# Soluciones del examen de feb05 de Ecuaciones Diferenciales I (C)

**1.** Hallar la solución del sistema $\begin{cases} x'=y \\ y'=4x+z \\ z'=-z+4e^{-2t} \end{cases}$ con $\begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=1 \\ z(0)=-4 \end{matrix}$ , y estudiar su estabilidad.

$3^a$ desacoplada: $z'=-z+4e^{-2t}$ , $z_p=Ae^{-2t} \to -2A=-A+4 \to \begin{cases} z=Ce^{-t}-4e^{-2t} \\ z(0)=-4 \end{cases} \to \boxed{z=-4e^{-2t}}$

$\begin{cases} x'=y \\ y'=4x-4e^{-2t} \end{cases}$ , $x''-4x=-4e^{-2t}$, $x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+x_p$ , $x_p=Ate^{-2t}$, $\begin{matrix} x_p'=A(1-2t)e^{-2t} \\ x_p''=A(4t-4)e^{-2t} \end{matrix} \to A=1$

$x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+te^{-2t}$, $\begin{cases} x(0)=c_1+c_2=1 \\ x'(0)=2c_1-2c_2=-1 \end{cases} \to \boxed{x=(1+t)e^{-2t}} \to y=x'=\boxed{(-1-2t)e^{-2t}}$ .

Laplace: $\begin{cases} sX-1=Y \\ sY+1=4X+Z \\ sZ+4=-Z+\frac{4}{s+2} \to Z=\frac{-4s-4}{(s-2)(s+3)}=-\frac{4}{s+2} \uparrow \to z=-4e^{-2t} \end{cases}$

$\downarrow$

$s^2X-s+1=4X-\frac{4}{s+2}$ , $(s+2)(s-2)X=\frac{s^2+s-6}{s+2}=\frac{(s+2)(s+3)}{s+2}$ ,

$$X=\frac{s+3}{(s+2)^2}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2} \to x=(1+t)e^{-2t} , \ y=x' \uparrow$$

Matrices 3x3: (lo más largo) $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2-4)=0$, $\lambda=-1,-2,2 \to \mathbf{P}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\frac{1}{12}\mathbf{P}\begin{pmatrix} -16e^{-t} \\ -3e^{-2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}+\frac{1}{3}\mathbf{P}\int_0^t \begin{pmatrix} 4e^{t-s} \\ 3e^{-2t} \\ e^{2t-4s} \end{pmatrix} ds = \boxed{e^{-2t}\begin{pmatrix} 1+t \\ -1-2t \\ -4 \end{pmatrix}}$

Como $\exists\lambda=2$ (con $\text{Re}\lambda>0$), todas las soluciones del sistema y esta en particular son **inestables**. (Que la solución calculada $\mathbf{x}(t)\to\mathbf{0}$ cuando $t\to\infty$ no tiene nada que ver).

**4.** Sea $t^2(1+t)x''+t(3+2t)x'+x=0$.
**a]** Hallar, trabajando por series en $t=0$, una solución no trivial que no contenga el $\ln t$.
**b]** Probar que todas sus soluciones están acotadas cuando $t\to\infty$.

**a]** $t=0$ singular regular con $r(r-1)+3r+1=0$, $r=-1$ doble. Sin $\ln t$ tenemos $x_1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_kt^{k-1} \to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k-1)(k-2)c_kt^{k-1}+(k-1)(k-2)c_kt^k+3(k-1)c_kt^{k-1}+2(k-1)c_kt^k+c_kt^{k-1}\right]=0 \to$$

$t^{-1}$: $c_0-3c_0+c_0=0 \to c_0$ indeterminado; $t^0$: $2c_0-2c_0+c_1=0$, $c_1=0$;

$k^2c_k+(k-1)(k-2)c_{k-1}=0$, $c_k$ en función del anterior $\to \boxed{x_1=\frac{1}{t}}$.

**b]** $-\int\frac{3+2t}{t(1+t)}dt=\int\left[\frac{1}{t+1}-\frac{3}{t}\right]dt \to x_2=\frac{1}{t}\int\frac{t+1}{t}dt=1+\frac{\ln t}{t}$ . $x_1$ y $x_2$ acotadas cuando $t\to\infty$.

(Calculando la $x_2$ de Frobenios llegaríamos, con más trabajo, a esa misma solución).

Para responder a **b]** no se necesita la solución, basta estudiar el punto del infinito:

$t=\frac{1}{s} \to (1+\frac{1}{s})(s^2\ddot{x}+2s\dot{x})+(3+\frac{2}{s})(-s\dot{x})+x=0 \to s(1+s)\ddot{x}-s\dot{x}+x=0$,

$s=0$ es singular regular con $r=1,0 \to x_1=s\sum\cdot$ y $x_2=\sum\cdot+dx_1\ln s$

ambas acotadas cuando $s\to0^+$ ($t\to\infty$), pues $s\ln s\to0$ cuando $s\to0^+$.

**2.** Resover $x''+x=2(\cos t)^{-3}$ con $x(0)=0\,,\ x'(0)=0\,.$

$$\lambda^2+1=0\,,\ \lambda=\pm i \to\ x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+x_p\,.$$

$$|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix}\cos t & \operatorname{sen} t\\ -\operatorname{sen} t & \cos t\end{vmatrix}=1 \to\ x_p=s\int\tfrac{2}{c^2}-c\int\tfrac{s}{c^3}=\tfrac{2s^2}{c}-\tfrac{c}{c^2}=\tfrac{1}{\cos t}-2\cos t$$

$$\to\ x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+\tfrac{1}{\cos t}\ \to\ \begin{cases}x(0)=c_1+1=0\\ x'(0)=c_2=0\end{cases}\ \to\ \boxed{x=\tfrac{1}{\cos t}-\cos t=\tfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}}$$

**3a.** Sea la ecuación [e] $(1+x^3y)+(x^4+x^3y)\frac{dy}{dx}=0\,.$ **a]** Hallar la solución general de [e] sabiendo que tiene un factor integrante que sólo depende de $x$. **b]** Precisar cuántas soluciones de [e] cumplen $y(1)=1$ y dar su expresión lo más simplificada posible.

**a]** $(1+x^3y)g(x)+(x^4+x^3y)g(x)\frac{dy}{dx}$ es exacta si $x^3f(x)=(4x^3+3x^2y)g(x)+(x^4+x^3y)g'(x)$

es decir, si $g'(x)=\frac{-3x^3-3x^2y}{x^4+x^3y}g(x)=-\frac{3}{x}g(x)\ \to\ g(x)=\mathrm{e}^{-\int(3/x)dx}=\frac{1}{x^3}$ factor integrante.

$\frac{1}{x^3}+y+(x+y)\frac{dy}{dx}$ exacta $\to$ $\begin{matrix}H=-\frac{1}{2x^2}+xy+p(y)\\ H=xy+\frac{y^2}{2}+q(x)\end{matrix}$ $\to\ H=\boxed{y^2+2xy-\frac{1}{x^2}=C}$ solución general.

**b]** Solución única, pues $f\equiv\frac{-1-x^3y}{x^4+x^3y}$ y $f_y$ continuas en entorno de $(1,1)$. La calculamos:

$y(1)=1\ \to\ 1+2-1=2=C\ \to\ y=-x\pm\sqrt{x^2+2+x^{-2}}=-x\pm(x+\frac{1}{x})\ \to\ \boxed{y=\frac{1}{x}}$ ($y=-2x-\frac{1}{x}$ no lo cumple)

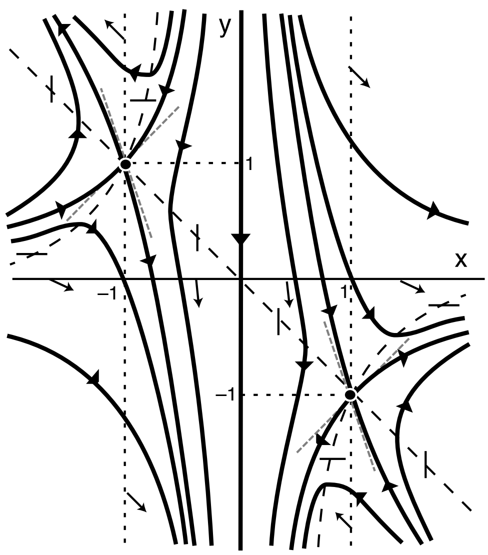
**3b.** Dibujar el mapa de fases de [S] $\begin{cases}x'=x^4+x^3y\\ y'=-1-x^3y\end{cases}$. (Utilizar los cálculos realizados en **3a.**).

Puntos críticos: $x^3(x+y)=0\ \to\ x=0,\ -1=0$ imposible, ó

$y=-x,\ x^4=1\ \to\ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. AL: $\begin{pmatrix}4x^3+3x^2y & x^3\\ -3x^2y & -x^3\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}:\pm2\to\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}:\pm2\to\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Ambos puntos son sillas (del lineal y del no lineal).




Vertical: $y=-x\,,\ y=0$
Horizontal: $y=-1/x^3$ . Algunos valores del campo:

$$\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}x^4\\-1\end{pmatrix},\ \mathbf{v}(\pm1,y)=(1\pm y)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

En **3a** hemos hallado la expresión de las órbitas.

Las separatrices son las curvas que pasan por $(1,-1)$ y $(-1,1)$. Para ambos es $C=-2\ \to$

$y=-x\pm\sqrt{x^2-2+x^{-2}}=-x\pm(x-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\,,\ -2x+\frac{1}{x}\,.$

Y tenemos además las otras dos curvas halladas en **3a**.

# Soluciones del examen de sept05 de Ecuaciones Diferenciales I (C)

**1.** Sea la ecuación $y' = \frac{1-2ty^3}{3t^2y^2}$ .

**a]** Hallar su solución general por dos caminos diferentes.
**b]** Precisar cuántas soluciones cumplen $y(1)=1$ y escribirlas explícitamente.

**a]** Bernouilli: $3y^2y' = -\frac{2}{t}y^3 + \frac{1}{t^2} \overset{z=y^3}{\to} z' = -\frac{2z}{t} + \frac{1}{t^2} \to z = \frac{C}{t^2} + \frac{1}{t^2}\int \frac{t^2}{t^2} \to \boxed{y = \left[\frac{C+t}{t^2}\right]^{1/3}}$ ;

Exacta: $2ty^3 - 1 + 3t^2y^2y' = 0$ , $M_y = N_t = 6ty^2$ , $\begin{array}{l} U = t^2y^3 - t + p(y) \\ U = t^2y^3 + q(t) \end{array} \to t^2y^3 - t = C \uparrow$ .

