# Ecuaciones Diferenciales I (grupo D) febrero 2000

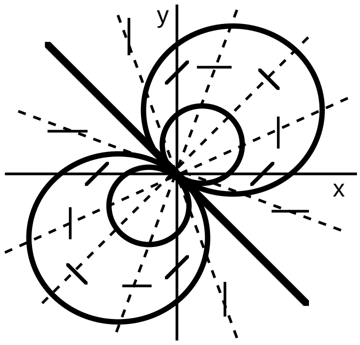
**1.** Sea $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$ . Resolverla. Dibujar sus curvas integrales.

$$z=\frac{y}{x} \to xz'+z=\frac{1+2z-z^2}{1-2z-z^2} \;;\; \int\frac{1+2z-z^2}{z^3+z^2+z+1}dz=\int\frac{dx}{x}+C \;;\; \frac{1+2z-z^2}{[z+1][z^2+1]}=\frac{A}{z+1}+\frac{Bz+C}{z^2+1} \to A=1\text{ , }B=-2\text{ , }C=0$$

$$\to \ln\frac{z+1}{z^2+1}=\ln x+C \to z+1=Cx[z^2+1] \to \boxed{y+x=C[y^2+x^2]}$$ (la ecuación **no** es exacta)

Estas curvas integrales son, para $C\neq 0$, las circunferencias que pasan por el origen y tienen su centro sobre $y=x$, además de la recta $y=-x$ (para $C=0$). El dibujo aproximado de las curvas integrales confirma lo anterior:

Como la ecuación es homogénea las isoclinas son fáciles de pintar:




$$y=mx \to K=\frac{1+2m-m^2}{1-2m-m^2}$$

$m=0 \to K=1$ , $x=0 \to K=1$ , $m=1 \to K=-1$ , $m=-1 \to K=-1$ (solución),

Pendiente horizontal si $m^2-2m-1=0 \to m=1\pm\sqrt{2}$ [ $\approx 2.4$ , $-0.4$ ]

Pendiente vertical si $m^2+2m-1=0 \to m=-1\pm\sqrt{2}$ [ $\approx 0.4$ , $-2.4$ ]

El teorema de existencia y unicidad asegura que por cualquier punto del plano distinto del origen pasa una única curva integral.

**2.** Dada la ecuación: $x'''' + ax'' + 4x = e^t$ . **a)** Hallar una solución particular para todo valor de $a$ .
**b)** Hallar su solución general para $a=-5$ y para $a=5$ .
**c)** Dar un valor de $a$ , si existe, para el que la ecuación sea i) inestable, ii) asintóticamente estable.

**a)** $x_p=Ae^t \to A[1+a+4]e^t=e^t \to x_p=\frac{e^t}{a+5}$ , si $a\neq -5$ (para $a=-5$ , $\lambda=1$ es autovalor: $1-5+4=0$ (y simple)).

Para $a=-5$ , $x_p=Ate^t \to x_p''=A[t+2]e^t$ , $x_p''''=A[t+4]e^t \to A[t-5t+4t+4-10]e^t=e^t \to x_p=-\frac{te^t}{6}$

**b)** $\lambda^4-5\lambda^2+4=0 \to \lambda^2=\frac{1}{2}[5\pm\sqrt{25-16}]=4,1 \to \lambda=2,-2,1,-1 \to x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3e^t+c_4e^{-t}-\frac{te^t}{6}$ .

$\lambda^4+5\lambda^2+4=0 \to \lambda^2=\frac{1}{2}[-5\pm\sqrt{9}]=-4,-1 \to \lambda=\pm 2i,\pm i \to x=c_1\cos 2t+c_2\operatorname{sen}2t+c_3\cos t+c_4\operatorname{sen}t+\frac{e^t}{10}$ .

**c)** Para $a=-5$ , por ejemplo, las soluciones son inestables (existen autovalores positivos).

Sabemos que para que todos los autovalores tengan parte real menor que 0 es necesario (no suficiente) que todos los coeficientes de la ecuación de autovalores sean estrictamente positivos. Como no es nuestro caso, para ningún valor de $a$ puede ser la ecuación asintóticamente estable.

[Analizando los autovalores $\lambda^2=\frac{1}{2}[-a\pm\sqrt{a^2-16}]$ según los valores de $a$ se tiene que:
si $a<-4$ hay 2 reales positivos y 2 negativos; si $a=-4$ , $\lambda=\pm\sqrt{2}$ dobles; si $-4<a<4$ hay 2 complejos con Re<0 y 2 con Re>0; si $a=4$ , $\lambda=\pm\sqrt{2}\,i$ dobles (todo inestable hasta ahora); si $a>4$ son imaginarios y simples (estabilidad, pero no asintótica) ]

**3.** Sea $2tx''+(t-2)x'+3x=0$. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que sea analítica en $t=0$. ¿Existe solución linealmente independiente de la anterior que sea analítica en $t=0$?

$$t^2x''+t\left(\tfrac{t}{2}-1\right)x'+\tfrac{3t}{2}x=0 \;\to\; t=0 \text{ es singular regular con } r(r-1)-r+0=0 \;\to\; r_1=2,\ r_2=0 .$$

Seguro que es analítica $x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2} \;\to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[2(k+2)(k+1)c_k t^{k+1}-2(k+2)c_k t^{k+1}+(k+2)c_k t^{k+2}+3c_k t^{k+2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[2(k+2)k\,c_k t^{k+1}+(k+5)c_k t^{k+2}\right]=0 .$$

$t^1$: $0c_0=0 \to c_0$ indeterminado ; $t^2$: $6c_1+5c_0=0 \to c_1=-\frac{5}{6}c_0$ ; $t^3$: $16c_2+6c_1=0 \to c_2=-\frac{3}{8}c_1=\frac{5}{16}c_0$

$$\to \boxed{x_1 = t^2-\frac{5}{6}t^3+\frac{5}{16}t^4+\cdots} \qquad \left[\to\; x_1'=2t-\frac{5}{2}t^2+\frac{5}{4}t^3+\cdots\right]$$

La segunda solución $x_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + a\,x_1 \ln t$ será analítica si $a=0$ y no lo será si $a\neq 0$. Hay que trabajar:

$$x_2'=\sum_{k=1}^{\infty} k\,b_k t^{k-1}+a\,x_1'\ln t+\frac{a}{t}x_1 \;;\; x_2''=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)b_k t^{k-2}+a\,x_1''\ln t+\frac{2a}{t}x_1'-\frac{a}{t^2}x_1 \;\to$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2k(k-1)b_k t^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[k\,b_k t^k-2k b_k t^{k-1}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}3b_k t^k + 4ax_1'-\frac{4a}{t}x_1+ax_1=0$$

$t^0$: $-2b_1+3b_0=0 \to b_1=\frac{3}{2}b_0$ ; $t^1$: $4b_2+b_1-4b_2+3b_1+8a-4a=0 \to a=-b_1=-\frac{3}{2}b_0\neq 0$

Por tanto, la segunda solución contiene el $\ln t$ y no es analítica en $t=0$.

**4.** Sea (S) $\begin{cases} x'=x(1-y) \\ y'=y-x^3 \end{cases}$ . **a)** Dibujar el mapa de fases de (S). **b)** Calcular la solución de (S) que cumple $x(0)=0$, $y(0)=1$.

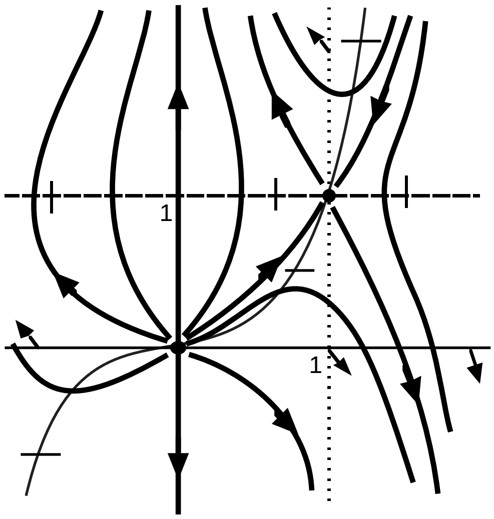
**a)** Puntos críticos $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. La aproximación lineal $\begin{pmatrix}1-y & -x\\ -3x^2 & 1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to$ nodo estelar I .

En $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix} \to \lambda^2-\lambda-3=0 \to \lambda=\frac{1}{2}[1\pm\sqrt{13}]$ [ $\approx 2.3, -1.3$ ] punto silla $\to$ $\mathbf{v}\approx\begin{pmatrix}1\\-2.3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1.3\end{pmatrix}$.

Ecuación de las órbitas no resoluble.

Pendiente horizontal si $y=x^3$. Vertical si $x=0$ (órbita) o si $y=1$.

$\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}x\\-x^3\end{pmatrix}$ ; $\mathbf{v}(1,y)=\begin{pmatrix}1-y\\y-1\end{pmatrix}=(y-1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ; $\mathbf{v}(x,x)=x(1-x)\begin{pmatrix}1\\1+x\end{pmatrix}$




**b)** Por $x=0$, $y=1$ pasa la órbita $x=0$. La solución viene dada por:

$\begin{cases} x'=0 \\ y'=y \end{cases} \to y=Ce^t$. Imponiendo $y(0)=1$ se tiene $y=e^t$.

La solución pedida del sistema es, pues, $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}$.

## Ecuaciones Diferenciales I (grupo D) septiembre 2000

**1.** Sea (E) $\frac{dy}{dt}=\sqrt{y+\frac{t^2}{2}}$ . **a)** Resolver (E) utilizando el cambio de variable $u(t)=\sqrt{y(t)+\frac{t^2}{2}}$ .
**b)** Dibujar aproximadamente las soluciones de (E) .

El cambio propuesto lleva a $u'=\frac{1}{2\sqrt{\ }}[y'+t]=\frac{u+t}{2u}$ , ecuación homogénea, que con $z=\frac{u}{t}$ se convierte en:

$$tz'=\frac{z+1}{2z}-z=-\frac{2z^2-z-1}{2z}\ ,\ \int\frac{2z\,dz}{[z-1][2z+1]}=-\int\frac{dt}{t}+C\ ;\ \frac{2z\,dz}{[z-1][2z+1]}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{2z+1}\ \to\ A=B=\frac{2}{3}\ \to$$

$$\ln\left([z-1]^2[2z+1]\right)=-3\ln t+C\ \to\ [z-1]^2[2z+1]=Ct^{-3}\ \to\ [u-t]^2[2u+t]=C\to\ \mathbf{[\sqrt{\ }-t)]^2[2\sqrt{\ }+t]=C}$$

Ecuación no definida si $y<\frac{1}{2}t^2$ .

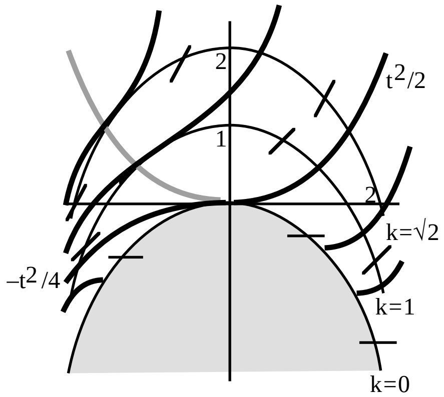
Isoclinas: $y'=k$ ($\geq 0$, soluciones crecientes) $\to\ y=k^2-\frac{1}{2}t^2$ .

Inflexión: $y''=\frac{1}{2\sqrt{\ }}[y'+t]=\frac{1}{2\sqrt{\ }}[\sqrt{\ }+t]=0\ \to y=\frac{1}{2}t^2$ , para $t\leq 0$

[si $t\geq 0$ el corchete no se anula; elevando al cuadrado incluimos $-\sqrt{\ }+t=0$ ]

De la solución general, para C=0 se obtiene algo sencillo:

$\sqrt{\ }-t=0\ \to y=\frac{1}{2}t^2$ , si $t\geq 0$ ; $2\sqrt{\ }+t=0\ \to y=-\frac{1}{4}t^2$ , si $t\leq 0$ .




**2.** Hallar la solución del sistema $\begin{cases} x'=2x+y+z \\ y'=x+2y+z \\ z'=x+y+2z \end{cases}$ que satisface $x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=-3$ .

Matrices: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-[\lambda^3-6\lambda^3+9\lambda-4]=-[\lambda-1]^2[\lambda-4]=0\ \to\ \lambda=1$ doble $\to\ \begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

$\lambda=4\ \to\ \begin{pmatrix} -2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ; $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{P^{-1}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{e^{Jt}}=\begin{pmatrix} e^t&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{4t} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x}=\mathbf{Pe^{Jt}P^{-1}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{Pe^{Jt}}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}-2e^t\\3e^t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t\\2e^t\\-3e^t\end{pmatrix}$$

Laplace: $\begin{cases} sX-1=2X+Y+Z & \to\ Z=(s-2)X-Y-1\downarrow \\ sY-2=X+2Y+Z & Y=X+1/(s-1)\downarrow \\ sY+3=X+Y+2Z & [s^2-5s+4]X=s-4 \end{cases}\ \to\ X=\frac{1}{s-1}\ [x=e^t]\ \to\ Y=\frac{2}{s-1}\ [y=2e^t]$

$$\to\ Z=\frac{s-2-2-s+1}{s-1}=\frac{-3}{s-1}\ [z=-3e^t;\text{ o bien } z=x'-2x-y=-3e^t]$$

Derivando. Lo más corto, con un poco de vista: $[x+y+z]'=4[x+y+z]$ , $[x+y+z](0)=1+2-3=0\ \to\ x+y+z=0$

$$z=-x-y\ \to\ \begin{cases} x'=x\ ,\ x(0)=1\ \to\ x=e^t \\ y'=y\ ,\ y(0)=2\ \to\ y=2e^t \end{cases}$$

Con menos vista: $x'=2x'+y'+z'=2x'+2x+3[y+z]=5x'+4x\ \to\ x=c_1e^t+c_2e^{4t}\ \xrightarrow[x'(0)=2+2-3]{x(0)=1}\ x=e^t$

$\to\ z=-y-e^t\ \to\ y'=e^t+2y-y-e^t=y\ \to\ y=ce^t\ \xrightarrow{y(0)=2}\ y=2e^t\ \to\ z=-3e^t$

**3.** **a)** Hallar todos los valores de $\alpha$ para los que la solución analítica en $t=0$ de $t(1-t)x''+(1-2t)x'+\alpha x=0$ es un polinomio. **b)** Calcular para $\alpha=20$ una solución acotada en $t=0$ .

