{-t^2/2}$ en ella se llega a [H]. Se prueba (no es fácil hacerlo), que las **únicas soluciones** u **de la inicial que** $\to 0$ **si** $|t|\to\infty$ son las de la forma $u_n(t)=e^{-t^2/2}H_n(t)$, llamadas **funciones de Hermite** de orden n. Sólo estas u_n interesan físicamente.

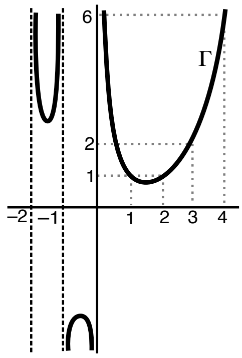
Como los P_n, se puede ver que también las u_n son **ortogonales**, ahora en $(-\infty,\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_nu_m dt=\int_{-\infty}^{\infty}H_nH_m e^{-t^2}dt=0\text{, si } m\neq n\ ;\ \int_{-\infty}^{\infty}u_n^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2e^{-t^2}dt=2^n n!\sqrt{\pi}\ .$$

[Lo comprobamos exclusivamente cuando $n=0,1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_0u_1=\int_{-\infty}^{\infty}2te^{-t^2}=0\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}u_0^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}=\sqrt{\pi}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}u_1^2=-2te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}2e^{-t^2}=2\sqrt{\pi}\ ].$$

Para expresar en forma compacta las soluciones de la última ecuación de interés físico que vamos a tratar (la de Bessel) utilizaremos las propiedades de la **función gamma** (función que generaliza el factorial para números no enteros) definida por la siguiente integral impropia convergente:



$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \text{ si } s>0\,,$$

y extendida a $s<0$ mediante:

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)\cdots(s+1)s} \text{ si } -n<s<-n+1\,,\; n\in\mathbf{N}\,.$$

Se cumplen para la Γ las siguientes igualdades:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1\,;\; \Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\,;\; \Gamma(s+1)=-e^{-x}x^s\Big|_0^\infty+s\Gamma(s)=s\Gamma(s)$$

$$\to\; \Gamma(s+n)=(s+n-1)\cdots(s+1)\,s\,\Gamma(s)\;\to\;\Gamma(n+1)=n!\,,\; n\in N$$

La ecuación de **Bessel** es: [B] $\boxed{t^2x''+tx'+t^2-p^2]x=0}$, $p\geq 0$.

$t=0$ es singular regular con polinomio indicial r^2-p^2, $r_1=p$, $r_2=-p$. Entonces

$$x_1=t^p\sum_{k=0}^\infty c_kt^k\,,\; t>0\,,\quad (\text{acotada en } t=0\;\forall p)$$

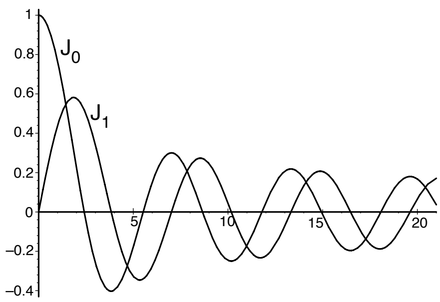
es una solución definida por una serie que converge en todo **R**. Llevándola a [B]:

$$\sum_{k=0}^\infty\big[k(2p+k)c_kt^{p+k}+c_kt^{p+k+2}\big]=0\,;\; c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}\,,\; k=2,3,\dots;\quad c_1=0\to c_3=\cdots=0$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2(p+1)}\,;\; c_4=\frac{c_0}{2^4 2(p+1)(p+2)}\,;\;\dots\to x_1=c_0\,t^p\Big[1+\sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^mt^{2m}}{2^{2m}m!(p+1)\cdots(p+m)}\Big]$$

Eligiendo $c_0=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ $\to$ $\boxed{J_p(t)\equiv\big[\tfrac{t}{2}\big]^p\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\big[\tfrac{t}{2}\big]^{2m}}$ **[función de Bessel de primera especie y orden** p **]**

En particular son: $J_0(t)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\big[\frac{t}{2}\big]^{2m}$, $J_1(t)=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\big[\frac{t}{2}\big]^{2m+1}$,



cuyas gráficas son las de la izquierda. Se prueba que, al igual que J_0 y J_1, todas las J_p son oscilatorias y que para t grande se parecen a:

$$J_p\sim\cos\big[t-(2p+1)\tfrac{\pi}{4}\big]$$

Cada J_p tiene un infinitos ceros en $(0,\infty)$ [que deben conocerse para resolver algunas EDPs]:

los de J_0 son: 2.4048, 5.5201, 8.6532, . . . ;
los de J_1 : 3.8317, 7.0156, 10.1735, ...