**b]** Como $f$ y $f_y$ son continuas en un entorno de $(1,1)$ , hay solución única con ese dato.

Imponiéndolo en la solución recuadrada: $1 = [C+1]^{1/3} \to C = 0 \to \boxed{y = \frac{1}{t^{1/3}}}$ .

[Si se impone en la solución implícita de la exacta, se tiene: $C = 0 \to t = 0$ ó $ty^3 - 1 = 0$ ;
la primera es curva integral que ni es solución ni pasa por $(1,1)$, y la segunda es la de arriba].

**2.** Sea $x^{IV} + 4x''' + cx'' + 4x' + x = 16\,e^t$ .

**a]** Discutir su estabilidad según los valores de la constante $c$ .
**b]** Para $c=6$ , hallar la solución que satisface $x(0)=x''(0)=0$ , $x'(0)=x'''(0)=2$ .
**c]** Hallar **una** solución de la ecuación para cada uno de los valores de $c$ .

**a]** $P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + c\lambda^2 + 4\lambda + 1$ es el polinomio característico.

Del signo de los coeficientes deducimos que $\begin{array}{l} \text{si } c<0 \text{ es I} \\ \text{si } c\leq 0 \text{ no es AE} \end{array}$ [y si $c>0$ no sabemos nada].

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & c & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to 4>0 \,,\, c>1 \,,\, c>2 \,,\, 1>0 \to \boxed{\mathbf{AE} \Leftrightarrow c>2} \,,\, \boxed{c<2 \Rightarrow \mathbf{I}} .$$

Si $\boxed{c=2}$ , $\lambda = \pm qi \to \begin{array}{l} q^4 - 2q^2 + 1 = 0 \\ 4q(1-q^2) = 0 \end{array} \to \lambda = \pm i \to P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda^2+4\lambda+1)$

$\to \lambda = \pm i$ simples y $\lambda = -2 \pm \sqrt{3}$ con $\text{Re}\lambda < 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{EnoA}}$

**b]** $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda+1)^4$ ; $x_p = Ae^t$ , $16A = 16 \to$

$x = (c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3)\,e^{-t} + e^t \overset{d.i.}{\to} \cdots\cdots \boxed{x = e^t - e^{-t}}$ .

O Laplace: $s^4X - 2s^2 - 2 + 4s^3X - 8s + 6s^2X - 12 + 4sX + X = \frac{16}{s-1}$ ,

$(s+1)^4X = 2s^2 + 8s + 14 + \frac{16}{s-1} = \frac{2(s+1)^3}{s-1} \to X = \frac{2}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \uparrow$

**c]** $\lambda=1$ es autovalor si $10+c=0 \Rightarrow x_p = Ae^t$ , $(10+c)A = 16 \to \boxed{x_p = \frac{16}{10+c}e^t}$ , si $c \neq -10$ .

Y si $c=-10$ [ $P(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda^2+6\lambda+1)$ ] , $x_p = At^2e^t$, $x_p' = A(t^2+2t)e^t$, $x_p'' = A(t^2+4t+2)e^t$,

$x_p''' = A(t^2+6t+6)e^t$, $x_p^{IV} = A(t^2+8t+12)e^t \to 16Ae^t = 16e^t \to \boxed{x_p = t^2e^t}$

**3.** Sea $(1+t^2)x'' + tx' - x = 0$ .
**a]** Hallar hasta orden $t^6$ el desarrollo en serie de la solución con $x(0)=1$ , $x'(0)=0$ .
**b]** Probar que posee soluciones que tienden hacia $0$ cuando $t\to\infty$ .

[Por si a alguien le es útil: $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}} = -\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ ].

**a]** $t=0$ regular, $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k \to \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_k t^{k-2} + k(k-1)c_k t^k\right] + \sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k t^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} -c_k t^k = 0$ .

$$t^0:\ 2c_2 - c_0 = 0 \to c_2 = \tfrac{1}{2}c_0\ ;\quad t^1:\ 6c_3 + c_1 - c_1 = 0 \to c_3 = 0\ ;$$

$$t^2:\ 12c_4 + 2c_2 + 2c_2 - c_2 = 0 \to c_4 = -\tfrac{1}{4}c_2 = -\tfrac{1}{8}c_0\ ;$$

$$t^k:\ (k+2)(k+1)c_{k+2} + (k^2-1)c_k = 0 \ \to\ c_{k+2} = -\tfrac{k-1}{k+2}c_k\ ,$$

$$\to\ c_5 = c_7 = \cdots = 0\ ,\ c_6 = -\tfrac{3}{6}c_4 = \tfrac{1}{16}c_0\ ,\ \ldots$$

$$\to\ x = c_0\left[1 + \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{8}t^4 + \tfrac{1}{16}t^6 + \cdots\right] + c_1 t \ \xrightarrow{c_0=1,\,c_1=0}\ \boxed{x = 1 + \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{8}t^4 + \tfrac{1}{16}t^6 + \cdots}\ .$$

O bien, $x_1 = t$ , $e^{-\int \frac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ , $x_2 = t\int \frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1+t^2} \to x = c_1 t + c_2\sqrt{1+t^2}$ .

Con los datos iniciales: $x = (1+t^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!}t^4 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}t^6 + \cdots$

**b]** A partir de la solución general es claro que las soluciones $C(t - \sqrt{1+t^2}\,) = \frac{-C}{t+\sqrt{1+t^2}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ .

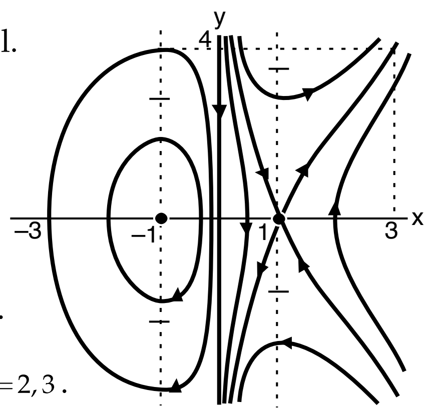
O bien, $t = \frac{1}{s} \ \to\ s^4(1+\frac{1}{s^2})\ddot{x} + 2s^3(1+\frac{1}{s^2})\dot{x} - \frac{s^2}{s}\dot{x} - x = s^2(1+s^2)\ddot{x} + s(1+2s^2)\dot{x} - x = 0$ ,
para la que $s=0$ es punto singular regular con $r(r-1)+r-1 = 0$ , $r = \pm 1$
$\Rightarrow s\sum c_k s^k$ son soluciones que tienden a $0$ cuando $s\to 0^+$ ( $t\to\infty$ ).

[La serie de $t=0$ converge si $|t|<1$ (donde asegura el teorema) y no informa sobre el infinto].

**4.** Sea [S] $\begin{cases} x' = x^2 y \\ y' = x^4 - 1 \end{cases}$ . **a]** Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases de [S].
[Comprobar que una separatriz pasa por el punto $(3,4)$ y que hay una órbita que pasa por $(-3,0)$ y $(-1,4)$ ].
**b]** Hallar la solución de [S] que cumple $x(1) = y(1) = 0$ .

**a]** Puntos críticos: $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . A. lineal: $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 4x^3 & 0 \end{pmatrix}_{\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 4 & 0 \end{pmatrix} \to$ $+$ , silla, $\pm 2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$ ; $-$ , centro de la AL

$\begin{matrix} f(x,-y) = -x^2 y = -f(x,y) \\ g(x,-y) = x^4 - 1 = g(x,y) \end{matrix} \ \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ centro también del no lineal.




Órbitas (separable): $y\,\frac{dy}{dx} = \frac{x^4-1}{x^2} \ \to\ \boxed{y^2 = \frac{2x^3}{3} + \frac{2}{x} + C}$ .

[Confirmamos simétría de las órbitas son respecto a $y=0$ ].

Separatrices: $(1,0) \to 0 = \frac{2}{3} + 2 + C \to y = \pm\sqrt{\frac{2x^3}{3} + \frac{2}{x} - \frac{8}{3}}\,\Big|_{x=3} = \pm 4$ .

Por $(-3,0)$ y $(-1,4)$ pasa la misma órbita cerrada (la de $C = \frac{56}{3}$ ).

Vertical: $y=0$ , $x=0$ .
Horizontal: $x = \pm 1$ .
$\mathbf{v}(x, 2(x-1)) = \begin{pmatrix} 2x^2(x-1) \\ x^4 - 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}, 4\begin{pmatrix} 9 \\ 20 \end{pmatrix}$, si $x = 2, 3$ .

**b]** $x(1) = y(1) = 0 \to$ órbita $x=0 \to y' = -1$ , $y = K - t \ \xrightarrow{y(1)=0}\ \mathbf{x} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}}$ .

# Soluciones del examen de feb06 de Ecuaciones Diferenciales I (C)

**1.** Sea la ecuación $y' = \frac{2t(1-y)}{y+t^2}$ .
**a]** Hallar la solución (lo más simplificada que se pueda) con: i) $y(0)=1$ , ii) $y(0)=-1$ .
**b]** Estudiar si existe solución satisfaciendo $y(1)=-1$ . [2 puntos]

**a]** $(2ty-2t)+(y+t^2)\frac{dy}{dt}$ exacta: $M_y = N_t = 2t \Rightarrow \begin{array}{l} U = t^2y - t^2 + p(y) \\ U = t^2y + \frac{y^2}{2} + q(t) \end{array} \rightarrow y^2+2t^2y-2t^2 = C$ .

[O bien, $\frac{dt}{dy} = \frac{t^2+y}{2t\,(1-y)}$ (Bernouilli) $\stackrel{z=t^2}{\rightarrow} z' = \frac{z}{1-y} + \frac{y}{1-y} \rightarrow z = \frac{C}{1-y} + \frac{1}{1-y}\int y\,dy = \frac{C+y^2}{2(1-y)} = t^2 \uparrow$ ].

Tanto para i) como para ii) se tiene: $1=C \rightarrow 0 = y^2-1+2t^2y-2t^2 = (y-1)(y+1+2t^2) \rightarrow$

La solución de i) es $\boxed{y=1}$ (calculable a ojo) y la de ii) es $\boxed{y=-1-t^2}$

[soluciones únicas, pues $f$ y $f_y$ son continuas en un entorno de $(0,1)$ y $(0,-1)$ ].