$t=0$ singular regular $\left(t^2x''+t\frac{1-2t}{1-t}x'+\frac{\alpha t}{1-t}x=0\right)$ ; $r=0$ doble $\to$ $x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ analítca (la otra seguro con logaritmo)

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kt^{k-1}-k(k-1)c_kt^k]+\sum_{k=1}^{\infty}[k\,c_kt^{k-1}-2k\,c_kt^k]+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha c_kt^k\;=0$$

$$t^0:\; c_1+\alpha c_0=0\;\to\; c_1=-\alpha c_0 \quad ; \quad t^1:\; 2c_2+2c_2-2c_1+\alpha c_1=0\;\to\; c_2=\frac{2-\alpha}{4}\,c_1=\frac{\alpha[\alpha-2]}{2}\,c_0\,,\dots$$

$$t^k:\; [(k+1)k+(k+1)]c_{k+1}-[k(k-1)+2k-\alpha]c_k=0\;\to\; c_{k+1}=\frac{k(k+1)-\alpha}{(k+1)^2}\,c_k\;,\; k=0,1,\dots$$

Si $\alpha$**=n(n+1)** , $n=0,1,\dots$ el $c_{n+1}$ se anulará (y también los siguientes, pero los anteriores no) y la $x_1$ será un polinomio de grado $n$ ; si $\alpha$ no es de esa forma todos los $c_k$ serán no nulos y la serie tendrá infinitos términos.

Esto ocurre, por ejemplo, para $\alpha$**=20** . En ese caso será:

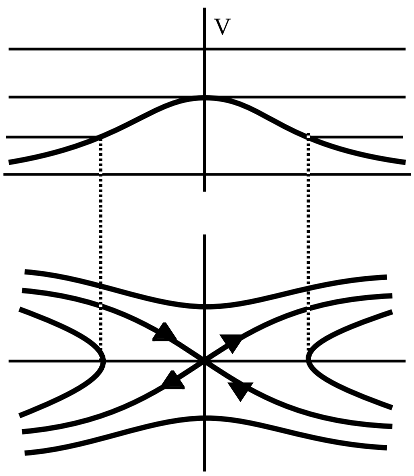
$$c_1=-20c_0\;;\; c_2=\frac{-18}{4}c_1=90c_0\;;\; c_3=\frac{-14}{9}c_2=-140c_0\;;\; c_4=\frac{-8}{16}c_3=-70c_0\;;\; c_5=\frac{0}{25}c_4=0=c_6=\dots$$

$$\to\quad \mathbf{x_1=1-20t+90t^2-140t^3+70t^4}$$

**4.** **a)** Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases de las ecuaciones: (i) $x''=xe^{-x^2}$ , (ii) $x''=-xe^{-x^2}$ .
**b)** Precisar en cada caso si es periódica la solución que verifica $x(1)=0$ , $x'(1)=2$ .

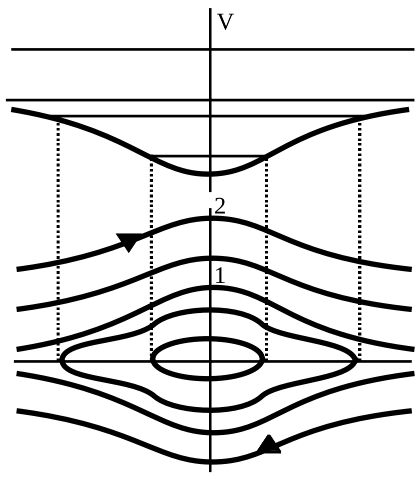
Como son ecuaciones exactas $x''=g(x)$ , sus órbitas son fácilmente calculables: $\frac{v^2}{2}-\int g(x)dx=C$ ,
y un dibujo aproximado del mapa de fases se obtiene rápidamente de la gráfica potencial $V(x)=-\int g(x)$ .

$$g(x)=\pm xe^{-x^2}\;\to\; V(x)=\pm\frac{1}{2}e^{-x^2}\;\to\; \text{órbitas: } v=\pm\sqrt{2C\mp e^{-x^2}}$$




Para (i) hay sólo una silla y las separatrices son $v=\pm\sqrt{1\mp e^{-x^2}}$ (tienden a $\pm1$ en $\pm\infty$ ).
Ninguna solución es periódica.

Para (ii) hay un centro, pero sólo si $C<0$ la solución es periódica (si $C\geq0$ la órbita no corta el eje $x$ ).
Las primeras órbitas abiertas son $v=\pm e^{-x^2/2}$ (que pasan por $\pm1$ ).
La órbita que pasa por $x=0$, $v=2$ es abierta y no corresponde a ninguna solución periódica (la $x(t)$ se va a $+\infty$ ).




(Sin acordarse de las ecuaciones exactas: $\begin{cases} x'=v \\ v'=\pm x\,e^{-x^2}\end{cases}\;\to\;\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\;\to\;\begin{pmatrix}0&1\\\pm1&0\end{pmatrix}\;\to$
silla para + [ $\lambda=\pm1$ , con $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\\pm1\end{pmatrix}$ ] , centro para – [ $\lambda=\pm i$ y el sistema es exacto; $0+0\equiv0$ ] ;
órbitas: $\frac{dv}{dx}=\frac{\pm xe^{-x^2}}{v}\;\to\; v^2\pm e^{-x^2}=2C$ , como antes).

# Ecuaciones Diferenciales I (grupo B) febrero 2001

**1.** Sea $t\frac{dy}{dt}=(1-t)y+t^2$. Resolverla. Discutir según los valores de $a$ cuántas soluciones cumplen $y(a)=0$. Localizar los puntos del plano en los que $y''=0$.

$$y'=\left(\frac{1}{t}-1\right)y+t \text{ es lineal: } e^{\int(1/t-1)dt}=te^{-t}, \quad y=Cte^{-t}+te^{-t}\int t^{-1}e^{t}\,t\,dt=Cte^{-t}+t .$$

El teorema de existencia y unicidad (el general o el de las lineales) garantiza que si $a\neq 0$ hay una única solución con $y(a)=0$ (pues $f,f_y$ son continuas en un entorno de $(a,0)$ o porque $a(t)=1/t-1$, $f(t)=t$ lo son si $t\neq 0$)

[Imponiendo el dato se tiene $C=e^{a}$ $\to$ $y=te^{a-t}+t$ $(*)$ ].

Si $a=0$, las hipótesis del teorema fallan con lo que podría no haber solución o haber más de una. A la vista de las soluciones está claro que todas las soluciones cumplen $y(0)=0$ [no sólo la $y=te^{-t}+t$ que sale haciendo $a=0$ en $(*)$].

$$y''=-\frac{1}{t^2}y+\left(\frac{1}{t}-1\right)\left[\left(\frac{1}{t}-1\right)y+t\right]+1=\left[-\frac{2}{t}+1\right]y+2-t=\frac{(t-2)(y-t)}{t}=0 \text{ si } \begin{array}{l} t=2,\ \text{inflexión} \\ y=t,\ \text{solución recta} \end{array} .$$

**2.** Sea [L] $\begin{cases} x'=z-t^2 \\ y'=-2cy-w \\ z'=-x+cy \\ w'=y+cz \end{cases}$.

**a)** Hallar para **c=0** la solución de [L] con $x(0)=1$, $y(0)=0$, $z(0)=-2$, $w(0)=0$.
**b)** Hallar **una** solución del sistema **homogéneo** para **c=–2**.
**c)** Determinar, si existe, un valor de $c$ para el [L] sea: i) inestable, ii) asintóticamente estable.

**a)** Para $c=0$ el sistema se desacopla en dos sistemas de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y'=-w \\ w'=y \\ y(0)=w(0)=0 \end{cases} \to y=w=0 \text{ (evidente)}, \text{ y } \begin{cases} x'=z-t^2 \\ z'=-x \\ x(0)=0,z(0)=-2 \end{cases} \to \begin{cases} x''+x=-2t \\ x(0)=1,x'(0)=-2 \end{cases} \xrightarrow{} x_p=At+B$$

$$x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t-2t \underset{\text{datos}}{\to} x=\cos t-2t \to z=x'+t^2=t^2-2-\operatorname{sen} t .$$

O por Laplace:
$$\begin{cases} sX-1=Z-2/s^3 \\ sZ+2=-X \\ sY=-W \\ sW=Y \end{cases} \to \begin{cases} -s^2Z-2s-1=z-2/s^3 \\ [s^2+1]Y=0 \to Y=0=W \end{cases};\ Z=\frac{2-s^3-2s^4}{s^3[s^2+1]}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{DS+E}{s^2+1} \to \begin{cases} A+D=-2 \\ B+E=-1 \\ A+C=0 \\ B=0 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\to Z=\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2+1} \to z=t^2-2-\operatorname{sen} t \to x=-z'=\cos t-2t .$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&-2c&0&-1 \\ -1&c&0&0 \\ 0&1&c&0 \end{pmatrix};\ \begin{vmatrix} -\lambda&0&1&0 \\ 0&-2c-\lambda&0&-1 \\ -1&c&-\lambda&0 \\ 0&1&c&-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix} -2c-\lambda&0&-1 \\ c&-\lambda&0 \\ 1&c&-\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0&-2c-\lambda&-1 \\ -1&c&0 \\ 0&1&-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^4+2c\lambda^3+2\lambda^2+c(c+2)\lambda+1$$

**b)** Si $c=-2$ es $\lambda=1$ raíz de $\lambda^4-4\lambda^3+2\lambda^2+1$ (única calculable) $\to \begin{pmatrix} -1&0&1&0 \\ 0&3&0&-1 \\ -1&-2&-1&0 \\ 0&1&-2&-1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{cases} v_3=v_1 \\ v_4=3v_2 \\ v_1+2v_2+v_3=0 \end{cases} \to \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}e^{t}$

**c)** Si $c<0$ se sabe que hay autovalores positivos (para $c=-2$ hallamos uno) y el sistema es inestable.
Para que pueda ser asintóticamente estable debe ser $c>0$, pero no basta. Necesitamos Routh-Hurwitz:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2c&1&0&0 \\ c(c+2)&2&2c&1 \\ 0&1&c(c+2)&2 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \to c>0,\ c\begin{vmatrix} 2&1 \\ c+2&2 \end{vmatrix}=c(2-c)>0,\ c^2\begin{vmatrix} 2&1&0 \\ c+2&2&2 \\ 0&1&c+2 \end{vmatrix}=-c^4>0 \text{ imposible. Nunca es AE.}$$

**3.** Sea $tx''-x'+4t^3x=0$ . **a)** Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial que se anule en $t=0$ e identificarla con una función elemental. **b)** Hallar la solución general de la ecuación [un posible camino es hacer el cambio de variable independiente de la forma $s=t^n$ que sugiere la solución calculada en **a)** ].

**a)** $t^2x''+t(-1)x'+4t^4x=0 \;\to\;$ $t=0$ es singular regular con $r(r-1)-r+0=0 \;\to\; r_1=2$ , $r_2=0$ . Se anula en $t=0$ :

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2} \;\to\; \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_kt^{k+1}-(k+2)c_kt^{k+1}+4c_kt^{k+5}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)kc_kt^{k+1}+4c_kt^{k+5}\right]=0\,.$$

$t^1$: $0c_0=0 \to c_0$ indeterminado ; $t^2$: $c_1=0$ ; $t^3$: $c_2=0$ ; $t^4$: $c_3=0$ ; $t^5$: $24c_4+4c_0=0 \to c_4=\frac{1}{3\cdot 2}\,c_0$ ;

$t^{k+1}$: $(k+2)kc_k+4c_{k-4}=0 \to c_k=-\frac{4}{(k+2)k}\,c_{k-4} \Rightarrow c_{4m+1}=c_{4m+2}=c_{4m+3}=0$ , $c_{4m}=-\frac{1}{(2m+1)m}\,c_{4m-4}$

$$c_8=-\frac{1}{5\cdot 4}\,c_4=\frac{1}{5!}\,c_0\;,\;\dots,\;c_{4m}=(-1)^m\frac{1}{(2m+1)m}\,\frac{1}{(2m-1)(2m-2)}\cdots c_0=\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\,c_0$$

$$\to\; x_1=t^2-\frac{1}{6}\,t^6+\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\,t^{4m+2}+\cdots=\operatorname{sen}t^2$$

**b)** Hallar la segunda solución $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+a\,x_1\ln t$ por series sería largo. La solución anterior sugiere hacer

$$s=t^2:\;\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}2t\,;\;\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{ds^2}4t^2+\frac{dx}{ds}2 \;\to\; 4t^3\left[\frac{d^2x}{ds^2}+x\right]=0 \;\to\; x=c_1\cos s+c_2\operatorname{sen}s=c_1\cos t^2+c_2\operatorname{sen}t^2\,.$$

O se puede hacer por la fórmula obtenida por reducción de orden: $x_2=\operatorname{sen}t^2\int\frac{e^{\int 1/t}}{\operatorname{sen}^2t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\cos t^2$ ,

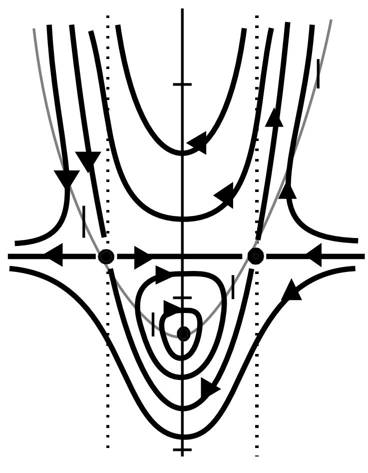
pues $\int\frac{t}{\operatorname{sen}^2t^2}\,dt=(\,u=t^2\,)=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\operatorname{sen}^2u}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\tan^2u}\,\frac{du}{\cos^2u}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\tan u}=-\frac{1}{2}\,\frac{\cos t^2}{\operatorname{sen}t^2}$ .