Para hallar una solución linealmente independiente de [B] (necesariamente no acotada en $t=0$), Frobenius nos dice que si $r_1-r_2=2p\neq 0,1,\dots$ la x_2 es de la forma:

$$x_2=t^{-p}\sum_{k=0}^\infty b_kt^k\,,\; t>0\;\Big(\text{llevándola a [B] se tiene } J_{-p}(t)\equiv\big[\tfrac{t}{2}\big]^{-p}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\big[\tfrac{t}{2}\big]^{2m}\Big).$$

Si $p\notin\mathbf{N}$, pero $2p\in\mathbf{N}$ ($p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\dots$), podría x_2 contener un $\ln t$ pero no es así (caso **c]** de Frobenius con $d=0$). De hecho, haciendo $p=\frac{1}{2}$ en $J_{\pm p}$ se tiene:

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{t}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^mt^{2m+1}}{2^{2m+1}m!(m+\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})}=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\mathrm{sen}\,t}\;,\; J_{-\frac{1}{2}}(t)=\cdots=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t}\;,$$

soluciones que son linealmente independientes (la expresión asintótica es exacta para $p=\frac{1}{2}$). Como veremos que $J_{p+1}=\frac{2p}{t}J_p-J_{p-1}$, **todas las** $J_{\frac{2n+1}{2}}$ **,** $n\in\mathbf{Z}$**, son funciones elementales** (las demás J_p no lo son).

Para $p=n\in\mathbf{N}$ el atajo anterior no sirve, pues es fácil ver que cambiando n por $-n$ la J_{-n} que aparece no es independiente de J_n [es $J_{-n}=(-1)^nJ_n$]. Tendríamos que hallar las x_2 de Frobenius (y obtendríamos un $\ln t$ en su larga expresión). Por ejemplo, para $p=0$ (que seguro contiene logaritmos) se acaba obteniendo:

$$x_2(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\Big[1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{m}\Big]\Big[\tfrac{t}{2}\Big]^{2m}+J_0(t)\ln t\equiv K_0(t)\ ,\ t>0$$

[**función de Bessel de segunda especie y orden** 0]

Pero en muchos problemas físicos en los que surge la ecuación [B] es necesario que las soluciones estén acotadas, y para ellos no servirá de nada el conocimiento de estas complicadas segundas soluciones.

Lo que sí puede ser útil en el futuro será conocer las siguientes propiedades de las derivadas de las J_p :

$$\boxed{\tfrac{d}{dt}\big[t^pJ_p(t)\big]=t^pJ_{p-1}(t)\ ,\ \tfrac{d}{dt}\big[t^{-p}J_p(t)\big]=-t^{-p}J_{p+1}(t)}\ \Big(\text{En particular, } \begin{matrix}[tJ_1]'=J_0\\ [J_0]'=-J_1\end{matrix}\Big).$$

(Son inmediatas: $\frac{d}{dt}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+2p}}{2^{2m+p}m!\Gamma(p+m+1)}=t^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1}m!\Gamma(p+m+1)}$ y similar la otra).

Derivando y despejando la J_p' en ambas:

$$J_p'=J_{p-1}-\tfrac{p}{t}J_p=-J_{p+1}+\tfrac{p}{t}J_p\ \Rightarrow\ \boxed{J_{p+1}=\tfrac{2p}{t}J_p-J_{p-1}}\ ,$$

relación de recurrencia citada, que expresa cada J_{p+1} en función de las anteriores.

3.5 El punto del infinito

Nos preocupamos por el comportamiento de las soluciones de una lineal de segundo orden para grandes valores de t. Pocas ecuaciones son resolubles elementalmente. Por otra parte, las soluciones en forma de serie (salvo que se puedan identificar con funciones elementales) no dan ninguna información para grandes t, incluso aunque converjan $\forall t$. Si queremos ver qué sucede cuando $t\to\infty$, la idea natural es efectuar el **cambio de variable** $t=1/s$ y estudiar el comportamiento de las soluciones de la nueva ecuación cuando $s\to 0^+$, que será fácil de precisar si $s=0$, llamado **punto del infinito** de la ecuación inicial, es punto regular o singular regular de esta ecuación.