**b]** $f$ no es continua en $(1,-1)$ : el TEyU, aplicado a la ecuación inicial, no nos dice nada.

Estudiemos la 'equivalente': $\frac{dt}{dy} = \frac{t^2+y}{2t(1-y)}$ . Se tiene que $\left.\frac{dt}{dy}\right|_{(1,-1)} = 0$ y que tanto $\frac{1}{f}$ como $\left[\frac{1}{f}\right]_t$ son continuas en un entorno de $(1,-1)$ (el denominador es no nulo).

Existe una única solución $t(y)$ con $t(-1)=1$ y tiene pendiente $t'=0$ [única curva integral (de pendiente infinita) por $(1,-1)$] $\Rightarrow$ **No hay solución** $y(t)$ **con** $y(1)=-1$ .

[Llevando el dato a la solución general: $C=-3 \rightarrow y = -t^2 \pm \sqrt{t^4+2t^2-3} = -t^2 \pm \sqrt{(t^2-1)(t^2+3)}$ , y ninguna de las dos funciones son derivables en $t=1$ ].

**2.** Sea $t(1+t)x'' + (2+3t)x' + x = 0$ .
**a]** Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial que esté acotada en $t=0$ .
**b]** Probar que no todas sus soluciones son analíticas en $t=-1$ .
**c]** Comprobar **a]** y **b]** utilizando el hecho de que $x = \frac{1}{t}$ es solución. [3 puntos]

**a]** $t=0$ singular regular, $r(r-1)+2r+0 = 0 \rightarrow r = 0,-1 \rightarrow x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ acotada en $t=0$ .

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_kt^{k-1} + k(k-1)c_kt^k\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[2kc_kt^{k-1} + 3kc_kt^k\right] + \sum_{k=0}^{\infty} c_kt^k = 0 .$$

$$t^0 : 2c_1+c_0 = 0 \rightarrow c_1 = -\tfrac{1}{2}c_0 ; \quad t^1 : 2c_2+4c_2+3c_1+c_1 = 0 \rightarrow c_2 = -\tfrac{2}{3}c_1 = \tfrac{1}{3}c_0 ;$$

$$t^k : [(k+1)k + 2(k+1)]c_{k+1} + [k^2+2k+1]c_k = 0 \rightarrow c_{k+1} = -\tfrac{k+1}{k+2}c_k \rightarrow$$

$$c_3 = -\tfrac{3}{4}c_2 = -\tfrac{1}{4}c_0 , \; c_4 = -\tfrac{4}{5}c_3 = \tfrac{1}{5}c_0 , \dots ; \; c_k = -\tfrac{k}{k+1}c_{k-1} = \tfrac{k-1}{k+1}c_{k-2} = \cdots$$

$$\rightarrow \boxed{x_1 = 1 - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{3}t^2 - \tfrac{1}{4}t^3 + \cdots + (-1)^k\tfrac{1}{k+1}t^k + \cdots} = \frac{\log(1+t)}{t} .$$

**b]** Si se identifica la serie, es claro que la solución que define no es analítica en $t=-1$ .

O bien, $s = t+1 \rightarrow s(s-1)x'' + (3s-1)x' + x = 0 \rightarrow r=0$ doble $\rightarrow$ $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_ks^k$ analítica, pero $x_2 = s\sum_{k=0}^{\infty} b_ks^k + x_1\log s$ no analítica en $s=0$ ( $t=-1$ ).

**c]** Utilizando que $x_1 = \frac{1}{t}$ : $e^{-\int\frac{2+3t}{t(1+t)}} = e^{-\int[\frac{2}{t}+\frac{1}{1+t}]} = \frac{1}{t^2(1+t)}$ , $x_2 = \frac{1}{t}\int\frac{dt}{1+t} = \frac{\log(1+t)}{t}$ , solución acotada en $t=0$ con el desarrollo de arriba y claramente no analítica en $t=-1$ .

**3. a]** Hallar **una** solución de la ecuación $x''' + x'' + 2x' + 8x = \mathrm{e}^{at}$ para: i) $a=1$ , ii) $a=-2$ .
**b]** Precisar la estabilidad de la solución hallada en cada caso. [1.5 puntos]

**a]** $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 8$ es el polinomio característico.

**ai]** $P(1)=12 \Rightarrow \lambda=1$ no es autovalor $\Rightarrow x_p = A\mathrm{e}^t$ , $12A = 1 \rightarrow \boxed{x_p = \frac{1}{12}\mathrm{e}^t}$

**aii]** $P(-2)=0 \Rightarrow \lambda=-2$ sí es autovalor $\Rightarrow x_p = At\,\mathrm{e}^{-2t}$, $x_p' = A(1-2t)\,\mathrm{e}^{-2t}$,
$x_p'' = A(4t-4)\,\mathrm{e}^{-2t}$, $x_p''' = A(12-8t)\,\mathrm{e}^{-2t} \rightarrow 10A\,\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t} \rightarrow \boxed{x_p = \frac{1}{10}t\,\mathrm{e}^{-2t}}$

**b]** La estabilidad sólo depende de la ecuación homogénea, en concreto de las raíces de $P(\lambda)$ .

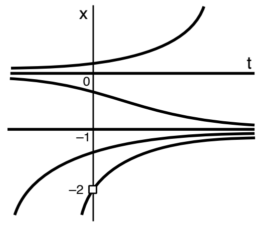
$\lambda=-2$ autovalor $\rightarrow P(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda^2-\lambda+4) \rightarrow \lambda=-2$ y $\lambda=\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$ .

Hay autovalores con $\mathrm{Re}\lambda > 0 \Rightarrow$ todas las soluciones son **inestables** (para cualquier $a$ ).

[Lo confirma R-H: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 > 0\,,\ -6 < 0 \Rightarrow$ **I**. El signo de los coeficientes no decía nada.]

**4a.** Determinar la estabilidad de la solución de $x' = x+x^2$ que cumple $x(0)=-2$. [1 punto]

La ecuación es autónoma y el dibujo basta para precisar la estabilidad.




$x = 0, -1$ , soluciones constantes.

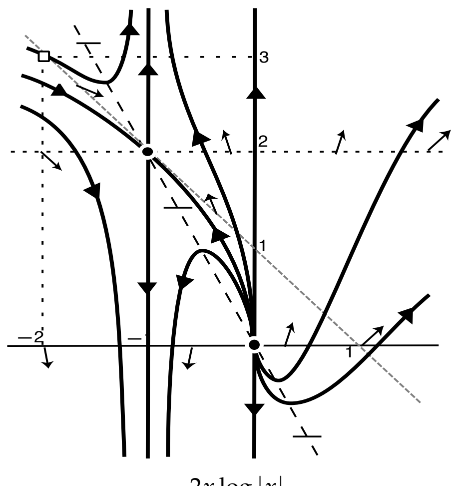
$x(1+x)$ $> 0 \Rightarrow$ crecen si $x<-1$ ó $x>0$ .
$< 0 \Rightarrow$ decrecen si $-1<x<0$ .

La solución con $x(0)=-2$ y todas las cercanas están definidas para todo $t \geq 0$ y tienden a $-1$ cuando $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ es **AE**.

**4b.** Sea [S] $\begin{cases} x' = x+x^2 \\ y' = 2x+y \end{cases}$ . i) Hallar las órbitas y dibujar el mapa de fases de [S].
ii) Hallar $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ , si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es la solución de [S] con $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. [2.5 puntos]

i) Ecuación de las órbitas: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+x^2} + \frac{2}{1+x}$ (lineal). $\int \frac{dx}{x+x^2} = \int \big[\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\big]dx = \log\frac{x}{1+x}$

$\rightarrow \mathrm{e}^{\int a} = \frac{x}{1+x} \rightarrow y = \frac{Cx}{1+x} + \frac{2x}{1+x}\int\frac{dx}{x} = \boxed{\frac{x(C+2\log|x|)}{1+x}}$ .




Puntos críticos: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A. lineal: $\begin{pmatrix} 1+2x & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

En $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hay $\lambda=1$ doble asociado a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (nodo1tgI).

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda=1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\lambda=-1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: silla.

Campo vertical: $x=0,-1$ (órbitas). Horizontal: $y=-2x$ .

$\mathbf{v}(x,0) = x\begin{pmatrix} 1+x \\ 2 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(x,2) = (1+x)\begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$ .

La separatriz estable se deforma: $\mathbf{v}(x,1-x) = (1+x)\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como $\frac{\log|x|}{1+x} \underset{x\to-1}{\longrightarrow} -1$ [L'Hôpital], esta separatriz es la órbita de $C=0$: $y = \frac{2x\log|x|}{1+x}$

[su valor en $x=-2$ es: $4\log 2 \approx 4\times 0.69 < 3$ ].

ii) $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \boxed{-1}$ , según dice el dibujo de 4a. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \boxed{\infty}$ , puesto que la órbita asociada está por encima de la separatriz [ $y(t)$ , solución de lineal, está definida $\forall t \geq 0$ ].

Tanto 4a como 4bii se pueden responder, con bastante más esfuerzo, hallando las soluciones de [S]:

$$x' = x+x^2 \text{ (Bernouilli o separable)} \rightarrow x = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-t}-1} \overset{x(0)=-2}{\rightarrow} x = \frac{2}{\mathrm{e}^{-t}-2} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} -1 \ ;$$

$$y' = y + \frac{4}{\mathrm{e}^{-t}-2} \overset{y(0)=3}{\rightarrow} y = \mathrm{e}^t\big(3 - 4\log|2-\mathrm{e}^{-t}|\big) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} \infty\,.$$

# Soluciones del examen de sept06 de Ecuaciones Diferenciales I (C)

**1.** Hallar la solución de $\begin{cases} x' = y-2 \\ y' = 2x-y \end{cases}$ con $\begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=4 \end{matrix}$, y precisar su estabilidad. [2.5 puntos]

Convirtiendo el sistema en ecuación: $x'' = y' = 2x-y = 2x-x'-2$ , $x''+x'-2x = -2$

$$\xrightarrow{\lambda=1,-2;\, x_p=1} x = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t} + 1 \xrightarrow{x(0)=0,\, x'(0)=4-2} x = \boxed{1-\mathrm{e}^{-2t}} \rightarrow y = 2+x' = \boxed{2+2\,\mathrm{e}^{-2t}} .$$

$$\text{Por Laplace: } \begin{cases} sX = Y-\frac{2}{s} \\ sY-4 = 2X-Y \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} Y = sX+\frac{2}{s} \downarrow \\ (s+1)(sX+\frac{2}{s})-4 = 2X \rightarrow (s+2)(s-1)X = 2-\frac{2}{s} \rightarrow \end{matrix}$$

$$X = \frac{2(s-1)}{s(s+2)(s-1)} = \frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \rightarrow Y = \frac{2}{s} + \frac{2}{s+2} \rightarrow x = 1-\mathrm{e}^{-2t} ,\ y = 2+2\,\mathrm{e}^{-2t}.$$

$$\text{Con matrices: } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 ,\ \lambda = -2,1 \rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ,\ \mathbf{P^{-1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ,\ \mathrm{e}^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} .$$

$$\mathbf{x} = \tfrac{1}{3}\mathbf{P}\mathrm{e}^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{3}\mathbf{P}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} ds = \tfrac{1}{3}\mathbf{P}\left[\begin{pmatrix} -4\mathrm{e}^{-2t} \\ 4\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2s-2t}\big|_0^t \\ -4\mathrm{e}^{t-s}\big|_0^t \end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{3}\mathbf{P}\begin{pmatrix} -1-3\mathrm{e}^{-2t} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{e}^{-2t} \\ 2+2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Para evitar la integración se puede buscar una $\mathbf{x}_p$ constante (que podría no existir):

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 = b-2 \\ 0 = 2a-b \end{matrix} \rightarrow \mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{d.i.}} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{e}^{-2t} \\ 2+2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Como existe un autovalor positivo $\lambda = 1$ todas las soluciones del sistema son **inestables**, la calculada en particular (que ella esté acotada, no tiene nada que ver).