**4.** Sea $\begin{cases} x'=1+y-x^2 \\ y'=2xy \end{cases}$ . Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.
Precisar para qué valores de $b$ es periódica la solución del sistema con $x(0)=0$ , $y(0)=b$ .

$f_x+g_y\equiv 0$ . Exacto. $\begin{matrix}H_x=-2xy\\ H_y=1+y-x^2\end{matrix} \;\to\; y+\frac{1}{2}\,y^2-yx^2=C$ son sus órbitas.

Puntos críticos $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ . La aproximación lineal $\begin{pmatrix}-2x & 1\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$\to$ centro (tambiéndel no lineal, por ser exacto o por ser las órbitas simétricas).



En $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \to \lambda=-2\,,\,2$ silla , $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ .

En $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix} \to \lambda=2\,,\,-2$ silla , $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ .

Pendiente horizontal si $y=0$ (órbita) o si $x=0$ . Vertical si $y=x^2-1$ .

$\mathbf{v}(1,y)=y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ; $\mathbf{v}(-1,y)=y\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ ; $\mathbf{v}(x,-1)=\begin{pmatrix}-x^2\\-2x\end{pmatrix}$

Las separatrices se obtienen para $C=0 \to y=0$ , $y=2x^2-2$ .

Son cerradas todas las órbitas encerradas por las separatrices
(viendo el campo o analizando $x^2=1+\frac{y}{2}-\frac{C}{y}$ )
y por tanto son periódicas las soluciones para $-2<y'(0)=b<2$ .

## Ecuaciones Diferenciales I (grupo B) septiembre 2001

**1.** **a)** Resolver la ecuación de Bernouilli: [B] $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{t}\left[y - y^{2/3}\right]$.
**b)** Precisar cuántas soluciones de [B] satisfacen: i) $y(-1)=1$ ; ii) $y(0)=1$ ; iii) $y(1)=0$ .

**a)** $\frac{1}{3}\, y^{-2/3} y' = \frac{y^{1/3}}{t} - \frac{1}{t} \xrightarrow{z=y^{1/3}} z' = \frac{z-1}{t} \to z = 1 + Ct \to \boxed{y = (1+Ct)^3}$

[También se podría resolver mirándola como separable: $3\ln|t| + C = \int \frac{dy}{y - y^{2/3}} \xrightarrow{z=y^{1/3}} \int \frac{3z^2 dz}{z^3 - z^2} = 3\ln|z-1| \ldots$ ]

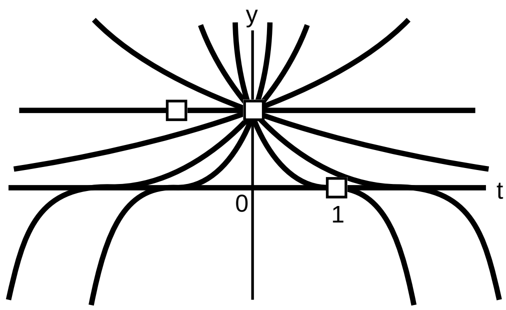
**b)** Como $f$ es continua en $\mathbf{R}^2 - \{t=0\}$ , existe solución para cada dato inicial $y(t_o)=y_o$ , cuando $t_o \neq 0$ .
La $f_y = \frac{3}{t}\left[1 - \frac{2}{3}\, y^{-1/3}\right]$ no es continua en $y=0$ . Si $t_o, y_o \neq 0$ seguro que el problema tiene una única solución.
Si $t_o=0$ los teoremas no dicen nada sobre si hay solución o no. Si $t_o \neq 0$ , $y_o=0$ podría no ser única.

Para i) el teorema de existencia y unicidad asegura que hay solución única (haciendo $y(-1)=1$ se tiene $y \equiv 1$ ).
Imponiendo $y(0)=1$ vemos que se cumple para cualquier $C$ . Hay infinitas soluciones en el caso ii) .

Si hacemos $y(1)=0 \to 0 = (1+C)^3 \to C=-1 \to y = (1-t)^3$ es solución con ese dato. Pero podría haber más.

Miramos la ecuación y la resolución por si se ha perdido alguna. Está claro que $y \equiv 0$ es otra que cumple $y(1)=0$ . No hay unicidad en el caso iii) .

[de hecho, como todas las soluciones $y = (1+Ct)^3$ son parábolas cúbicas con tangente horizontal al pasar por el eje $y=0$ , iii) no lo satisfacen sólo las dos soluciones ya citadas, sino las infinitas obtenidas tomando un trozo de la recta $y=0$ desde $t=1$ hasta cualquier punto $t_o$ y bajando después por la parábola que pasa por ese punto]




**2.** Sea [L] $x''' + ax'' + 3x' + 9x = e^t$ . **a)** Para **a=–5** hallar la solución general de [L] .
**b)** Discutir la estabilidad de [L] según los valores de la constante $a$ .

**a)** $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0 \to \lambda=-1$ , $\lambda=3$ doble . $x_p = Ae^t \to A = \frac{1}{8}$ . La solución general es, pues:

$$\boxed{x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t} + \frac{1}{8} e^t} \, .$$

**b)** $\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + 9 = 0$ . Si $a<0$ sabemos que es inestable porque hay un coeficiente negativo. Pero para $a>0$ , como la ecuación de autovalores no es resoluble en general, debemos acudir a Routh-Hurvitz:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 9 & 3 & a \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to a>0 , \begin{vmatrix} a & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3a-9>0 , \ 9>0 .$$ [L] es **asintóticamente estable si a>3** .

Veamos para qué valores de $a$ pueden existir autovalores $\lambda$ con $\text{Re}\lambda = 0$ :

$$\lambda = qi \to i(3-q^2)q + 9 - aq^2 = 0 \to \text{ sólo cuando } a=3 \text{ (entonces } \lambda = \pm i\sqrt{3} \text{ y } \lambda=-3 \text{)}.$$

Por tanto, **si a=3 es estable no asintóticamente**. Y **para a<3 , es inestable**, pues por R-H sabemos que hay autovalores con $\text{Re}\lambda \geq 0$ y acabamos de comprobar que no los hay con $\text{Re}\lambda = 0$ .

**3.** Sea $2t^2x'' + t(t+1)x' - (2t+1)x = 0$. Hallar una solución no nula que sea analítica en $t=0$.
¿Están acotadas todas las soluciones de la ecuación cuando $t\to 0$ ?

$$t^2x'' + t\,\frac{t+1}{2}\,x' - \frac{2t+1}{2}\,x = 0 \;\to\; t=0 \text{ es singular regular con } r(r-1)+\frac{r}{2}-\frac{1}{2}=0 \;\to\; r_1=1\,,\; r_2=-\frac{1}{2}\,.$$

Es analítica en $t=0$ la solución asociada a la $r_1$: $x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1}$ .

La asociada a $r_2$ $\left(x_2=t^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\right)$ no es analítica (ni está acotada en $t=0$ , lo que responde a la pregunta).

Probando la $x_1$: $\sum_{k=1}^{\infty} 2(k+1)kc_kt^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)c_kt^{k+2} + (k+1)c_kt^{k+1} - 2c_kt^{k+2} - c_kt^{k+1}\right] = 0$ .

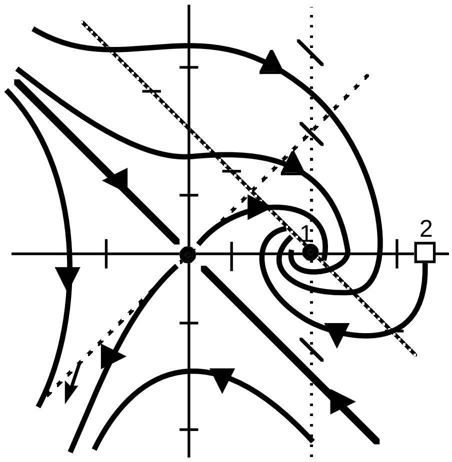
$t^1$: $0c_0=0 \to c_0$ indeterminado ; $t^2$: $4c_1+c_0+2c_1-2c_0-2c_1=0 \to c_1=\frac{1}{5}\,c_0$ ;

$t^{k+1}$: $\left[2(k+1)k+(k+1)-1\right]c_k+\left[k-2\right]c_{k-1}=0 \to c_k=-\frac{k-2}{(2k+3)k}\,c_{k-1} \Rightarrow c_2=0 \Rightarrow c_3=c_4=\ldots=0$ .

Por tanto, una solución analítica en $t=0$ es $\boxed{x = t + \frac{1}{5}t^2}$ (o mútliplicada por cualquier constante).

**4.** Sea (E) $x''=x-x^2-xx'$. Clasificar los puntos críticos y dibujar el mapa de fases de (E).
¿Hacia qué tiende la solución $x(t)$ de (E) con $x(1)=2$ , $x'(1)=0$ cuando $t\to\infty$ ?

$\begin{cases} x'=v \\ v'=x-x^2-xv \end{cases}$ . Ecuación de las órbitas $\frac{dv}{dx}=\frac{x-x^2}{v}-x$ no resoluble.




Puntos críticos $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ . Aproximación lineal: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-2x-v & -x\end{pmatrix}$ .

La apr. lineal en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ , $\lambda=\pm1$ , silla , $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ \pm1\end{pmatrix}$ .

En $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ , $\lambda=\frac{1}{2}\left[-1\pm i\sqrt{3}\right]$ , foco estable.

Pendiente horizontal si $x=0$ o si $v=1-x$ . Vertical si $v=0$ .

$\mathbf{v}(x,x)=\begin{pmatrix}x\\ x-2x^2\end{pmatrix}$ ; $\mathbf{v}(x,-x)=\begin{pmatrix}-x\\ x\end{pmatrix}$ (órbita recta); $\mathbf{v}(1,v)=\begin{pmatrix}v\\ -v\end{pmatrix}$

La órbita que pasa por el punto $(2,0)$ , que no puede tocar la separatriz $v=-x$ , necesariamente se acerca en espiral hacia el foco estable. Por tanto, la $x(t)$ de la solución asociada tiende a $1$ si $t\to\infty$ .

# Ecuaciones Diferenciales I (grupo B) — soluciones febrero 2002

**1.** Sea $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+2xy}{x^2+2y^2}$. **a)** Probar que tiene un factor integrante que sólo depende de $y$. **b)** Encontrar todas las soluciones de la ecuación que sean rectas. **c)** Hallar la o las soluciones (si existen) que satisfacen i) $y(1)=0$, ii) $y(1)=1$.

**a)** $(y^2+2xy)f(y)-(x^2+2y^2)f(y)\frac{dy}{dx}=0$ exacta si $-2x\,f(y)=(2y+2x)f(y)+y(y+2x)f'(y)$ ; $f'(y)=\frac{-2}{y}f(y)\ \to\ f(y)=\frac{1}{y^2}$.

$$\Big(1+\frac{2x}{y}\Big)-\Big(\frac{x^2}{y^2}+2\Big)\frac{dy}{dx}=0 \text{ exacta } \Rightarrow \begin{array}{l} H=x+\frac{x^2}{y}+p(y)\\ H=2y+\frac{x^2}{y}+q(x)\end{array} \Rightarrow H=\boxed{x^2+xy-2y^2=Cy} \text{ solución general.}$$

También se puede hallar esta solución mirándola como ecuación homogénea:

$$z=\frac{y}{x}\ \to\ xz'=\frac{z^2+2z}{1+2z^2}-z\ \to\ \int\frac{(2z^2+1)dz}{z(2z^2-z-1)}=\int\Big(\frac{2}{2z+1}+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\Big)dz=\ln\frac{(2z+1)(z-1)}{z}=C-\ln x\ \to\ \frac{(2y+x)(y-x)}{y}=C$$

**b)** Basándonos en la solución general: sólo proporciona rectas si $C=0\ \to\ 2y^2-xy-x^2=(2y+x)(y-x)=0\ \to$

$\boxed{y=x\ ,\ y=-\frac{x}{2}}$ , pero además está la $\boxed{y=0}$ perdida en el cálculo (las demás soluciones son hipérbolas).