A diferencia del cambio $s=t-t_o$ que no modifica las derivadas, hacer $t=1/s$ exige usar la regla de la cadena. Denotando las derivadas respecto a s con puntos:

$$t=\frac{1}{s}\to x'=\dot{x}\,\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{t^2}\,\dot{x}\ ;\ x''=\frac{1}{t^4}\,\ddot{x}+\frac{2}{t^3}\,\dot{x}\to \boxed{x'=-s^2\,\dot{x}\ ,\ \ x''=s^4\,\ddot{x}+2s^3\,\dot{x}}$$

Ej 1. $\boxed{(1+t^2)x''+tx'-x=0}$. Estudiemos su comportamiento para grandes valores de t:

$$t=\frac{1}{s}\to\ (1+\tfrac{1}{s^2})s^4\ddot{x}+(1+\tfrac{1}{s^2})2s^3\dot{x}-\tfrac{s^2}{s}\dot{x}-x=s^2(1+s^2)\ddot{x}+s(1+2s^2)\dot{x}-x=0\ .$$

Para esta ecuación $s=0$ es singular regular, con $r=\pm1$. Sus soluciones para $s>0$ son:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^{k+1}=c_0s+c_1s^2+\cdots\ ,\ c_0\neq0\ ;\ \ x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^{k-1}+dx_1\ln s\ ,\ b_0\neq0\ .$$

Si $s\to0^+$, la solución $x_1\to0$, mientras que la $x_2\to\infty$ (si $b_0>0$, sea $d=0$ ó $d\neq0$), con lo que deducimos, sin necesidad de resolver nada, que hay soluciones de la ecuación inicial que, cuando $t\to\infty$, tienden a 0, mientras que otras tienden a ∞.

Como la ecuación es resoluble elementalmente pues $x_1=t$ es solución que salta a la vista, podemos en este caso concreto hallar su solución general y comprobar:

$$x_2=t\int t^{-2}e^{-\int a\,dt}dt=t\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}=-\sqrt{1+t^2}\ \to\ x=c_1t+c_2\sqrt{1+t^2}\ .$$

Hay soluciones que claramente $\to\infty$ y las de la forma $C(t-\sqrt{1+t^2})=\frac{-C}{t+\sqrt{1+t^2}}\underset{t\to\infty}{\to}0$.

De paso observemos que $x_1=t=\frac{1}{s}$ es la x_2 que obtendríamos arriba (es $d=0$).

Para Hermite y Bessel este camino parece adecuado para estudiar sus soluciones para t gordo, pero por desgracia, se comprueba que $s=0$ en ambos casos es singular no regular. Aunque para **Legendre** lo interesante físicamente es lo que sucede en $[-1,1]$, vamos a analizar su punto del infinito. En 3.4 obtuvimos sus series solución en torno a $t=0$ [que hablan sólo de lo que ocurre en $|t|<1$] y en torno a $t=1$ [hablan de $t\in(-1,3)$].

$$[\mathrm{L}]\ (1-t^2)x''-2tx'+p(p+1)x=0\ \overset{t=1/s}{\to}\ [\mathrm{L}_\infty]\ s^2(s^2-1)+2s^3+p(p+1)x=0\ .$$

Para $[\mathrm{L}_\infty]$ es $s=0$ singular regular, con $a^*(s)=2s^2/(s^2-1)$, $b^*(s)=p(p+1)/(s^2-1)$ analíticas en $|s|<1$. Las series solución de $[\mathrm{L}_\infty]$ convergerán al menos en ese intervalo y de ellas podremos extraer información, por tanto, sobre las soluciones de [L] para $|t|>1$. Como el polinomio indicial de $[\mathrm{L}_\infty]$ tiene por raíces $1+p$ y $-p$ y como para todo $p\geq0$ es $r_1=1+p>0$ deducimos, por ejemplo, que siempre hay soluciones de [L] que tienden a 0 si $t\to\infty$.

$$\Big[\text{Pues } x_1(s)=s^{1+p}\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\to0 \text{ si } s\to0^+\text{; o sea, } x_1(t)=t^{-(1+p)}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{-k}\underset{t\to\infty}{\to}0\ \Big].$$

Resolvamos por series $[\mathrm{L}_\infty]$ si $p=0$ (único p para el que $s=0$ es regular): $x=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\to$

$$c_k=\frac{k-2}{k}c_{k-2}\ ,\ k=2,3,\ldots\to x=c_0+c_1[s+\tfrac{1}{3}s^3+\tfrac{1}{5}s^5+\cdots]=c_0+c_1[t^{-1}+\tfrac{1}{3}t^{-3}+\tfrac{1}{5}t^{-5}+\cdots]\ ,$$

serie (no de potencias) que describe las soluciones para $|t|>1$, que es donde converge.

De otra forma: $(1-t^2)x''+2tx'=0\to x'=\frac{c_1}{1-t^2}\to x=c_0+c_1\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=c_0+c_1\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|,\ t,s\neq\pm1$.