**2.** Sea $x'' + [2-2t]x' + [1-2t]x = 0$ .
**a]** Hallar el desarrollo en serie hasta $t^4$ de la solución que satisface $x(0)=0$ , $x'(0)=1$ .
**b]** Hallar esta solución en términos de una integral, sabiendo que $x=\mathrm{e}^{-t}$ es otra solución.
**c]** Utilizar **b]** para comprobar **a]**. [2.5 puntos]

**a]** $t=0$ regular $\rightarrow$ llevamos $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ a la ecuación, teniendo en cuenta que $c_0=0$ y $c_1=1$ .

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty}[2kc_k t^{k-1} - 2kc_k t^k] + \sum_{k=0}^{\infty}[c_k t^k - 2c_k t^{k+1}] = 0 \rightarrow$$

$t^0$ : $2c_2+2c_1+c_0 = 2c_2+2 = 0 \rightarrow c_2 = -1$ ; $t^1$ : $6c_3+4c_2-c_1-2c_0 = 6c_3-5 = 0 \rightarrow c_3 = \frac{5}{6}$ ;

$t^2$ : $12c_4+6c_3-3c_2-2c_1 = 12c_4+6 = 0 \rightarrow c_4 = -\frac{1}{2}$ . Tenemos: $\boxed{x = t - t^2 + \frac{5}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \cdots}$ .

[La regla de recurrencia $c_{k+2} = \frac{-2(k+1)c_{k+1}+(2k-1)c_k+2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}$ no es útil para tan pocos términos].

O bien: $x''(0) + 2x'(0) + x(0) = 0$ , $x''(0) = -2 \nearrow$ . Y derivando la ecuación:

$$x''' + [2-2t]x'' - [1+2t]x' - 2x = 0 \rightarrow x'''(0)+2x''(0)-x'(0)-2x(0) = 0 ,\ x'''(0) = 5 \uparrow$$

$$x^{iv} + [2-2t]x''' - [3+2t]x'' - 4x' = 0 \rightarrow x^{iv}(0)+2x'''(0)-3x''(0)-4x'(0) = 0 ,\ x^{iv}(0) = -12 \uparrow$$

**b]** $x_1 = \mathrm{e}^{-t}$ , $\mathrm{e}^{-\int a} = \mathrm{e}^{t^2-2t} \rightarrow x_2 = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^{s^2} ds$ (con límites para fijar la primitiva).

$$x = c\mathrm{e}^{-t} + k\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^{s^2} ds ,\ x' = -c\mathrm{e}^{-t} - k\mathrm{e}^{-t}\int_0^t + k\mathrm{e}^{t^2-t} \xrightarrow{\text{d.i.}} \boxed{x = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^{s^2} ds} .$$

**c]** $x = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \left[1 + s^2 + \frac{1}{2}s^4 + \cdots\right] ds = \left[1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \cdots\right]\left[t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{10}t^5 + \cdots\right]$

$$= t - t^2 + \left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\right]t^3 - \left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}\right]t^4 + \cdots = t - t^2 + \tfrac{5}{6}t^3 - \tfrac{1}{2}t^4 + \cdots$$

**3.** Sea (E) $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2u-v}{v}$ . **a]** Hallar su solución general y la particular que cumple $v(1)=1$ .
**b]** Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. [2.5 puntos]

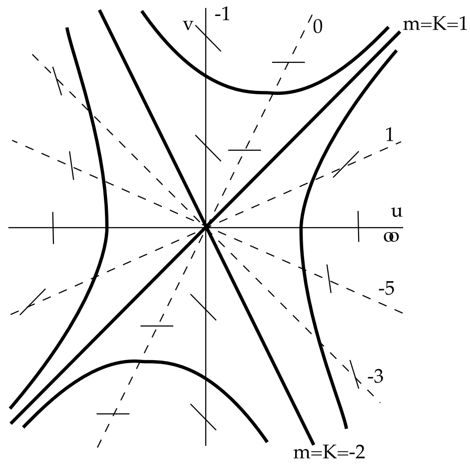
**a]** Homogénea. $z=\frac{v}{u}\to uz'=\frac{2-z}{z}-z=-\frac{z^2+z-2}{z}$ , $\int\frac{z\,dz}{(z+2)(z-1)}=-\int\frac{du}{u}+C$ ,

$\frac{z}{(z+2)(z-1)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-1}=\frac{A(z-1)+B(z+2)}{(z+2)(z-1)}\to A=\frac{2}{3}$ , $B=\frac{1}{3}\to$

$2\log(z+2)+\log(z-1)=C-3\log u$ , $(z+2)^2(z-1)=\frac{C}{u^3}$ ,

$(\frac{v}{u}+2)^2(\frac{v}{u}-1)=\frac{C}{u^3}$ , $\boxed{(v+2u)^2(v-u)=C}$ .

$v(1)=1\to C=0\to\boxed{v=u}$ [única solución con ese dato, pues $f$ , $f_v$ continuas en un entorno].




**b]** Las isoclinas son $v=mu$ : $K=f(u,mu)=\frac{2}{m}-1$ .

Hay rectas solución si $K=m\to m^2+m-2=0$ , $m=-2,1$

[estas se veían ya en la solución general].

| $m$ | 2 | 0 | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 0 | $\infty$ | $-3$ | $-5$ | 1 |

. Además, sobre $u=0$ es $K=-1$ .

[Las curvas integrales pintadas son las órbitas del sistema lineal $u'=v$ ; $v'=2u-v$ cuyos autovalores y autovectores se calcularon en el problema **1**: confirma que es una silla con esas rectas separatrices].

**4.** Clasificar los puntos críticos y dibujar el mapa de fases de [e] $x''=x^3-x-xx'$ .
[Ayudas: Comprobar que hay órbitas que son parábolas.
Haciendo $u=\frac{1}{2}[x^2-1]$ en la ecuación de las órbitas se obtiene la (E) del problema **3**]. [2.5 puntos]

$\begin{cases}x'=v\\ v'=x^3-x-xv\end{cases}$ . Puntos críticos: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ .

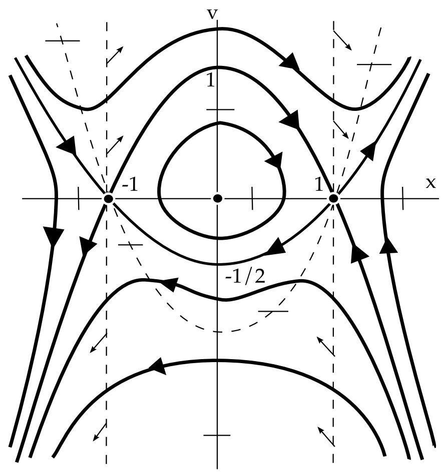
A.L. $\begin{pmatrix}0&1\\3x^2-1-v&-x\end{pmatrix}$ en $\binom{\pm1}{0}$ es $\begin{pmatrix}0&1\\2&\mp1\end{pmatrix}$ ; en $\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ .

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to\lambda=-2,1$ ; $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\to\lambda=2,-1$ . **Sillas**.

[En toda ecuación el $\mathbf{v}$ asociado a $\lambda$ es $\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}$ ].

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to\lambda=\pm i$ : centro de la aproximación lineal (centro o foco de nuestro sistema).

La ecuación no es exacta, pero como $g(-x,v)=-g(x,v)$ , las órbitas son simétricas respecto a $x=0$ y sigue siendo un **centro del no lineal**.




La ecuación de las órbitas [o] $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{x-x^3}{v}-x$ no es de ningún tipo conocido.

Si tiene soluciones que son parábolas, por la simetría, deben tener la forma $v=Ax^2+B$ :

$$(Ax^2+B)2Ax=x-x^3-x(Ax^2+B)\to\begin{cases}2A^2+A-1=0\to A=1/2,-1\searrow\\ 2AB+B+1=0\qquad B=-1/2,1.\end{cases}$$

Las parábolas halladas $y=1-x^2$ e $y=\frac{x^2-1}{2}$ son precisamente las **separatrices** de los puntos silla.

Como $u=\frac{1}{2}[x^2-1]\to\dfrac{dv}{du}x=\dfrac{dv}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dv}{dx}=[\dfrac{2u}{v}-1]x\to$ (E) $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2u-v}{v}$ ,

deducimos que las órbitas son $(v+x^2-1)^2(2v-x^2+1)=C$ , y aparecen otra vez las separatrices.

Para completar el dibujo obtenemos información del campo $\mathbf{v}$ :

Campo vertical (como en toda ecuación) en $v=0$ . Horizontal en $\begin{matrix}x=0\\v=x^2-1\end{matrix}$ . $\mathbf{v}(\pm1,v)=\begin{pmatrix}v\\\mp v\end{pmatrix}$ .