Al ser homogénea (con isoclinas rectas) podíamos buscar las rectas solución directamente:

$$f(x,mx)=\frac{m^2+2m}{1+2m^2}=m\ \to\ 2m^3-m^2-m=0\ ,\ m=0,1,-\frac{1}{2}\ \to y=0\,,\,x\,,\,-\frac{x}{2}\ \text{ soluciones.}$$

**c)** Como en un entorno de $(1,0)$ y $(1,1)$ son continuas $f$ y $f_y$, tanto para i) como para ii) hay solución única; son, respectivamente, las rectas $y=0$ e $y=x$ ya halladas (sólo hay dudas de existencia y unicidad en el origen).

(si uno se fía sólo de las soluciones podría pensar que para i) : $1=0$ !? imposible? no hay solución?
y para ii) : $0=C$ que da las rectas $y=x$ e $y=-x/2$, pero sólo la primera de ellas cumple el dato)

**2.** Sea $\begin{cases} x'=x-4y+2z\\ y'=x-3y+z\\ z'=x-2y+1\end{cases}$. Hallar la solución del sistema que satisface $x(0)=2$, $y(0)=z(0)=1$, y determinar la estabilidad de esta solución.

Matrices: $$\begin{vmatrix}1-\lambda & -4 & 2\\ 1 & -3-\lambda & 1\\ 1 & -2 & 0-\lambda\end{vmatrix}=-[\lambda+1]^2\lambda=0\ \to\ \lambda=-1 \text{ doble } \to \begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ \ \lambda=0\to\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix},\ |\mathbf{P}|=1,\ \mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&3&-1\\-1&-2&1\end{pmatrix},\ \mathbf{e}^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{e}^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\mathbf{P}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}ds=\mathbf{P}\mathbf{e}^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix}0\\-e^{-t+s}\\1\end{pmatrix}ds=\mathbf{P}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\mathbf{P}\begin{pmatrix}0\\e^{-t}-1\\t\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2e^{-t}+2t\\e^{-t}+t\\1+t\end{pmatrix}}$$

Laplace: $$\begin{cases} sX-2=X-4Y+2Z\\ sY-1=X-3Y+Z\ \to\ X=(s+3)Y-Z-1\\ sZ-1=X-2Y+1/s\end{cases}\qquad \begin{array}{c}(s+1)^2\,Y=(s+1)Z+s+1\\ \uparrow\downarrow\\ (s+1)Z=(s+1)Y+1/s\end{array}\ \to\ s(s+1)Y=s+1+\frac{1}{s}\ \to$$

$$Y=\frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}\ \to\ \boxed{y=t+e^{-t}}\ ;\ Z=Y+\frac{1}{s(s+1)}=\frac{s^2+2s+1}{s^2(s+1)}=\frac{s+1}{s^2}\ \to\ \boxed{z=1+t}\ ;$$

$$X=\frac{(s+3)(s^2+s+1)}{s^2(s+1)}-\frac{s+1}{s^2}-1=2\frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)}\ \to\ \boxed{x=2t+2e^{-t}}$$

Derivando: $z''=x-4y+2z-2x+6y-2z=2y-x=1-z'\ \to\ z=c_1+c_2e^{-t}+t\ \xrightarrow{z(0)=z'(0)=1,z''(0)=0}\ z=t+1$

$\to\ x=2y\ \to\ y'=-y+t+1\ \xrightarrow{y_p=At+B}\ y=c_1e^{-t}+t\ \xrightarrow{y(0)=1}\ y=e^{t}+t\ \to\ x=2t+2e^{-t}$.

Como un autovalor simple tiene parte real cero y los otros dos son negativos, todas las soluciones del sistema (y ésta en particular) son **estables no asintóticamente**.

(Que aparezca las $t$ en la solución no tiene nada que ver, provienen de la solución particular de la no homogénea).

**3.** Sea $tx''+[1-t^2]x'+ptx=0$. Precisar, resolviendo por series en torno a $t=0$, todos los valores de la constante $p$ para los que hay soluciones polinómicas y escribir uno de estos polinomios para $\mathbf{p=4}$.

$t=0$ singular regular $\left(t^2x''+t[1-t^2]x'+pt^2x=0\right)$; $r=0$ doble $\rightarrow$

$x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ es la única solución que puede ser un polinomio (la otra contiene un logaritmo seguro)

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}[k\,c_k t^{k-1} - k c_k t^{k+1}] + \sum_{k=0}^{\infty} p c_k t^{k+1} = 0$$

$$t^0:\ c_1=0\ ;\quad t^1:\ 2c_2+2c_2+pc_0=0 \rightarrow c_2=-\frac{p}{4}c_0\ ;\quad t^2:\ 6c_3+3c_2-c_1+pc_1=0 \rightarrow c_3=0\ ;$$

$$t^3:\ 12c_4+4c_4-2c_2+pc_2=0 \rightarrow c_4=-\frac{p-2}{16}c_2=\frac{p(p-2)}{4^2 2^2}c_0\ ;$$

$$t^{k-1}:\ k^2c_k-[k-2-p]c_{k-2}=0 \rightarrow c_k=-\frac{p-k+2}{k^2}c_{k-2}\ ,\ k=2,3,\ldots \Rightarrow$$

$$c_5=c_7=\ldots=0 \quad \text{y} \quad c_{2m+2}=-\frac{p-2m}{(2m+2)^2}c_{2m}\ .$$

Si **p=2n**, $n=0,1,\ldots$ el $c_{2n+2}$ y los siguientes pares se anularán (los anteriores no) y la $x_1$ será un polinomio de grado $2n$; si $p$ no es de esa forma todos los $c_{2m}$ serán no nulos y la serie tendrá infinitos términos.

Esto ocurre, por ejemplo, para $\mathbf{p=4}$. En este caso:

$$c_2=-c_0\ ;\quad c_4=\frac{4\cdot 2}{4^2 2^2}c_0=\frac{1}{8}c_0\quad \left(c_6=\frac{4-4}{36}c_4 \text{ ya es nulo}\right) \rightarrow \boxed{x_1=1-t^2+\frac{1}{8}t^4}$$

**4.** Sea (E) $x''=(ax-x')(2+x')$. **a)** Clasificar según los valores de $a$ los puntos críticos elementales de (E). **b)** Para **a=3/2**, dibujar el mapa de fases de (E) y hallar la solución $x(t)$ de (E) con $x(1)=0$, $x'(1)=-2$.

**a)** $\begin{cases} x'=v \\ v'=(ax-v)(2+v) \end{cases}$. Único punto crítico el $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (si $a\neq 0$) con aproximación lineal: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2a & -2\end{pmatrix}$.

$\lambda^2+2\lambda-2a=0 \rightarrow \lambda=-1\pm\sqrt{1+2a} \Rightarrow a>0$ silla; $-1/2<a<0$ nodo 2tg E; $a=-1/2$ nodo 1tg E; $a<-1/2$ foco E.

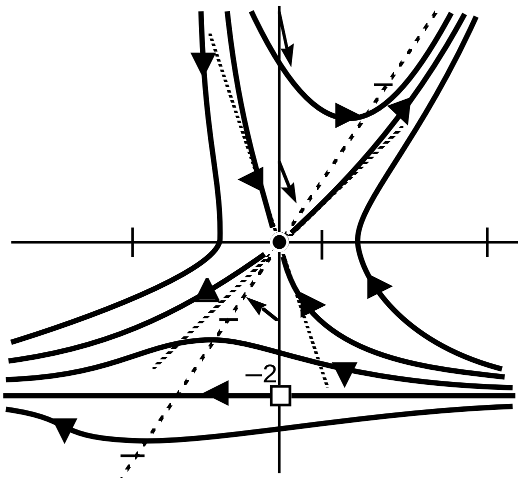
Cuando $a=0$ todo $v=0$ es una recta de puntos críticos, que, por tanto, no pueden ser elementales.

**b)** Para **a=3/2**, el punto silla tiene por autovalores $1$ y $-3$, con vectores propios respectivos $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

La pendiente es horizontal si $v=\frac{3}{2}x$ o si $v=-2$ (órbita recta).

La pendiente es vertical si $v=0$ (como en toda ecuación).

$\mathbf{v}(x,x)=x\begin{pmatrix}1\\1+x/2\end{pmatrix}$ ; $\mathbf{v}(x,-3x)=3x\begin{pmatrix}-1\\3-9x/2\end{pmatrix}$ ; $\mathbf{v}(0,v)=v\begin{pmatrix}1\\-2-v\end{pmatrix}$




La solución pedida tiene $v=-2$ como órbita asociada.

Por tanto, satisface $\frac{dx}{dt}=-2 \rightarrow x=C-2t \xrightarrow{x(1)=0} \boxed{x=2-2t}$

# Ecuaciones Diferenciales I (grupo B) septiembre 2002

**1.** Sea $y' = |t| - y$.
**a)** Precisar cuántas soluciones satisfacen $y(0)=0$.
**b)** Dibujar aproximadamente sus soluciones.
**c)** Escribir la solución con $y(0)=1$ para todos los valores de $t$ que esté definida.

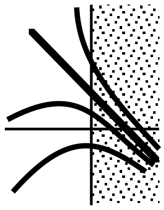
**a)** Como $f(t,y) = |t| - y$ , $f_y(t,y) = -1$ son continuas en todo $\mathbf{R}^2$ (o por ser lineal con coeficientes continuos en todo $\mathbf{R}$) existe **solución única** para cualquier par de datos iniciales; en particular para $y(0)=0$ .

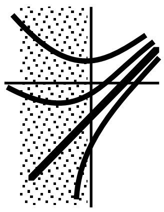
**b)** Las soluciones crecen (decrecen) si $y<|t|$ ($y>|t|$).

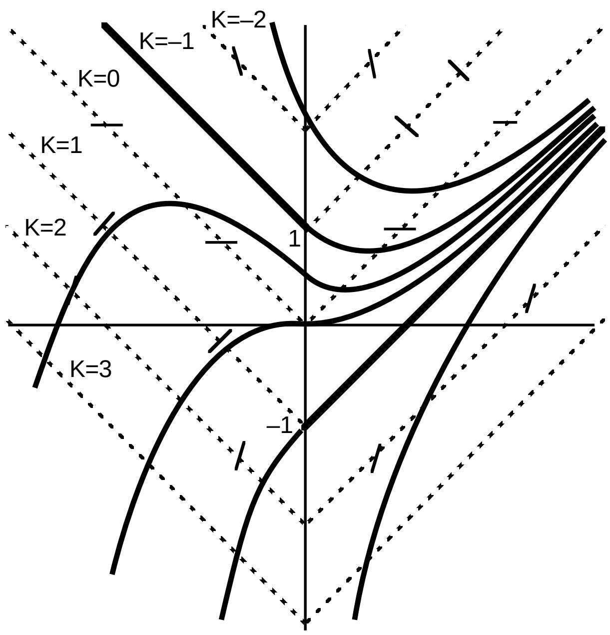
Las isoclinas son $y = |t| - K$ . Las de pendiente $K=1$ y $K=-1$ muestran que hay dos semirrectas solución:

$y = t-1$ para $t\geq 0$ e $y = 1-t$ para $t\leq 0$ .

Se puede ver el dibujo como la unión de los de dos ecuaciones lineales estables de soluciones particulares las dos citadas y de solución general de la homogénea $y = Ce^{-t}$ (para ambas):








**c)** En el dibujo se ve que si $t\leq 0$ la solución es $\boxed{y = 1-t}$.

Para $t\geq 0$ , la solución general de $y' = t-y$ es

$y = t-1+Ce^{-t} \xrightarrow{y(0)=1} \boxed{y = t-1+2e^{-t}}$ , si $t\geq 0$ .

[Sin usar el dibujo: $t\leq 0 \to y' = -t-y$ ; $y_p = At+B$ ; $A = -t-At-B$ , $A=-1$ , $B=1 \to y = 1-t+Ce^{-t} \xrightarrow{y(0)=1} y = 1-t$ ;
$t\geq 0 \to y' = t-y$ ; $y_p = At+B$ ; $A = t-At-B$ , $A=1$ , $B=-1 \to y = t-1+Ce^{-t} \xrightarrow{y(0)=1} y = t-1+2e^{-t}$ .

También se podría emplear directamente la fórmula: $y = e^{-t} + e^{-t}\int_0^t |s| e^s ds = \begin{cases} e^{-t} - e^{-t}\int_0^t s e^s ds , & t\leq 0 \\ e^{-t} + e^{-t}\int_0^t s e^s ds , & t\geq 0 \end{cases}$ … ]

**2.** Sea $x''' + 2x'' + (1+a)x' + 4a^2 x = e^{-t}$ .
**a)** Para $a=0$ , hallar la solución que satisface $x(0)=x'(0)=0$ , $x''(0)=-1$ .
**b)** Para $a=1/2$ , hallar una solución de la ecuación.
**c)** Precisar para qué valores de $a$ la ecuación es asintóticamente estable.

**a)** Para $a=0$ ( $\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=0$ , $\lambda=-1$ doble, $\lambda=0$ ) la solución general es $x = c_1+c_2e^{-t}+c_3te^{-t}+x_p$ ,

con $x_p = At^2e^{-t} \to x_p' = A[2t-t^2]e^{-t}$ , $x_p'' = A[2-4t+t^2]e^{-t}$ , $x_p''' = A[-6+6t-t^2]e^{-t} \to A = -\frac{1}{2}$ .

Imponiendo los datos iniciales a $x = c_1+c_2e^{-t}+c_3te^{-t} - \frac{1}{2}t^2$ se obtiene $c_1=c_2=c_3=0 \to \boxed{x = -\frac{1}{2}t^2e^{-t}}$ .

O por Laplace: $s^3X+1+2s^2X+sX = \frac{1}{s+1} \to X = \frac{-s}{s[s+1]^3} = \frac{-1}{[s+1]^3} \to x = -e^{-t}L^{-1}[\frac{1}{s^3}] = -\frac{1}{2}t^2e^{-t}$ .

**b)** Para $a=1/2$ , no podemos hallar (autovalores no enteros) la solución general, pero sí una particular:

como $\lambda=-1$ no es autovalor ( $-1+2-\frac{3}{2}+1\neq 0$ ), $x_p = Ae^{-t} \to A[-1+2-\frac{3}{2}+1]e^{-t} = e^{-t} \to \boxed{x = 2e^{-t}}$ .

**c)** $\lambda^3+2\lambda^2+(1+a)\lambda+4a^2=0$ (inmediato: si $a=0$ o si $a\leq -1$ no es asintóticamente estable).

Routh-Hurwitz: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4a^2 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & 4a^2 \end{pmatrix} \to 2>0$ , $2+2a-4a^2>0$ , $4a^2>0 \to$ AE $\Leftrightarrow \boxed{a\in(-\frac{1}{2},0)\cup(0,1)}$ .

**3.** Sea $2t^2[1+t^2]x''-t[3+7t^2]x'+2[1+2t^2]x=0$ .
**a)** Hallar una solución que no sea analítica en $t=0$ .
**b)** Hallar la solución general de la ecuación en términos de funciones elementales.

**a)** $t=0$ es singular regular con $r(r-1)-\frac{3}{2}r+1=0 \to r_1=2,\ r_2=\frac{1}{2}$ .

Es no analítica en $t=0$ la solución : $x_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+1/2}$ (calculable, sin hallar la analítica $x_1=t^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ , al ser la diferencia entre las raíces del polinomio indicial no entera). Llevando la $x_2$ a la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{\infty}[\,2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})b_k t^{k+1/2}+2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})b_k t^{k+5/2}-3(k+\tfrac{1}{2})b_k t^{k+1/2}-7(k+\tfrac{1}{2})b_k t^{k+5/2}+2b_k t^{k+1/2}+4b_k t^{k+5/2}\,]=0$$

$t^{1/2}$ : $[-1/2-3/2+2]b_0=0 \to b_0$ indeterminado ; $t^{3/2}$ : $[3/2-9/2+2]b_1=0 \to b_1=0$ ;

$t^{5/2}$ : $[15/2-15/2+2]b_2+[-1/2-7/2+4]b_0=0 \to b_2=0$ ;

$t^{k+1/2}$ : $[2(k+1/2)(k-1/2)-3(k+1/2)+2]\,b_k+[2(k+1/2)(k-1/2)-3(k+1/2)+2]\,b_{k-2}=0$

Como cada $b_k$ queda en función de $b_{k-2}$ y $b_1=b_2=0$ , todos los $b_k$ son nulos excepto $b_0$ : $\boxed{x_2=t^{1/2}}$

**b)** Con esa solución tan corta, lo más comodo es utilizar la fórmula deducida al reducir el orden:

$$\frac{1}{2}\int\frac{7t^2+3}{t\,[t^2+1]}=\frac{1}{2}\int[\,\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1}\,]=\frac{1}{2}\int[\,\frac{3}{t}+\frac{4t}{t^2+1}\,]\ \to\ e^{-\int a}=t^{3/2}(t^2+1)\ \to$$

$$x_1=t^{1/2}\int\frac{t^{3/2}(t^2+1)}{t}\,dt=t^{1/2}[\,\frac{2}{7}t^{7/2}+\frac{2}{3}t^{1/2}\,]=\frac{2}{3}[\,t^2+\frac{3}{7}t^4\,]$$

(a esta misma solución, sin la constante 2/3 , se llegaría llevando directamente la $x_1$ a la ecuación).

Así pues, la solución general de la ecuación es $\boxed{x=c_1t^{1/2}+c_2[\,t^2+\frac{3}{7}t^4\,]}$

**4.** Sea [S] $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y-y^2+x^4 \end{cases}$ . Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar el mapa de fases de [S].
Dato: $y=\pm x^2$ son soluciones de la ecuación de las órbitas.

La ecuación de las órbitas $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x}+x^3$ es de Riccati, y podemos resolverla por conocer alguna $y_p$ :

$y=z+x^2 \to z'=y'-2x=\left(\frac{2}{x}-2x\right)z-\frac{z^2}{x} \xrightarrow{z=1/u} u'=\left(2x-\frac{2}{x}\right)z+\frac{1}{x}$

$\to u=C\frac{e^{x^2}}{x^2}+\frac{e^{x^2}}{x^2}\int xe^{-x^2}dx=\frac{Ce^{x^2}-1/2}{x^2} \to \boxed{y=x^2+\frac{2x^2}{Ce^{x^2}-1}}$

Puntos críticos $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. La aproximación lineal $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4x^3 & 2-2y\end{pmatrix}$:

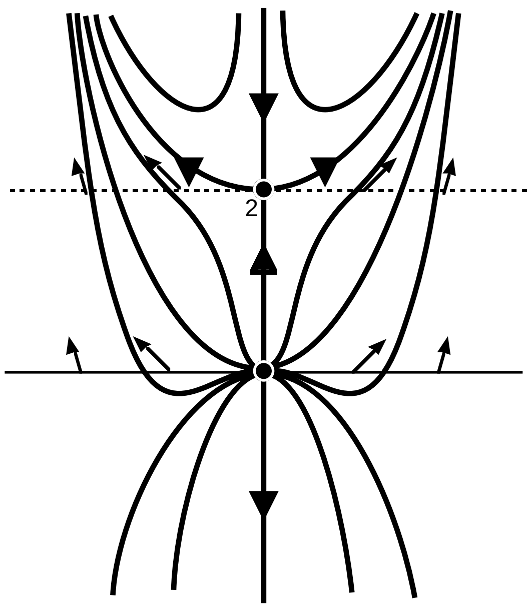
en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$: nodo I, con $\lambda=1\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda=2\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

en $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$: silla, con $\lambda=1\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda=-2\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Pendiente vertical si $x=0$ (órbita). Horizontal si $y=1\pm\sqrt{1+x^4}$ .

$\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}(x,2)=\begin{pmatrix}x\\x^4\end{pmatrix}$ (la separatriz horizontal se deforma $\cup$ ).

Dos órbitas conocidas son $y=\pm x^2$ (confirman la deformación de la separatriz y el hecho de que se queda con la tangencia del nodo el vector propio asociado a $\lambda=1$ ). Las demás tienden hacia $x^2$ cuando $|x|\to\infty$ (para $C>1$ , tras tener una asíntota).



# Ecuaciones Diferenciales I (grupo B) febrero 2003

**1.** Sea $y' = (y-t+1)^2$. **a)** Hallar su solución general. **b)** Dibujar aproximadamente sus soluciones. **c)** Precisar cuántas soluciones satisfacen: i) $y(0)=0$ , ii) $y(0)=-2$ .

**a)** $z=y-t \to z'=(z+1)^2-1=z^2+2z$ (Bernouilli o separable):

$$\xrightarrow{u=1/z} u' = -2u-1 \to u = Ce^{-2t}-\frac{1}{2} \to z=\frac{2}{Ce^{-2t}-1} \to \boxed{y = t + \frac{2}{Ce^{-2t}-1}}$$

$$2t+C=\int\frac{2dz}{z^2+2z}=\int\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right]dz=\ln\frac{z}{z+2} \to \frac{z}{z+2}=Ce^{2t} \to z=\frac{2Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}} \to \boxed{y=t+\frac{2Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}}}=t+\frac{2C}{e^{-2t}-C}$$

**b)** Todas las soluciones son crecientes.

Las isoclinas son $(y-t+1)^2=K$ $(\geq 0) \to y=t-1\pm\sqrt{K}$ ,

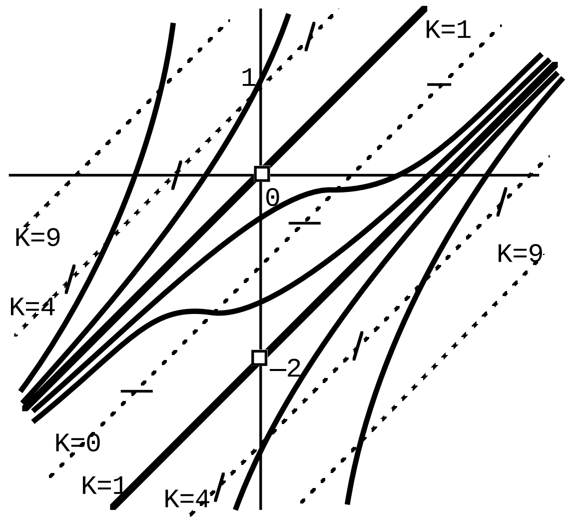
o bien: $f(t,t+b)=(b+1)^2=K$ .

Rectas solución: si $K=1 \to y=t$ ó $y=t-2$ .

De $y''=2(y-t+1)(y'-1)$ se obtiene la recta de puntos de inflexión $y=t-1$ y, de nuevo, las dos rectas solución.

**c)** Como $f$ y $f_y$ son continuas en todo el plano, lo son en un entorno de cualquier punto, y, por tanto, existe **una única solución para cuarquier dato inicial**.

[Como suele ocurrir, si uno se fía de las soluciones puede cometer errores; en la solución obtenida como Bernouilli falta la recta $y=t$ : $\xrightarrow{y(0)=0} 0=\frac{2}{C-1}$ (!?) , y en la separable, falta la $y=t-2$ : $\xrightarrow{y(0)=-2} -2=\frac{2C}{1-C} \to -2=0$ (!?) ].




**2.** Sea [S] $\begin{cases} x'=4y+z \\ y'=z-4 \\ z'=az-2x \end{cases}$ . **a)** Para **a=5** hallar la solución del sistema que cumple $x(0)=-2$, $y(0)=3$, $z(0)=0$ . (Ayuda: el sistema posee una solución constante). **b)** Discutir la estabilidad de [S] según los valores de la constante $a$ .

**a)** Con la ayuda: $\mathbf{x_p}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \to \begin{cases}0=4b+c\\0=c-4\\0=5c-2a\end{cases} \to \begin{matrix}a=10\\b=-1\\c=4\end{matrix}$ . Para el homogéneo: $\begin{vmatrix}-\lambda & 4 & 1\\ 0 & -\lambda & 1\\ -2 & 0 & 5-\lambda\end{vmatrix} = -[\lambda+1][\lambda-2][\lambda-4]=0$ ;

$$\lambda=-1 \to \begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&1\\-2&0&6\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} , \quad \lambda=2 \to \begin{pmatrix}-2&4&1\\0&-2&1\\-2&0&3\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} , \quad \lambda=4 \to \begin{pmatrix}-4&4&1\\0&-4&1\\-2&0&1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} .$$

Solución general: $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}e^{2t}+c_3\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}e^{4t}+\begin{pmatrix}10\\-1\\4\end{pmatrix} \to \begin{cases}3c_1+3c_2+2c_3+10=-2\\-c_1+c_2+c_3-1=3\\c_1+2c_2+4c_3+4=0\end{cases} \to \boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}10-12e^{-t}\\-1+4e^{-t}\\4-4e^{-t}\end{pmatrix}}$

Derivando: $x''=4z-16+z'$ ; $z'''=5z''-8z+32-2z' \to z=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}+c_3e^{4t}+4$ , $\left.\begin{matrix}z(0)=0,\ z'(0)=0+4\\z''(0)=20-24-0=-4\end{matrix}\right\} \to z=4-4e^{-t}$

$$\to x=\frac{5z-z'}{2}=20-12e^{-t} \to y=\frac{x'-z}{4}=4e^{-t}-1 .$$

Laplace: $\begin{cases} sX+2=4Y+Z & [5s-s^2-2][sY-3+4/s]+4=8Y \\ sY-3=Z-4/s,\ Z=sY-3+4/s \uparrow & \\ sZ=5Z-2X,\quad X=(5-s)Z/2 \uparrow & \end{cases} \to Y=\frac{3s^3-19s^3+30s+8}{s(s+1)(s-2)(s-4)}=\frac{3s-1}{s(s+1)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}$

$$\to y=4e^{-t}-1 \to z=4+y'=4-4e^{-t} \to x=\frac{5z-z'}{2}=20-12e^{-t}$$

**b)** $-|A-\lambda I|=\lambda^3-a\lambda^2+2\lambda+8$ . Si $a>0$ es I , si $a=0$ no es AE y si $a<0$ necesitamos Routh-Hurwitz:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-a&1&0\\8&2&-a\\0&0&8\end{pmatrix} \to a\ ,\ -2a-8\ ,\ -8(2a+8) \to \boxed{\text{AE} \Leftrightarrow a<-4\ ,\ \text{I si } a>-4} .$$

Para $\boxed{a=-4}$ (R-H no decide): $\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda+8=(\lambda+4)(\lambda^2+2) \to \lambda=-4$ , $\lambda=\pm\sqrt{2}\,i$ (simples) $\to$ $\boxed{\text{E no A}}$

**3.** Sea $t^2x'' + t\,x' + [\,t - \frac{1}{4}\,]\,x = 0$ .

**a)** Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución acotada en $t = 0$ .

**b)** Deteminar si hay soluciones linealmente independientes de la anterior de la forma $x = t^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ .

**a)** $t=0$ es singular regular con $r(r-1) + r - \frac{1}{4} = 0 \;\to\; r_1 = \frac{1}{2}\,,\; r_2 = -\frac{1}{2}\,,\; r_1 - r_2 = 1$ entero.

Está acotada en $t=0$ la solución : $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1/2}$ . Llevándola a la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\,(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_k t^{k+1/2} + (k+\tfrac{1}{2})c_k t^{k+1/2} - \tfrac{1}{4}c_k t^{k+1/2} + c_k t^{k+3/2}\Big] = \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\,(k+1)k\,c_k t^{k+1/2} + c_k t^{k+3/2}\Big] = 0$$

$t^{1/2}:\; 0c_0 = 0 \;\to\; c_0$ indeterminado ; $\quad t^{3/2}:\; 2c_1 + c_0 = 0 \;\to\; c_1 = -\frac{1}{2}\,c_0$ ;

$t^{5/2}:\; 6c_2 + c_1 = 0 \;\to\; c_2 = -\frac{1}{6}\,c_1 = \frac{1}{12}\,c_0$ ; $\quad t^{7/2}:\; 12c_3 + c_2 = 0 \;\to\; c_3 = -\frac{1}{12}\,c_2 = -\frac{1}{144}\,c_0$ ; $\cdots$

$$\boxed{x_1 = t^{1/2}\big[1 - \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{1}{12}\,t^2 - \tfrac{1}{144}\,t^3 + \cdots\big]}$$

**b)** La otra solución $x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1/2} + a\,x_1 \ln t$ será de esa forma si $a=0$ y no lo será si $a\neq 0$ . Hay que trabajar:

$$x_2' = \sum_{k=0}^{\infty}(k-\tfrac{1}{2})b_k t^{k-3/2} + a\,x_1' \ln t + \tfrac{a}{t}\,x_1 \;\;;\;\; x_2'' = \sum_{k=0}^{\infty}(k-\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{3}{2})b_k t^{k-5/2} + a\,x_1'' \ln t + \tfrac{2a}{t}\,x_1' - \tfrac{a}{t^2}\,x_1 \;\to$$

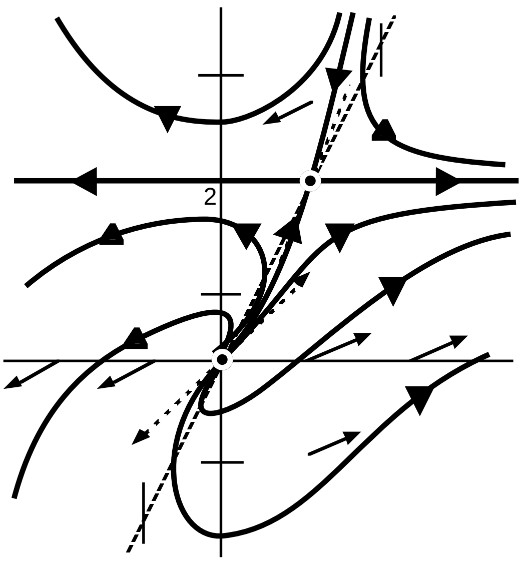
$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\,(k-\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{3}{2})b_k t^{k-1/2} + (k-\tfrac{1}{2})b_k t^{k-1/2} - \tfrac{1}{4}\,b_k t^{k-1/2} + b_k t^{k+1/2}\Big] + 2at\,x_1' =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\,k(k-1)b_k t^{k-1/2} + b_k t^{k+1/2}\Big] + 2at\,\big[\,\tfrac{1}{2}\,t^{-1/2} - \tfrac{3}{4}\,t^{1/2} + \cdots\big] = 0$$

$t^{-1/2}:\; 0b_0 = 0 \;\to\; b_0$ indeterminado ; $\quad t^{1/2}:\; 0b_1 + b_0 + a = 0 \;\to\; a = -b_0 \neq 0$ :

La segunda solución linealmente independiente **contiene el término con el $\ln t$** y no es de esa forma.

**4.** Sea $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = 2x - xy \end{cases}$ . Clasificar sus puntos críticos y dibujar su mapa de fases.




La ecuación de las órbitas no sabemos resolverla.

Puntos críticos $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ . La aproximación lineal $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2-y & -x\end{pmatrix}$

en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \;\to\; \lambda=2$ doble $\to \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (nodo 1 tg inestable),

en $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ : silla, con $\lambda=4 \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ , $\lambda=-1 \to \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ .

Pendiente horizontal si $y=2$ (órbita) y $x=0$ . Vertical si $y=2x$ .

$\mathbf{v}(x,0) = 2x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(1,y) = (2-y)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\mathbf{v}\big(x, \frac{5x-1}{2}\big) = (1-x)\begin{pmatrix}1\\ 5x/2\end{pmatrix}$ [la separatriz estable se deforma **)** ].

# Ecuaciones Diferenciales I (grupo B) septiembre 2003

| | |
|---|---|
| **1.** Sea $y' = 1 + \dfrac{2}{y-t}$ . | **a)** Hallar su solución general y la o las soluciones que satisfagan $y(1) = -1$ .<br>**b)** Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. |

**a)** Haciendo $z = y - t$ , $z' = \dfrac{2}{z}$ $\to$ $z^2 = 4t + C = (y-t)^2$ $\to$ $\boxed{y \;=\; t \pm \sqrt{4t+C}}$

También es exacta: $(y-t+2)+(t-y)y' = 0$ , $M_y = 1 = N_t$ $\to$ $\begin{array}{l} H = ty - \dfrac{t^2}{2} + 2t + g(y) \\ H = ty - \dfrac{y^2}{2} + h(t) \end{array}$ $\to$ $y^2 - 2ty + t^2 - 4t = C$ $\uparrow$

Como $f$ y $f_y$ son continuas en un entorno de $(1,-1)$ existe una **única solución** con esos datos, en concreto, $-1 = 1 \pm \sqrt{4+C}$ $\to$ $C=0$ $\to$ $y = t - 2\sqrt{t}$ (pues la raíz + no satisface los datos).

**b)** Sus isoclinas, como todas las de ecuaciones de la forma $y' = f(at+by)$ serán rectas:

$1 + \dfrac{2}{y-t} = K \to y = t + \dfrac{2}{K-1}$ rectas de pendiente 1

$\Big[$o si se prefiere $y = t + b$ $\to$ $K = 1 + \dfrac{2}{b}$ $\Big]$

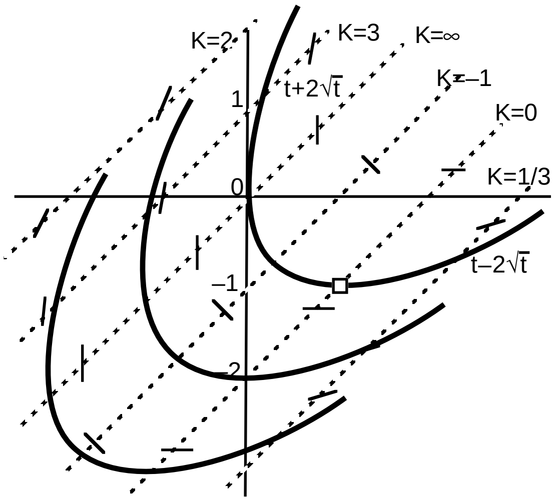
$K=0$ $\to$ $y = t-2$ (pendiente horizontal).

Sobre $y = t$ la pendiente es $\infty$ (problemas de E y U).

Además hemos pintado las de $b = -3$ , $-1$ , $1$ y $2$ .

No parece haber puntos de inflexión y no hallamos $y''$ .

Todas las curvas son **parábolas** (sin saber mucho álgebra es evidente que son cónicas, en la ecuación en $z$ es obvio y al deshacer el cambio se inclinan).




| | |
|---|---|
| **2.** Sea $x''' + 5x'' + 4x' + cx = t$ . | **a)** Hallar una solución particular para todo valor de la constante real $c$ .<br>**b)** Hallar la solución general para $c=-10$ .<br>**c)** Discutir la estabilidadde la ecuación según los valores de $c$ . |

**a)** Si $\lambda=0$ no es autavalor, es decir, si $c\neq 0$ , hay solución particular de la forma:

$x_p = At + B$ $\to$ $4A + c(At+B) = t$ $\to$ $A = \dfrac{1}{c}$ , $B = -\dfrac{4A}{c} = -\dfrac{4}{c^2}$ $\to$ $\boxed{x_p = \dfrac{t}{c} - \dfrac{4}{c^2}}$ , si $c\neq 0$ .

Si $c=0$ , hay que engordar la solución particular: $x_p = At^2 + Bt$ , $x_p' = 2At + B$ , $x_p'' = 2A$ $\to$

$10A + 4(2At+B) = t$ $\to$ $A = \dfrac{1}{8}$ , $B = -\dfrac{5A}{2} = -\dfrac{5}{16}$ $\to$ $\boxed{x_p = \dfrac{t^2}{8} - \dfrac{5t}{16}}$ , si $c=0$ .

**b)** Si $c=-10$ es fácil hallar las raíces del polinomio caractrístico:

$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 10 = (\lambda-1)\,(\lambda^2 + 6\lambda + 10) = 0$ $\to$ $\lambda = 1$ , $\lambda = -3 \pm i$ $\to$

solución general: $\boxed{x \;=\; c_1 e^t + c_2 e^{-3t}\cos t + c_3 e^{-3t}\operatorname{sen} t - \dfrac{t}{10} - \dfrac{1}{25}}$

**c)** Con el signo de los coeficientes, si $c<0$ es inestable y si $c=0$ no es AE. Para saber más es necesario R–H:

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ c & 4 & 5 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\to$ $5$ , $20-c$ , $c(20-c)$ $\to$ $\boxed{\text{AE} \Leftrightarrow 0<c<20 \text{ , I si } c<0 \text{ ó } c>20}$ .

Sólo falta saber si para $c=0$ y $c=20$ es inestable o estable no asintóticamente:

$\boxed{c=0}$ : $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda = 0$ $\to$ $\lambda = -4$ , $\lambda = -1$ y $\lambda = 0$ simples $\to$ $\boxed{\text{E no A}}$

$\boxed{c=20}$ : $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$ $\to$ $\lambda = -5$ , $\lambda = \pm i$ simples $\to$ $\boxed{\text{E no A}}$

(todo depende de la homogénea, la solución particular no influye en la estabilidad)

**3.** Sea $4t^2x'' - 3x = t^2$ . **a)** Calcular el desarrollo hasta orden 4 en torno a $t=1$ de la solución de la **ecuación homogénea** que cumple $x(1)=0$ , $x'(1)=1$ .
**b)** Hallar la solución general de esta ecuación de Euler **no homogénea**.

**a)** Resolvemos la ecuación homogénea en torno a $t=1$ (punto regular), haciendo $s=t-1$ :

$4(s^2+2s+1)x''-3x=0$ , con $s=0$ regular $\to$ $x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$ , donde, por los datos iniciales, es $c_0=0$ y $c_1=1$ .

$$\sum_{k=2}^{\infty}[4k(k-1)c_k s^k+8k(k-1)c_k s^{k-1}+4k(k-1)c_k s^{k-2}]-\sum_{k=0}^{\infty}3c_k s^k=0 \to$$

$s^0: 8c_2-3c_0=0 \to c_2=\frac{3}{8}c_0=0$ ; $s^1: 16c_2+24c_3-3c_1=0 \to c_3=\frac{1}{8}c_1-\frac{2}{3}c_2=\frac{1}{8}$

$s^2: 8c_2+48c_3+48c_4-3c_2=0 \to c_4=-\frac{5}{48}c_2-c_3=-\frac{1}{8} \to x=\boxed{(t-1)+\frac{1}{8}(t-1)^3-\frac{1}{8}(t-1)^4+\cdots}$

Son pocos términos y es regular: haceiendo $t=1$ en la ecuación: $4x''(1)-3x(1)=0 \to x''(1)=0$

Derivando la ecuación y volviendo a hacer $t=1$ : $4t^2x'''+8tx''-3x'=0 \to x'''(1)=\frac{3}{4}$

Derivando otra vez : $4t^2x^{IV}+16tx'''-3x''=0 \to x^{IV}(1)=-4x'''(1)=-3$

$\to x(t)=x(1)+x'(1)(t-1)+\frac{x''(1)}{2}(t-1)^2+\frac{x'''(1)}{6}(t-1)^3+\frac{x^{IV}(1)}{24}(t-1)^4+\cdots$ que lleva a lo mismo.