# Soluciones del examen de febrero de 2008 de Ecuaciones Diferenciales I (A y C)

**1.** Sea $y' = -3y + 3ty^{2/3}$. Hallar su solución general y una o dos soluciones (si las hay) con: i) $y(1)=0$, ii) $y(0)=1$. [2 puntos]

Es una ecuación de Bernouilli. $\frac{1}{3}y^{-2/3}y' = -y^{-1/3}+t \xrightarrow{z=y^{1/3}} z' = -z+t \to$

$$z = Ce^{-t} + e^{-t}\int e^t t\,dt = Ce^{-t} + t-1 \text{ (ó } z_p = At+B \text{ ...)} \to \boxed{y=(Ce^{-t}+t-1)^3}.$$

Como $f$ es continua en todo $\mathbf{R}^2$ y $f_y = -3+2ty^{-1/3}$ lo es en $\mathbf{R}^2-\{y=0\}$, hay solución única con $y(t_o)=y_o$ si $y_o \neq 0$ y hay solución, aunque no sabemos si es única o no, cuando $y_o=0$.

Por tanto, **con la condición** ii) **habrá una sola solución**. Imponiendo el dato:

$$1 = (C-1)^3 \to C=2 \to \boxed{y=(2e^{-t}+t-1)^3}.$$

Para i) la solución general nos da una solución: $0 = (Ce^{-1})^3 \to C=0 \to \boxed{y=(t-1)^3}$.

Pero hay otra solución clara perdida en los cálculos: $\boxed{y\equiv 0}$. Así pues, **no hay unicidad**.

**2.** Sea $\begin{cases} x' = 2-y \\ y' = -2y+cz \\ z' = 2x-y \end{cases}$. **a]** ¿Para qué valores de $c$ es asintóticamente estable? **b]** Resolver si $c=-1$ con $x(0)=0$, $y(0)=0$, $z(0)=-4$. [3 puntos]

**a]** $P(\lambda) = -\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & c \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3+2\lambda^2+c\lambda+2c$ $[= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$ si $c=-1]$.

Por el signo de los coeficientes, no puede ser asintóticamente estable cuando $c \leq 0$.
Para ver lo que sucede cuando $c>0$ acudimos a Routh-Hurwitz:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2c & c & 2 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix} \to 2, 0, 0 \to \textbf{nunca es AE}.$$

[De hecho, con un poco de vista se observa que $\forall c$: $P(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda^2+c) \to \lambda = -1, \pm\sqrt{-c} \to$ **EnoA** si $c>0$, **I** si $c<0$ (y si $c=0$ también **I** pues hay un único v.p. asociado a $\lambda=0$ doble)].

**b]** Para resolverlo **por matrices** comenzamos hallando los vectores propios:

$$\lambda=1: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda=-1: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda=-2: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Para ahorrarnos calcular $\mathbf{P}^{-1}$ y las integrales buscamos ($\lambda=0$ no autovalor):

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \to \begin{cases} 0=2-b \\ 0=-2b-d \\ 0=2a-b \end{cases} \to \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \\ d=-4 \end{matrix}.\quad \mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{d.i.}} \boxed{\begin{pmatrix} 1-e^{-2t} \\ 2-2e^{-2t} \\ -4 \end{pmatrix}}$$

**Convirtiendo en ecuación**: $y=2-x' \to \begin{matrix} z=x''+2x'-4 \\ z'=2x+x'-2 \end{matrix} \to x'''+2x''-x'-2=-2 \to$

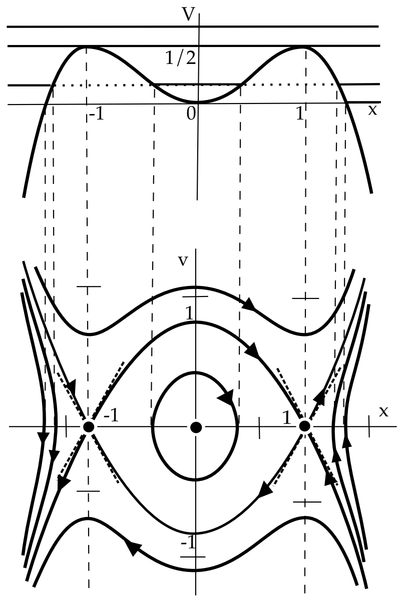
$$\begin{cases} x = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{-2t} + 1 \\ x(0)=0, x'(0)=2, x''(0)=-4 \end{cases} \to x=1-e^{-2t},\ y=2-x',\ z=-2y-2y'.$$

**Laplace**: $\begin{cases} sX = \frac{2}{s} - Y \\ sY = -2Y-Z \to Z=-(s+2)Y \searrow \\ sZ+4 = 2X-Y \end{cases}$ $\quad 2X=4+(1-2s-s^2)Y \uparrow$

$(s^3+2s^2-s-2)Y = 4s-\frac{4}{s} = \frac{4(s+1)(s-1)}{s} \to Y = \frac{4}{s(s+2)} \downarrow$ $\quad Z = -\frac{4}{s}$

$$z=-4,\ Y = \frac{A}{s}+\frac{B}{s+2} = \cdots = \frac{2}{s}-\frac{2}{s+2} \to y=2-2e^{-2t},\ x=\frac{y-z'}{2}=1-e^{-2t}.$$

**3. a]** Dibujar el mapa de fases de (E) $x''=2x^3-2x$ . **b]** ¿Para qué valores de $b$ es periódica la solución $x(t)$ de (E) que cumple $x(0)=0$ , $x'(0)=b$ ? **c]** ¿Qué ecuación de primer orden satisface la solución $x(t)$ de (E) con $x(0)=0$ , $x'(0)=1$ ? [2.5 puntos]




**a]** Al ser exacta conviene dibujar la función potencial:

$$V(x)=-\int(2x^3-2x)dx=x^2-\tfrac{1}{2}x^4,$$

que tiene un mínimo en $x=0$ (centro del mapa de fases), y dos máximos en $x=\pm1$ (sillas). Es $V(0)=0$ , $V(\pm1)=\frac{1}{2}$ .

Las órbitas vienen dadas por:

$$\tfrac{v^2}{2}+V(x)=C \to \ v=\pm\sqrt{x^4-2x^2+2C}\,.$$

Con las técnicas generales de mapas de fases:

$\begin{cases} x'=v \\ v'=2x^3-2x \end{cases} \to$ puntos críticos $\binom{0}{0}$, $\binom{\pm1}{0}$, con $\lambda=\pm i\sqrt{2}$ , $\lambda=\pm2$ .

El origen es centro del no lineal (simetrías o exactitud) y los vectores propios de las sillas son, como en toda ecuación, $\binom{1}{\lambda}$.

La pendiente es vertical si $v=0$ (en toda ecuación) y es horizontal si $x=0,\pm1$ (rectas por los puntos).

Las separatrices son las órbitas que pasan por $(\pm1,0)$ :

$0=\pm\sqrt{-1+2C} \ \to \ C=\frac{1}{2} \ \to \ v=\pm(1-x^2)$ , parábolas que cortan el eje $v$ en $\pm1$ .

**b]** A la vista de los cálculos anteriores y del mapa de fases está claro que es periódica si $|b|<1$ .

**c]** La órbita asociada a esos datos es $v=\boxed{1-x^2=x'}$ (la solución de esta autónoma es $x=\operatorname{th} t$ ).

**4.** Sea $3tx''+(2-6t)x'+2x=0$ . **a]** Hallar una solución que no sea analítica en $t=0$ . **b]** Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial que sea analítica en $t=0$ . [2.5 puntos]

$t^2x''+t\frac{(2-6t)}{3}x'+\frac{2t}{3}x=0 \ \to \ t=0$ es singular regular con $\lambda(\lambda-1)+\frac{2}{3}\lambda=0 \ \to \ \lambda=\frac{1}{3}$ , $0$ .

**a]** Es no analítica $x_1=t^{1/3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kt^k \ \to$ que llevada a la ecuación nos da:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[3(k+\tfrac{1}{3})(k-\tfrac{2}{3})c_kt^{k-2/3}+2(k+\tfrac{1}{3})c_kt^{k-2/3}-6(k+\tfrac{1}{3})c_kt^{k+1/3}+2c_kt^{k+1/3}\big]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\big[(3k+1)kc_kt^{k-2/3}-6kc_kt^{k+1/3}\big]=0 \ \to \ t^{-2/3}:\ 0c_0=0\,;\ \ t^{1/3}:\ 4c_1=0\,;$$

$$t^{k-2/3}:\ c_k=\frac{6(k-1)}{k(3k+1)}c_{k-1}\to c_2=c_3=\cdots=0\to \boxed{x_1=t^{1/3}}\,.$$

**b]** Conocida una solución tan sencilla, podemos abandonar Frobenius:

$$x_2=t^{1/3}\int\frac{e^{\int(2-\frac{2}{3t})}}{t^{2/3}}dt=t^{1/3}\int\frac{1+2t+2t^2+\frac{4}{3}t^3+\cdots}{t^{4/3}}dt=-3(1-t-\tfrac{2}{5}t^2-\tfrac{1}{6}t^4+\cdots)=-3\sum\frac{2^nt^n}{n!(1-3n)}\,.$$

O bien, continuar con las series:

$$x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k\to\sum_{k=0}^{\infty}[(3k-1)kb_kt^{k-1}-2(3k-1)b_kt^k]=0 \ \to \ t^0: b_1=-b_0\,;\ \ t^1: b_2=\tfrac{2}{5}b_1=-\tfrac{2}{5}b_0\,;$$

$$t^{k-1}: b_k=\frac{2(3k-4)}{k(3k-1)}b_{k-1}\ \to\ b_3=\tfrac{5}{12}b_2=-\tfrac{1}{6}b_0\,;\ldots\to\ \boxed{x_2=1-t-\tfrac{2}{5}t^2-\tfrac{1}{6}t^3+\cdots}\,.$$

# Soluciones de septiembre 2008 de Ecuaciones Diferenciales I (grupos A y C)

**1.** Sea $y'=1+\frac{y}{t}-\frac{y^2}{t^2}$ . **a]** Hallar su solución general y la(s) solución(es), si existe(n), con: i) $y(1)=1$ , ii) $y(1)=-1$ . **b]** Dibujar aproximadamente sus curvas integrales. [2.5 puntos]

**a]** $z=\frac{y}{t} \to tz'=1-z^2 \to \int \frac{2dz}{1-x^2} = \ln\frac{1+z}{1-z} = 2\ln t+C \to \frac{1+z}{1-z}=Ct^2 \to z=\frac{Ct^2-1}{Ct^2+1} \to \boxed{y=t\,\frac{Ct^2-1}{Ct^2+1}}$ .