**b)** La solución de la homogénea: $\lambda(\lambda-1)-\frac{3}{4}=0 \to \lambda=\frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ $\to x_{hom}=c_1t^{3/2}+c_2t^{-1/2}$

Como al hacer $t=e^s$ el término no homogéneo de la de coeficientes constantes que aparece es de la forma $e^{2s} \Rightarrow$ existe particular $x_p=Ae^{2s} \Rightarrow$ existe particular $x_p=At^2$ en la incial $\to 8At^2-3At^2=t^2 \to x_p=\frac{1}{5}t^2$

[ O por variación de constantes $\begin{vmatrix} t^{3/2} & t^{-1/2} \\ 3t^{3/2}/2 & -t^{-1/2}/2 \end{vmatrix}=-2$ , $x_p=t^{-1/2}\int\frac{t^{3/2}(1/4)}{-2}-t^{3/2}\int\frac{t^{-1/2}(1/4)}{-2}=-\frac{1}{8}(\frac{2}{5}-2)t^2$ ]

La solución general es, por tanto, $\boxed{x=c_1t^{3/2}+c_2t^{-1/2}+\frac{1}{5}t^2}$

**4.** Sea [S] $\begin{cases} x'=4x+2y \\ y'=x+5y \end{cases}$ . **a)** Dibujar el mapa de fases de [S]. **$b_1$)** Hallar la solución de [S] que satisface $x(0)=2, y(0)=-1$ . **$b_2$)** Hallar la expresión de las órbitas de [S].

**a) Sistema lineal**, por tanto muy fácil de dibujar.

Punto crítico $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ , matriz del sistema lineal: $\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}$

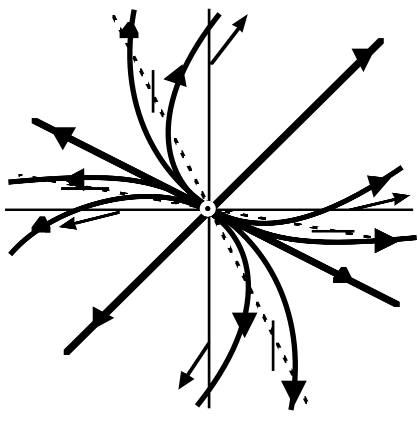
$\lambda^2-9\lambda+18=0 \to \lambda=6 \to \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ , $\lambda=3 \to \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ , **nodo inestable**.

A las órbitas sobre la recta $y=-\frac{x}{2}$ (asociadas al autovalor más cercano a 0 ) son tangentes todas las demás (menos las de $y=x$ ).

Pendiente horizontal si $x=-5y$ . Vertical si $y=-2x$ .

$\mathbf{v}(x,0)=x\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(0,y)=y\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

El mapa dibujado es global en todo el plano.



**$b_1$)** De varias formas. Como el dato corresponde a la órbita $y=-\frac{x}{2} \to \begin{cases} x'=3x \\ x(0)=2 \end{cases} \to \boxed{x=2e^{3t}} \to \boxed{y=-e^{3t}}$

Como la solución general es $x=c_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{6t}$ , imponiendo los datos se llega al mismo resultado.

Laplace: $\begin{cases} sX-2=4X+2Y \\ sY+1=x+5Y \end{cases} \to X=(s-5)Y+1 \to (s^2-9s+18)Y=6-s \to Y=-\frac{1}{s-3} \to y=-e^{3t} \to x=y'-5y=2e^{3t}$

**$b_2$)** $\frac{dy}{dx}=\frac{x+5y}{4x+2y}$ Homogénea $\xrightarrow{z=y/t}$ $xz'=\frac{1+5z}{4+2z}-z=\frac{-2z^2+z+1}{4+2z}$ ,

$-\int\frac{2z+4}{[2z+1][z-1]}dz=\cdots=\int[\frac{2}{2z+1}-\frac{2}{z-1}]dz=\ln\frac{2z+1}{[z-1]^2}=\int\frac{dx}{x}=\ln x+C \to \boxed{\frac{2y+x}{[y-x]^2}=C}$

## Ecuaciones Diferenciales I (grupo C) febrero 2004

**1.** Sea $y' = \dfrac{y^2}{t}$ . **a)** Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. **b)** Hallar (si existen) todas las soluciones de la ecuación que satisfacen: i) $y(-1)=1$ ; ii) $y(1)=0$ ; iii) $y(0)=1$ .

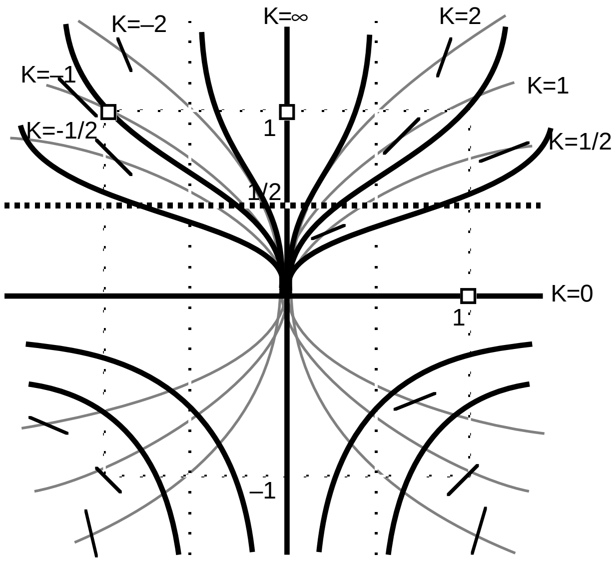
**a)** Hallamos antes su solución general: $-\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{1}{t} \to \dfrac{1}{y} = C - \log|t| \to y = \dfrac{1}{C-\log|t|}$ (todas con asíntotas).

Sus isoclinas, $y' = K$ , son las parábolas: $t = \dfrac{y^2}{K}$ .

Además, para $K=0$ se tiene $y=0$ (recta solución), y sobre $t=0$ es $K=\infty$ (curva integral vertical).

Como $y'' = \dfrac{2yy'}{t} - \dfrac{y^2}{t^2} = \dfrac{y^2}{t^2}(2y-1)$ ,

la curva de puntos de inflexión es la recta $y = 1/2$ .




**b)** El TEyU asegura solución única con $y(t_o)=y_o$ , si $t_o \neq 0$ . En particular, es **única** para los datos i) y ii) .

Imponiendo $y(-1)=1$ se tiene $C=1$ , con lo que la única solución que cumple i) es $y = 1/[1-\log|t|]$ .

La única que cumple ii) es la $y \equiv 0$ perdida en el cálculo.

Como la ecuación $\dfrac{dt}{dy} = \dfrac{t}{y^2}$ tiene solución única $t(y)$ si $y_o \neq 0$ , por (0,1) pasa sólo la curva integral $t \equiv 0 \Rightarrow$

**no hay solución** $y(t)$ con $y(0)=1$ .

**2.** Hallar la solución del sistema $\begin{cases} x' = -2z \\ y' = x \\ z' = x-2z \end{cases}$ con $x(0)=1$ , $y(0)=0$ , $z(0)=1$ , y estudiar su estabilidad.

Derivando: Las ecuaciones primera y tercera sólo contienen $x$ y $z$ :

$$z'' = x' - 2z' = -2z - 2z' \to z = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen} t \ , \ \left.\begin{matrix} z(0)=1 \\ z'(0)=1-2=-1 \end{matrix}\right\} \to \boxed{z = e^{-t}\cos t} \to$$

$$x = z' + 2z = \boxed{e^{-t}[\cos t - \operatorname{sen} t]} \to y' = e^{-t}[\cos t - \operatorname{sen} t] \to y = c_3 + y_p \text{ , con } y_p = e^{-t}[A\cos t + B\operatorname{sen} t]$$

$$\to y = c_3 + e^{-t}\operatorname{sen} t \text{ , } y(0)=0 \to \boxed{y = e^{-t}\operatorname{sen} t}$$ (ó $y = \int_0^t x\,dt$ , integrando dos veces por partes).

Laplace: $\begin{cases} sX - 1 = -2Z & s[s+2]Z - s - 1 = -2Z \\ sY = X & \uparrow \\ sZ - 1 = X - 2Z \ , & X = (s+2)Z - 1 \end{cases} \to Z = \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}$ , $z = L^{-1}\left[\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\cos t$

$$\to X = \frac{s^2+3s+2}{s^2+2s+2} - 1 = \frac{s}{s^2+2s+2} \to x = L^{-1}\left[\frac{s+1-1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}[\cos t - \operatorname{sen} t]$$ (ó bien $x = z' + 2z$ )

$$\to Y = \frac{1}{s^2+2s+2} \to y = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] = e^{-t}\operatorname{sen} t \ .$$

Con matrices: $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[\lambda^2+2\lambda+2] = 0$ ; $\lambda=0 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$\lambda = -1+i \to \begin{pmatrix} 1-i & 0 & -2 \\ 1 & 1-i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \to \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ , $\lambda = -1-i \to \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -2 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 1 & 0 & -1+i \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \to \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ .

$$\to \mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t+it} + c_3\begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t-it} \to \begin{cases} c_2(-1+i) - c_3(1+i) = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ ic_2 - ic_3 = 1 \end{cases} \to c_3 = \frac{i}{2} \ , \ c_2 = -\frac{i}{2} \ , \ c_1 = 0$$

$$\to \mathbf{x} = \frac{1}{2}e^{-t}\begin{pmatrix} [e^{it}+e^{-it}] + i[e^{it}-e^{-it}] \\ -i[e^{it}-e^{-it}] \\ e^{it}+e^{-it} \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Como los autovalores son $\lambda=0$ (simple) y $\lambda = -1 \pm i$ (con $\operatorname{Re}\lambda < 0$) , todas las soluciones del sistema (y la calculada en particular, aunque tienda a $\mathbf{0}$) son **estables no asintóticamente**.

**3.** Sea $3[1+t^2]x''+2tx'=0$ . **a)** Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $t=0$ . **b)** Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $t\to\infty$ .

La ecuación es resoluble: $v=x' \to v=Ce^{-\int 2t/(3[1+t^2])}=C(1+t^2)^{-1/3}\to x=K+C\int_0^t \frac{du}{\sqrt[3]{1+u^2}}$ .

Como la impropia $\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt[3]{1+u^2}}$ diverge ( $\to\infty$ ), hay soluciones no acotadas cuando $t\to\infty$ , lo que responde **b)**.

Y podemos también utilizar la solución para encontrar el desarrollo pedido en **a)**:

$$(1+t^2)^{-1/3}=1-\frac{1}{3}t^2+\frac{(-1/3)(-4/3)}{2}t^4-\cdots \to \boxed{x = t-\frac{1}{9}t^3+\frac{2}{45}t^5-\cdots}$$

Directamente, $t=0$ regular $\to x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k$ , donde, para que se anule en $t=0$ , tomamos $c_0=0$ y $c_1=1$ .

$$\sum_{k=2}^{\infty}[3k(k-1)c_k t^{k-2}+3k(k-1)c_k t^k]+\sum_{k=0}^{\infty}2kc_k t^k=0 \to t^0: 6c_2=0 \ ; \quad t^1: 18c_3+2c_1=0 \to c_3=-\frac{1}{9} \ ;$$

$$t^2: 36c_4+10c_2=0\to c_4=0 \ ; \ t^3: 60c_5+24c_3=0\to c_5=-\frac{2}{5}c_3=\frac{2}{45} \to \boxed{x = t-\frac{1}{9}t^3+\frac{2}{45}t^5-\cdots}$$

Más largo es: $3x''(0)=0$ . Derivando: $3[1+t^2]x'''+8tx''+2x'=0 \to x'''(0)=-\frac{2}{3} , \frac{x'''(0)}{3!}=-\frac{1}{9} ,\ldots$

Para responder **b)** no se necesita la solución, pues basta estudiar el punto del infinito:

Haciendo $t=\frac{1}{s} \to 3\left[1+\frac{1}{s^2}\right][s^4x''+2s^3x']+\frac{2}{s}[-s^2x']=0$ , $3s\left[1+s^2\right]x''+\left[4+6s^2\right]x'=0$ ,

$s=0$ singular regular, con $r_1=0$ , $r_2=-\frac{1}{3} \to x_2=s^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty}b_k s^k$ , no acotada cuando $s\to 0^+$ ( $t\to\infty$ ).

**4.** Sea $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=4x-y-3x^2 \end{cases}$ . Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.

El sistema es exacto: $f_x+g_y=1-1\equiv 0$ . $\begin{matrix} H_y=x+2y \to H=xy+y^2+p(x) \\ H_x=y-4x+3x^2 \to H=xy-2x^2+x^3+q(y) \end{matrix} \Rightarrow$

$H=\boxed{y^2+xy-2x^2+x^3=C}$ , expresión de las órbitas del sistema.

Puntos críticos: $y=-\frac{x}{2} \to \frac{9x}{2}-3x^2=0$ , $x=0, \frac{3}{2} \to$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3/2\\-3/4\end{pmatrix}$ . La aproximación lineal $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4-6x & -1\end{pmatrix}$

en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix} \to \lambda^2-9=0 \to$ silla,

con $\lambda=3\to\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ , $\lambda=-3\to\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ .

en $\begin{pmatrix}3/2\\-3/4\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & -1\end{pmatrix} \to \lambda^2+9=0 \to$

centro de la aproximación lineal, que, al ser el sistema exacto, lo es también de nuestro no lineal.

Pendiente horizontal sobre la parábola $y=4x-3x^2$ .
Vertical sobre la recta $y=-x/2$ .