[O Riccati: $y=t$ solución $\xrightarrow{z=y-t} z' = -\frac{z}{t}-\frac{z^2}{t^2} \xrightarrow{u=1/z} u' = \frac{u}{t}+\frac{1}{t^2} \to u = Ct+t\int t^{-3}dt = Ct-\frac{1}{2t}$

$\to\ z = \frac{2t}{Ct^2-1} \to\ y = t+\frac{2t}{Ct^2-1} = t\,\frac{Ct^2+1}{Ct^2-1}$ , casi igual].

$f$ y $f_y$ continuas en un entorno de $(1,1)$ y de $(1,-1)$ $\Rightarrow$ solución única para cada dato.

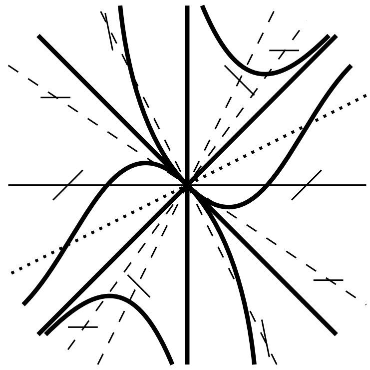
$y(1) = \frac{C-1}{C+1} = 1$ imposible (es la $y=t$ perdida). $y(1) = \frac{C-1}{C+1} = -1 \to C=0 \to y=-t$ .

**b]** Isoclinas (como en toda homogénea) $y=mt \to\ K=1+m-m^2$ .

Rectas solución si $K=m \to m=\pm 1$ . $m=0 \to K=1$ .

$m=2 \to K=-1$ .
$m=-2 \to K=-3$ . Horizontal: $K=0 \to\ m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \approx$ 1.6 –0.6

$t=0$ es curva integral vertical ( $t=0 \to K=\infty$ ).



$y''=-\frac{y}{t^2}+\frac{2y^2}{t^3}+\left(\frac{t-2y}{t^2}\right)\left(\frac{t^2+ty-y^2}{t^2}\right)=\frac{2y^3-ty^2-2t^2y+t^3}{t^4}=\frac{(y-t)(y+t)(2y-t)}{t^4}$

$y''=0\ \to$ rectas solución e $y=\frac{t}{2}$ genuinos puntos de inflexión.

**2.** Sea $x'''+3x''+4x'+bx=2$ . **a]** Discutir su estabilidad según los valores de $b$ .
**b]** Hallar una solución particular para todo valor de la constante $b$ .
**c]** Hallar si $b=2$ la solución con $x(0)=0$ , $x'(0)=1$ , $x''(0)=0$ . [3 puntos]

**a]** $P(\lambda) = \lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+b$ $[= (\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+2)$ si $b=2\,]$.

Por el signo de los coeficientes, no puede ser asintóticamente estable cuando $b=0$ y es inestable si $b<0$ . Para ver lo que sucede cuando $b>0$ acudimos a Routh-Hurwitz:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & 4 & 3 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \to\ 3\,,\, 12-b>0\,,\, b>0 \to \boxed{\textbf{AE} \text{ si } 0<b<12} \quad (\text{e } \textbf{I} \text{ si } b>12\,).$$

Para $b=0$: $P(\lambda)=\lambda(\lambda^3+3\lambda+4) \to \lambda=0$ (simple) y $\lambda=\frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$ $\to$ **EnoA**

Para $b=12$: $P(\lambda)=(\lambda^3+3)(\lambda^2+4) \to \lambda=\pm 2i$ (simples) y $\lambda=-3$ $\to$ **EnoA**

**b]** Si $b\neq 0$ , $\lambda=0$ no es autovalor y hay $x_p=A\ \to\ x_p=\frac{2}{b}$ .

Si $b=0$ , $\lambda=0$ es autovalor y la $x_p=At\ \to\ x_p=\frac{t}{2}$ .

**c]** La solución general para $b=2$ es: $x = c_1\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}(c_2\cos t+c_3\,\mathrm{sen}\,t)+1\ \to$

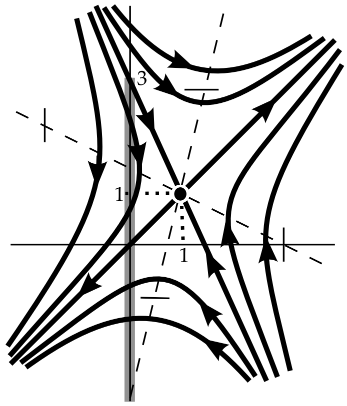
$$\begin{matrix} x' = \mathrm{e}^{-}[-c_1+(c_3-c_2)c-(c_2+c_3)s] \\ x'' = \mathrm{e}^{-}[c_1-2c_3c+2c_2s] \end{matrix} \xrightarrow{d.i.} \begin{matrix} c_1+c_2+1=0 \\ -c_1+c_3-c_2=1 \\ c_1-2c_3=0 \end{matrix} \to \begin{matrix} c_1=c_3=0 \\ c_2=-1 \end{matrix} \to \boxed{x=1-\mathrm{e}^{-t}\cos t} .$$

Laplace: $s^3X-s+3s^2X-3+4sX+2X = \frac{2}{s} \to X = \frac{s^2+3s+2}{s(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{s+2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$

$\to A(s^2+2s+2)+(Bs+C)s = s+2 \to X = \frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1} \to x=1-\mathrm{e}^{-t}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]^{\uparrow}$

**3.** Sea [S] $\begin{cases} x'=x+2y-3 \\ y'=4x-y-3 \end{cases}$. **a]** Hallar la expresión de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. **b]** ¿Para qué valores de $a$ tiende a $-\infty$ cuando $t\to\infty$ la $y(t)$ de la solución de [S] con $x(7)=0\,,\,y(7)=a$? [2.5 puntos]

**a]** El sistema (además de claramente **lineal**) es exacto:




$$\to \begin{matrix} H_y=x+2y-3 \\ H_x=y-4x+3 \end{matrix} \to H=y^2+xy-2x^2-3y+3x = C\,.$$

O con un poco de vista, $\boxed{(y-x)(y+2x-3)=C}$, órbitas.

El punto crítico: $\begin{matrix} x=3-2y \searrow \\ 9-9y=0 \to \end{matrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ha de ser silla o centro.

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix} \to \lambda=\pm 3$ silla, con $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, respectivamente.

$\mathbf{v}$ es vertical si $x=3-2y$ y horizontal si $y=4x-3$.

Para un sistema lineal no se necesita más para hacer un buen dibujo.

**b]** A la vista del mapa de fases, las soluciones (definidas $\forall t$ por ser lineal con los coeficientes continuos) tales que su $y(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}-\infty$ son las situadas a la izquierda de la separatriz estable:

$y=3-2x$ [recta de pendiente $-2$ por $(1,1)$, o a partir de las órbitas].

Como esta separatriz corta $x=0$ en $y=3$, los $a$ pedidos son los $\boxed{a<3}$.

[Para ver la utilidad del mapa de fases vamos a llegar al mismo resultado resolviendo el sistema:

$x=\frac{y'+y+3}{4} \to \frac{y''+y'}{4}=\frac{y'+y+3}{4}+2y-3 \to y''-9y=-9 \to y=c_1e^{3t}+c_2e^{-3t}+1$; de los datos:

$$\begin{matrix} y(7)=a \\ y'(7)=-a-3 \end{matrix} \to \begin{matrix} c_1e^{21}+c_2e^{-21}+1=a \\ 3c_1e^{21}-3c_2e^{-21}=-a-3 \end{matrix} \to 6c_1e^{21}=2a-3 \to y=(\tfrac{a}{3}-1)e^{3(t-7)}+\cdots].$$

**4.** Sea [e] $2t^2x''+t(1+t^2)x'-x=0$. **a]** Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución de [e] que no sea analítica en $t=0$. **b]** ¿Cuántas soluciones de [e] satisfacen: i) $x(0)=x'(0)=3$; ii) $x(3)=x'(3)=0$? [2 puntos]

**a]** $t=0$ es singular regular con $\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}=0 \to 2\lambda^2-\lambda-1=0 \to \lambda=1,\,-\frac{1}{2}$.

Es analítica $x_1=t\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ y no lo es $x_2=t^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k$, que llevada a la ecuación nos da:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[2(k-\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{3}{2})b_kt^{k-1/2}+(k-\tfrac{1}{2})b_kt^{k-1/2}+(k-\tfrac{1}{2})b_kt^{k+3/2}-6b_kt^{k-1/2}\big]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\big[(2k^2-3k)b_kt^{k-1/2}+(k-\tfrac{1}{2})b_kt^{k+3/2}\big]=0 \to$$

$$t^{-1/2}:\ 0b_0=0,\ b_0 \text{ indeterminado};\quad t^{1/2}:\ -b_1=0\,;$$

$$t^{k-1/2}:\ k(2k-3)b_k+(k-\tfrac{5}{2})b_{k-2}=0 \to b_k=-\frac{2k-5}{2k(2k-3)}b_{k-2} \to$$

$$b_3=b_5=\cdots=0 \text{ y además: } b_2=-\frac{(-1)}{4\cdot 1}b_0=\frac{1}{4}b_0\,,\ b_4=-\frac{3}{8\cdot 5}b_2=-\frac{3}{160}b_0\,,\ \ldots$$

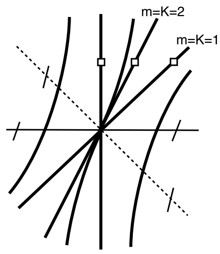
Por tanto $\boxed{x_2=t^{-1/2}\big[1+\tfrac{1}{4}t^2-\tfrac{3}{160}t^4+\cdots\big]}$.

**b]** El TEyU asegura solución única (la trivial $x\equiv 0$) para ii) y no dice nada para i) por ser $a(t)$ y $b(t)$ discontinuas en $t=0$. Como la solución general de [e] es $x=c_0[t+\cdots]+b_0[t^{-1/2}+\cdots]$, ninguna solución cumple i).

**1.** Sea $\frac{dy}{dt}=\frac{(y-t)^2}{t^2}+1$ . **a]** Hallar sus rectas solución y resolverla como: i) homogénea, ii) Riccati.
**b]** Discutir cuántas soluciones hay con: i) $y(0)=2$, ii) $y(1)=2$, iii) $y(2)=2$, hallándolas si existen.

**a]** En una homogénea (de isoclinas $y=mt$) las rectas solución salen de:

$$f(m)=(m-1)^2+1=m \to m=1,2 \to \boxed{y=t} \text{ e } \boxed{y=2t}.$$




[Con esto y el crecimiento, sería muy fácil hacer el dibujo de las soluciones].

i) $tz'+z=z^2-2z+2$ , $\int\frac{dz}{(z-1)(z-2)}=\int\frac{dz}{z-2}-\int\frac{dz}{z-1}=\ln\frac{z-2}{z-1}=\ln t+C$ , $\frac{y-2t}{y-t}=Ct$

ii) $u=y-t \to u'=\frac{u^2}{t^2}+1-1=\frac{u^2}{t^2} \to \frac{1}{u}=\frac{1}{t}-C \to y=t+\frac{t}{1-Ct} \to \boxed{y=\frac{2t-Ct^2}{1-Ct}}$ .

**b]** Como $f$ y $f_y=2(y-t)/t^2$ son continuas en un entorno de cada uno de los dos puntos, el TEyU asegura **solución única** para ii) y iii). Son, respectivamente, las rectas $y=2t$ e $y=t$ .

$\big[$Ojo con las soluciones mentirosas; imponiendo iii): $2=\frac{4-4C}{1-2C} \to 2=4$ ; $y=t$ se ha perdido$\big]$.

El teorema no dice nada para i), pero aplicándolo a $\frac{dt}{dy}=\frac{t^2}{(y-t)^2+t^2}$ , deducimos que por $(0,2)$ pasa la única curva integral vertical $t\equiv 0 \Rightarrow$ **no existe solución** $y(t)$ **cumpliendo** $y(0)=2$ .

[La solución general nos decía que todas satisfacen $y(0)=0$ , pero se podía haber perdido alguna].

**2.** Sea $\begin{cases} x'=-3x+4y+cz \\ y'=-x+y-z \\ z'=x-2y \end{cases}$ . **a]** Para $c=-2$ , hallar la solución con $x(0)=0$ , $y(0)=1$ , $z(0)=2$ .
**b]** Discutir la estabilidad del sistema según los valores de $c\in\mathbf{R}$.

**a]** $\begin{cases} x'=-3x+4y-2z \\ y'=-x+y-z \\ z'=x-2y \end{cases}$ . Mediante matrices: $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-2\lambda^2-\lambda=-\lambda(\lambda+1)^2$ .

$$\lambda=0: \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda=-1: \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} \underset{\text{d.i.}}{\to} \begin{matrix} 2c_1+2c_2+c_3=0 \\ c_1+c2 \quad =1 \\ -c_1-c3 \quad =2 \end{matrix} \to c_1=0, c_2=1, c_3=-2 , \boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}}.$$

Más largo: $\mathbf{x}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P^{-1}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \mathbf{P^{-1}}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ , $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ .

O bien, de la $3^a$ ecuación: $x=z'+2y \to \left.\begin{matrix} z''+2y'=-3z'-2y-2z , & z''+3z'+2z+2(y'+y)=0 \\ y'=-z'-y-z & z'+z+y'+y=0 \end{matrix}\right\} \to$

$$z''+z'=0 \to z=c_1+c_2e^{-t} \xrightarrow{z(0)=2, z'(0)=-2} \boxed{z=2e^{-t}} \xrightarrow{z'+z=0} y'+y=0 \to y=Ce^{-t} \xrightarrow{y(0)=1} \boxed{y=e^{-t}}$$

$$\to x=z'+2y=-2e^{-t}+2e^{-t} \to \boxed{x=0}$$

O Laplace: $\begin{cases} sX=-3X+4Y-2Z \\ sY-1=-X+Y-Z \\ sZ-2=X-2Y \to Y=\frac{1}{2}X-\frac{s}{2}Z+1 \end{cases}$ $\begin{matrix} (s+1)X=4-2(s+1)Z \\ (s+1)X=4-2s+(s^2-s-2)Z \end{matrix} \to 2s=(s^2+s)Z \to Z=\frac{2}{s+2}$

$\to X=0 \to Y=-\frac{s}{s+1}+1=\frac{1}{s+1}$ . Como arriba.

**b]** $-\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & c \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3+2\lambda^2-(c+1)\lambda-(c+2)$ . Del signo de los coeficientes:

El tercer coeficiente es negativo si $c>-1$ y el cuarto si $c>-2 \Rightarrow$ si $c>-2$ alguno es negativo y el sistema es **I**. Si $c=-2$ no es **AE** y si $c<-2$ aún no lo sabemos.

Routh-Hurwitz: $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -c-2 & -c-1 & 2 \\ 0 & 0 & -c-2 \end{pmatrix} \to$ si $2>0$ , $-c>0$ y $-c-2>0$ es **AE** $\to$

$\boxed{\textbf{AE} \Leftrightarrow c<-2}$ e $\boxed{\textbf{I} \text{ si } c>-2}$ (ya lo sabíamos).

Si $\boxed{c=-2}$ (el caso de **a]**) es $\boxed{\textbf{EnoA}}$ [ $\lambda=-1$ doble y $\lambda=0$ simple].

**3.** Sea $tx''+(2t^2-1)x'-4\alpha tx=0$ .

**a]** Precisar para qué valores de $\alpha$ hay soluciones que son polinomios que se anulan en $t=0$ .

**b]** Para $\alpha=1$ , hallar una solución analítica en $t=0$ y determinar si todas las soluciones lo son.

**c]** Para $\alpha=0$ , hallar la solución general sin utilizar series.

**a]** $t^2x''+t(2t^2-1)x'-4\alpha t^2x=0 \to t=0$ singular regular con $r=2,0$ . Se anula en $t=0$ :

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2} \to \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_kt^{k+1}+2(k+2)c_kt^{k+3}-(k+2)c_kt^{k+1}-4\alpha c_kt^{k+3}\right]=0$$

$t^1$ : $2c_0-2c_0=0$ , $c_0$ indeterminado; $t^2$ : $6c_1-3c_1=0$ , $c_1=0$ ;

$t^3$ : $12c_2+4c_0-4c_2-4\alpha c_0=0$ , $c_2=\frac{\alpha-1}{2}c_0$ ;

$t^{k+1}$ : $(k+2)kc_k-(4\alpha-2k)c_{k-2}=0$ , $c_k=\frac{4\alpha-2k}{(k+2)k}c_{k-2} \to c_3=c_5=c_7=0$ .

$$c_{2k}=\frac{\alpha-k}{(k+1)k}c_{2k-2} \to c_4=\frac{\alpha-2}{6}c_2=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{12}c_0 ,\ c_6=\frac{\alpha-3}{12}c_4=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{144}c_0 ,\ldots$$

Si $\alpha\notin\mathbf{N}$ , ninguno de los $c_{2k}$ se anula, pero **si** $\alpha=1,2,\ldots$ **, la serie pasa a ser un polinomio** $P_{2n}$ de grado $2n$ , pues el $c_{2n}=0$ y también lo son todos los siguientes.

$$\Big[\text{En particular: } P_1=t^2 \ ,\ P_2=t^2+\tfrac{1}{2}t^4 \ ,\ P_3=t^2+t^4+\tfrac{1}{6}t^6 \ ,\ \ldots\Big].$$

**b]** $x_1=t^2$ es solución analítica de $tx''+(2t^2-1)x'-4tx=0$ en $t=0$ . Otra solución es:

$$x_2=t^2\int\frac{e^{\int\left(\frac{1}{t}-2t\right)}}{t^4}=t^2\int\frac{e^{-t^2}}{t^3}=t^2\int\left[\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t}+\frac{t}{2}-\frac{t^3}{6}+\cdots\right]=-\frac{1}{2}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{24}+\cdots-t^2\log t \ .$$

**No todas las soluciones son analíticas en** $t=0$ . Se podría ver siguiendo con Frobenius:

$$x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+d\,t^2\ln t ,\ x_2'=\sum_{k=1}^{\infty}kb_kt^{k-1}+2d\,t\ln t+d\,t ,\ x_2''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kt^{k-2}+2d\ln t+3d$$

$$\to \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kt^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[2kb_kt^{k+1}-kb_kt^{k-1}\right]-\sum_{k=0}^{\infty}4b_kt^{k+1}+d\left[2t+2t^3\right]=0 \to$$

$t^0$ : $b_1=0$ ; $t^1$ : $2b_2-2b_2-4b_0+2d=0 \to d=2b_0\neq 0$ (como antes; y $b_2$ indeterminado).

**c]** $x'=y \to y'=(\frac{1}{t}-2t)y \to y=Cte^{-t^2} \to \boxed{x=K+Ce^{-t^2}}$ . [Las series de Frobenius son las de $x_1=1-e^{-t^2}$ y $x_2=1$ (analíticas)].

**4.** Sea (E) $x''=1-x^2-(x')^2$. **a]** Resolver la ecuación de las órbitas de (E).

**b]** Dibujar el mapa de fases y decidir si es periódica la solución de (E) con $x(0)=x'(0)=1$ .

**a]** $\begin{cases} x'=v \\ v'=1-x^2-v^2 \end{cases}$ , $\frac{dv}{dx}=\frac{1-x^2}{v}-v \xrightarrow{z=v^2} \frac{dz}{dx}=-2z+2-2x^2$ lineal de coeficientes constantes.

Más corto que integrar por partes: $z_p=Ax^2+Bx+C \to z=\boxed{Ce^{-2x}-x^2+x+\frac{1}{2}=v^2}$ .

**b]** Puntos críticos: $v=0 \to x=\pm 1$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x & -2y \end{pmatrix} \xrightarrow{(\pm 1,0)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix} \to \lambda^2\pm 2=0 \to$$

$\binom{-1}{0}$ silla con $\lambda=\pm\sqrt{2}$ $\left[\mathbf{v}=\binom{1}{\lambda}\text{, como en toda ecuación}\right]$.

$\binom{1}{0}$ centro de la AL. Como $g$ es par en $v$ se conserva.

Campo horizontal sobre la circunferencia $x^2+v^2=1$

[y vertical sobre el eje $x$ como en toda ecuación].

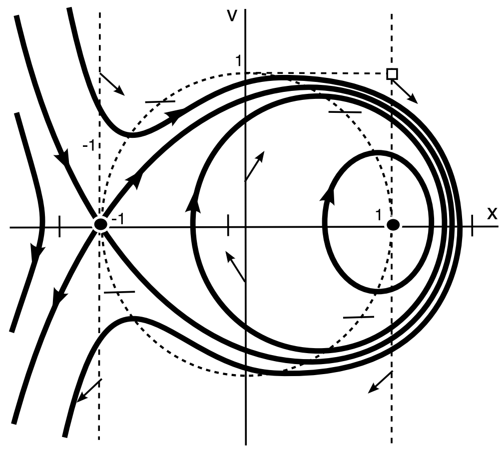
La separatriz es la órbita que pasa por $(-1,0) \to$

$Ce^2-1-1+\frac{1}{2}=0 \to v^2=\frac{3}{2}e^{-2x-2}-x^2+x+\frac{1}{2}$

[El 2º miembro se hace 0 para un $x>1$ ($\to-\infty$), y si $x$ muy negativo se parece a un múltiplo de $e^{-2x}$ ].