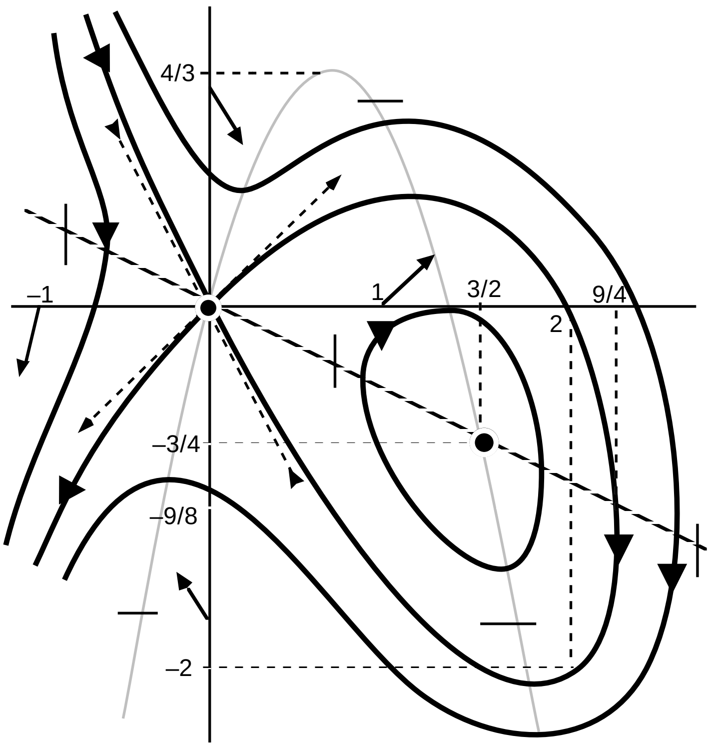
$\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}x\\4x-3x^2\end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(0,y)=y\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

La expresión de la separatriz [pasa por (0,0)] es:

$y^2+xy-2x^2+x^3=0 \to y=\frac{x}{2}\left[-1\pm\sqrt{9-4x}\right]$

Puntos fácilesde hallar de la separatriz:

(2,0), (2,–2), (9/4,–9/8), (–4,–8), (–4,12)




[ $\mathbf{v}(x,x)=3x\begin{pmatrix}1\\1-x\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}(x,-2x)=3x\begin{pmatrix}-1\\2-x\end{pmatrix}$ confirman la forma en que se deforma la separatriz].

# Ecuaciones Diferenciales I (grupo C) septiembre 2004

**1.** Sea $y' = y - y^3$. **a)** Hallar su solución general. **b)** Precisar cuántas soluciones cumplen: i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=-1$. **c)** Dibujar aproximadamente sus soluciones. **d)** Determinar la estabilidad de la solución que satisface $y(0)=1$.

**a)** Esta ecuación autónoma se puede ver como de Bernouilli o separable:

$$-2y^{-3}y' = -2y^{-2} + 2 \xrightarrow{z=y^{-2}} z' = -2z+2 \ \ (z_p=1 \text{ a ojo}) \to z = Ce^{-2t}+1 = y^{-2} \to \boxed{y = \pm\frac{1}{\sqrt{1+Ce^{-2t}}}}$$

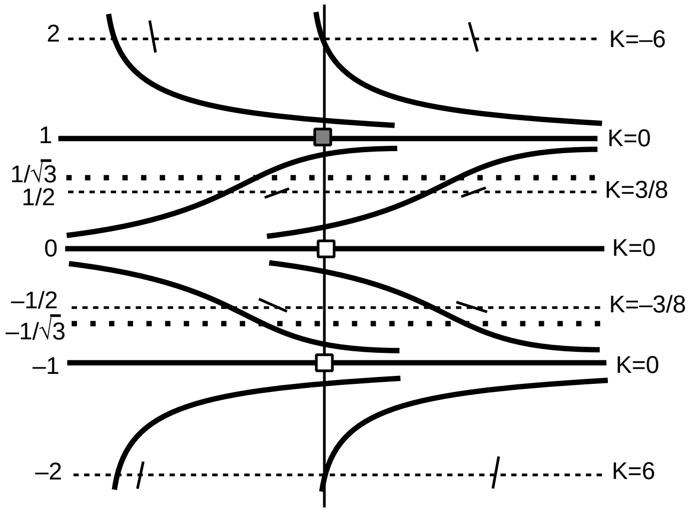
$$t+C = \int\frac{dy}{y-y^3} = \int\Big(\frac{1}{y} - \frac{1/2}{1+y} + \frac{1/2}{1-y}\Big)dy = \ln y - \frac{1}{2}\ln(1-y^2)\,;\ \ \ln\frac{y^2}{1-y^2} = 2t+C\,;\ \frac{y^2}{1-y^2} = Ce^{2t}\,;\ y^2 = \frac{Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}} \ \text{ casi igual.}$$

**b)** $f = y-y^3$, $f_y = 1-3y^2$ continuas en $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ existe **solución única** para cualquier dato inicial. En particular para los datos i) y ii). La solución para i) es la $y\equiv 0$ (perdida en el cálculo de Bernouilli: $0 = \pm 1/\sqrt{C}$ imposible) y para ii) es $y\equiv 1$ (que no aparece entre las soluciones de la separable: $1 = \frac{C}{1+C}$ imposible).

**c)** Por ser autónoma es fácil su dibujo cualitativo:
$y\equiv 0$ e $y\equiv\pm 1$ son soluciones constantes.
$y(1+y)(1-y) > 0$ si $y<-1$ ó si $0<y<1$: en esa región las soluciones crecen (y en el resto decrecen).
Las soluciones son traslaciones horizontales unas de otras y tienden hacia las constantes.

Precisamos más: isoclinas rectas $y=b \to K=b-b^3$.

Puntos de inflexión: $y'' = (1-3y^2)(y-y^3) \to y = \pm\sqrt{3}/3 \approx \pm 0.6$ (+ soluciones rectas).




**d)** Sabemos que en las autónomas (y sólo en ellas) el dibujo basta para precisar la estabilidad (soluciones acotadas a la derecha tienden hacia las de equilibrio cuando $t\to\infty$). La solución constante $y\equiv 1$ es **asintóticamente estable**.

[Se podría decir también a través del teorema de estabilidad de las autónomas (que se generaliza para los sistemas autónomos): $f'(1) = -2 < 0 \Rightarrow$ **AE**. O incluso (más largo e innecesario) utilizando la solución].

**2.** Sea $x^{(n)} + 6x' + 20x = \cos 3t$. **a)** Hallar su solución general para $n=3$. **b)** Estudiar la estabilidad de la ecuación para $n=2$, $n=3$ y $n=4$.

**a)** $\lambda^3+6\lambda+20 = (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+10) = 0 \to \lambda=-2,\ \lambda=1\pm 3i \to x_{hom} = c_1e^{-2t} + e^t(c_2\cos 3t + c_3\,\mathrm{sen}\,3t)$.

Llevando $x_p = A\cos 3t + B\,\mathrm{sen}\,3t$ a $x''' + 6x' + 20x = \cos 3t$ obtenemos:

$$(27A-18A+20B)\ \mathrm{sen}\,3t + (-27B+18B+20A)\cos 3t = \cos 3t \to \begin{cases} 9A+20B=0 \\ 20A-9B=1 \end{cases} \to A = \frac{20}{481},\ B = -\frac{9}{481}.$$

La solución general es, pues: $\boxed{x = c_1e^{-2t} + e^t(c_2\cos 3t + c_3\,\mathrm{sen}\,3t) + \frac{1}{481}\big(20\cos 3t - 9\,\mathrm{sen}\,3t\big)}$

**b)** Para **n=2** los autovalores se hallan fácilmente: $\lambda^2+6\lambda+20 = 0 \to \lambda = -3\pm\sqrt{11}\,i$ con $\mathrm{Re}\lambda<0 \Rightarrow$ **AE**.

Para **n=3** ya hemos calculado arriba los autovalores. Como $\exists\lambda$ con $\mathrm{Re}\lambda>0$, la ecuación es **inestable**.

[La ausencia del término en $\lambda^2$ ya nos decía que no era AE. Routh-Hurwitz no daría dos determinantes negativos].

Para **n=4** no podemos calcular explícitamente los autovalores. Como no todos los coeficientes de $\lambda^4+6\lambda+20$ son estrictamente positivos, es inmediato que no puede ser AE. Esto quiere decir que $\exists\lambda$ con $\mathrm{Re}\lambda\geq 0$. Si comprobamos que no existen $\lambda$ con $\mathrm{Re}\lambda=0$, seguro que hay $\lambda$ con $\mathrm{Re}\lambda>0$ y será inestable:

$\lambda = qi \to q^4+6qi+20 = 0$, imposible pues a la vez no puede ser $q=0$ y $q^4+20 = 0$. Es **inestable**.

Routh-Hurwitz también no los aseguraba:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \to\ 0,\ -6<0,\ -36<0,\ -720<0.$$ Como existen menores negativos es **inestable**.

**3.** Sea $tx''+x=0$. Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial que se anule en $t=0$, encontrando la expresión de su término general.

$t^2x''+tx=0$. $t=0$ es singular regular con $r(r-1)+0\cdot r+0=0 \;\to\; r_1=1,\; r_2=0,\; r_1-r_2=1$ entero.

Se anula en $t=0$ la solución: $x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1}$. Llevándola a la ecuación: $\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k c_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = 0$

$t^1$: $2c_1+c_0=0 \to c_1=-\frac{1}{2}c_0$ (sobre $c_0$ no hay condición y queda iindeterminado);

$t^2$: $6c_2+c_1=0 \to c_2=-\frac{1}{3\cdot 2}c_1=\frac{1}{12}c_0$;

$t^k$: $(k+1)kc_k+c_{k-1}=0 \;\to\; c_k=-\frac{1}{(k+1)k}c_{k-1} \;\to\; c_3=-\frac{1}{4\cdot 3}c_2=-\frac{1}{144}c_0$; $\cdots$

$$c_k=\frac{1}{(k+1)k}\cdot\frac{1}{k(k-1)}c_{k-2}=-\frac{1}{(k+1)k}\cdot\frac{1}{k(k-1)}\cdot\frac{1}{(k-1)(k-2)}c_{k-3}=\cdots=(-1)^k\frac{1}{(k+1)!\,k!}c_0$$

(Comprobamos con algunos términos que está bien: $c_1=-\frac{1}{2!1!}c_0$, $c_2=\frac{1}{3!2!}c_0$, $c_3=-\frac{1}{4!3!}c_0=-\frac{1}{24\cdot 6}c_0$).

Por tanto: $\boxed{x_1=t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!\,k!}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!\,k!}t^{k+1}}=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{12}t^3-\frac{1}{144}t^4+\cdots$

**4.** Sea [S] $\begin{cases} x'=2xy \\ y'=1+3x^2-y^2 \end{cases}$. Hallar sus órbitas, precisando en particular la que pasa por $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$, y dibujar su mapa de fases.

La ecuación es exacta ( $f_x+g_y=2y-2y\equiv 0$ ) de Bernouilli: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x}+\frac{1+3x^2}{2xy}$:

$H_y=2xy \to H=xy^2+p(x)$
$H_x=y^2-3x^2-1 \to H=xy^2-x^3-x+q(y)$ $\Rightarrow$ $H=\boxed{xy^2-x^3-x=C}$, expresión de las órbitas.

O bien $2y\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x}+\frac{1+3x^2}{x} \xrightarrow{z=y^2} z'=-\frac{z}{x}+\frac{1+3x^2}{x}$, $z=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\int(1+3x^2)dx=\frac{C}{x}+1+x^3=y^2$, como antes.

La que pasa por $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$ es la de $C=\frac{3}{4}\cdot\frac{25}{16}-\frac{27}{64}-\frac{3}{4}=0 \;\to\; x\left(y^2-x^2-1\right)=0 \;\to\; y=\sqrt{1+x^2}$.

P. críticos: $x=0,\ 1-y^2=0$, $\begin{pmatrix}0\\ \pm 1\end{pmatrix}$, ó $y=0,\ 1+3x^2=0$ imposible.

La AL $\begin{pmatrix}2x & 2y\\ 6x & -2y\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $\lambda=2\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda=-2\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

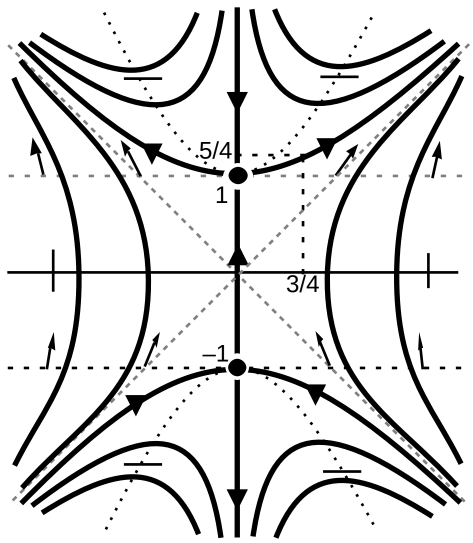
y en $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\to$ $\lambda=-2\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda=2\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Ambos puntos son sillas (del lineal y del no lineal).

Pendiente horizontal sobre la hipérbola $y^2-3x^2=1$.
Vertical sobre la rectas $y=0$ ó $x=0$ (órbita, pues, que además es una de las separatrices de ambas sillas).

$\mathbf{v}(x,1)=\begin{pmatrix}2x\\3x\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x,-1)=\begin{pmatrix}-2x\\3x\end{pmatrix}$,

aseguran que las otras separatrices no se conservan. De hecho tenemos sus expresiones analíticas: como pasan por $(0,\pm 1)$ corresponden a la $C=0$ de antes y son, por tanto, $x=0$ (ya vista) y la hipérbola $y^2-x^2=1$ (o, si se prefiere, $y=\pm\sqrt{1+x^2}$).




Simetría respecto a ambos ejes: $H$ depende de $y^2$, y cambiando $-x$ por $x$ sale la órbita $H=-C$.