Hay una órbita sencilla (circunferencia) para $C=0$ :

$v^2+(x-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$ [corta $v=0$ en $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\approx 1.4,-0.4$ ].




$\mathbf{v}(0,v)=\begin{pmatrix} v \\ 1-v^2 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(\pm 1,v)=\begin{pmatrix} v \\ -v^2 \end{pmatrix}$ .

La órbita por $(1,1)$ no es cerrada, pues la separatriz corta $x=1$ en $v=\sqrt{\frac{3e^{-4}+1}{2}}<1$ (también lo dice el campo). Por tanto, una solución de la que es proyección **no es periódica**.

**Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto)** **Soluciones de septiembre09**

**1.** Sea $\frac{dy}{dt}=\frac{2+t-y}{e^{y-t}+1}$. **a]** Hallar su solución general (en forma implícita) calculando un factor integrante $g(t)$ y por otro método diferente.

**b]** ¿Cuántas soluciones hay con $y(0)=0$? Dar su forma explícita si existen.

[Ayuda: ¿Qué forma tienen todas sus isoclinas? ¿Cuál es la asociada a la pendiente $K=1$?].

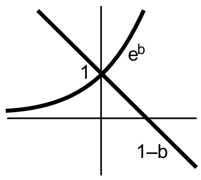
**a]** $g(t)(y-t-2)+g(t)(e^{y-t}+1)y'=0$ exacta si $g(t)=g'(t)(e^{y-t}+1)-g(t)e^{y-t}$, $g'(t)=g(t)$, $g(t)=e^t$

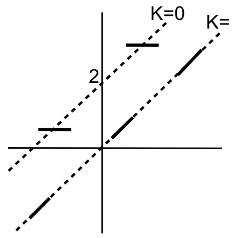
$\to\ e^t(y-t-2)+(e^y+e^t)y'=0\ \to\ \begin{array}{l} U_t=e^t(y-t-2)\to U=e^t(y-t-1)+p(y)\\ U_y=e^y+e^t\to U=e^y+ye^t+q(t)\end{array}\ \to\ \boxed{e^y+(y-t-1)\,e^t=C}$.

O bien, $z=y-t\ \to\ z'=\frac{2-z}{e^z+1}-1=-\frac{e^z+z-1}{e^z+1}\ \to \int\frac{e^z+1}{e^z+z-1}\,dz=\ln(e^z+z-1)=C-t\ \to\ e^z+z-1\overset{\uparrow}{=}Ce^{-t}$.

**b]** $f$ y $f_y$ continuas en todo $\mathbf{R}^2$ ($f$ cociente de funciones que lo son y su denominador no se anula) $\Rightarrow$ **existe solución única para cualquier dato inicial**, $y(0)=0$ en particular.

Las isoclinas son las rectas paralelas $y=t+b\ \to\ K=\frac{2-b}{e^b+1}$.
La de $K=1$ (es decir, aquella en que la pendiente de los segmentos es igual que la de la isoclina) cumple $e^b=1-b$, lo que sólo sucede si $b=0$. Por tanto, $\boxed{y=t}$ es solución, que es la única buscada, pues satisface $y(0)=0$.




[También se puede localizar esta solución observando que $z=0$ ($y=t$) es solución constante de la autónoma en $z$ de arriba, o tanteando en la ecuación inicial, o viendo que $y=t$ cumple $e^y+(y-t-1)\,e^t=0$, expresión que sale de la solución general al imponer el dato].

**2.** Sea $x'''+2x''+ax'=4e^t+2t$. **a]** Para $a=1$, hallar su solución con $x(0)=-2$, $x'(0)=x''(0)=0$.

**b]** Discutir la estabilidad de la ecuación según los valores de $a$.

**a]** $\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)^2\ \to$ solución general de la homogénea: $x=c_1+c_2e^{-t}+c_3te^{-t}$.

$x_p=Ae^t+Bt^2+Ct\ \to\ 4Ae^t+(4B+C)+2Bt=4e^t+2t\ \to\ A=1,\ B=1,\ C=-4\ \to$

Solución general de la no homogénea: $x=c_1+c_2e^{-t}+c_3te^{-t}+e^t+t^2-4t\ \to$

$x'=-c_2e^{-t}+c_3(1-t)e^{-t}+e^t+2t-4,\ x''=c_2e^{-t}+c_3(t-2)e^{-t}+e^t+2\ \xrightarrow{\text{datos}}$

$\left.\begin{cases} c_1+c_2+1=-2\\ -c_2+c_3-3=0\\ c_2-2c_3+3=0\end{cases}\right\}\ c_3=0,\ c_2=-3\ \nearrow c_1=0\ \to\ \boxed{x=e^t-3e^{-t}+t^2-4t}$.

O Laplace: $(s^3+2s^2+s)X+2(s^2+2s+1)=\frac{4}{s-1}+\frac{2}{s^2}=\frac{4s^2+2s+2}{s^2(s-1)}=\frac{2(2s-1)(s+1)}{s^2(s-1)}$, $X=-\frac{2}{s}+\frac{2(2s-1)}{s^3(s+1)(s-1)}$.

$$\frac{2(2s-1)}{s^3(s-1)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s-1}+\frac{E}{s+1}=\frac{As^2(s-1)(s+1)+Bs(s-1)(s+1)+C(s-1)(s+1)+Ds^3(s+1)+Es^3(s-1)}{s^3(s-1)(s+1)}$$

$s=1\to D=1$, $s=1\to E=-3$, $s=0\to C=2$, $s^1\to B=-4$, $s^4\to A+D+E=0\to A=2$

$$X=-\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s-1}-\frac{3}{s+1}\ \to\ x=-4t+t^2+e^t-3te^{-t}.$$

**b]** $\lambda(\lambda^2+2\lambda+a)$. Como es un $\lambda=0$, a simple vista deducimos que no puede ser **AE**.

Y los otros dos autovalores son fácilmente calculables: $\lambda_\pm=-1\pm\sqrt{1-a}$. De aquí:

Si $a=0$, hay $\lambda=0$ doble, lo que, al tratarse de una ecuación, basta para asegurar que es **I**.

Si $a<0$, es $\lambda_+>0$ (y $\lambda_-<0$), con lo que la ecuación también es **I**.

Si $a>0$, los $\lambda_\pm$ o son reales negativos o complejos con $\mathrm{Re}\lambda<0$. Por tanto, es **EnoA**.

[El signo de los coeficientes o RH (poco útiles conociendo los $\lambda$), sólo dan la inestabilidad para $a<0$; de aplicar RH al polinomio de grado 2 sí deduciríamos (considerando el $\lambda=0$) la EnoA para $a>0$].

**3.** Sea $tx''-2x'+4e^t x=0$ . **a]** Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $t=0$ . **b]** ¿Están acotadas en $t=0$ todas las soluciones?

**a]** $t^2x''+t(-2)x'+4te^t x=0 \to r(r-1)-2r=0 \to r_1=3,\, r_2=0 \to x_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+3}$ se anula en $t=0$ .

$$t(6c_0t+12c_1t^2+20c_2t^3+30c_2t^4+\cdots)-2(3c_0t^2+4c_1t^3+5c_2t^4+6c_3t^5+\cdots)$$
$$+(4+4t+2t^2+\cdots)(c_0t^3+c_1t^4+c_2t^5+\cdots)=0 \to$$

$$t^2: 0c_0=0 \to c_0 \text{ indeterminado;}$$
$$t^3: 12c_1-8c_1+4c_0=0 \to c_1=-c_0\,;$$
$$t^4: 20c_2-10c_2+4c_1+4c_0=0 \to c_2=0\,;$$
$$t^5: 30c_3-12c_3+4c_2+4c_1+2c_0=0 \to c_3=\tfrac{1}{9}c_0\,.$$

Ya tenemos 3 no nulos: $\boxed{x_1=t^3-t^4+\frac{1}{9}t^6+\cdots}$ .

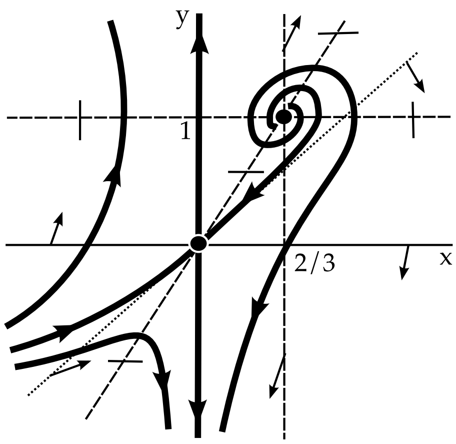
**b]** Como tanto $x_1$ como $x_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k+d\,t^3(1-t+\cdots)\ln t$ están acotadas en $t=0$ ( $t^3\ln t \underset{t\to 0}{\to} 0$ ), **todas las soluciones de la ecuación están acotadas en** $t=0$ .

**4.** Sea [S] $\begin{cases} x'=xy-x \\ y'=2y-3x \end{cases}$ . **a]** Dibujar el mapa de fases de [S]. **b]** Hallar la solución de [S] que cumple $x(2)=0$ , $y(2)=1$ .

**a]** $\begin{matrix} x=0 & y=1 \\ \downarrow & \downarrow \\ y=0 & x=2/3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2/3\\1\end{pmatrix}$ puntos críticos. $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} y-1 & x \\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 0\\-3 & 2\end{pmatrix} \to \lambda=-1,\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ \lambda=2,\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Silla.

$\begin{pmatrix}2/3\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 2/3\\-3 & 2\end{pmatrix} \to \lambda=1\pm i$, foco inestable.




Campo horizontal sobre la recta $y=\frac{3}{2}x$ .
Vertical sobre $x=1$ y sobre el eje $y$ [órbita].

$\mathbf{v}(x,0)=-x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ , $\mathbf{v}(2/3,y)=\frac{2}{3}(y-1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ .

$\mathbf{v}(x,x)=\begin{pmatrix}x^2-x\\-x\end{pmatrix}=-x\begin{pmatrix}1-x\\1\end{pmatrix}$ .

Como para $x<0$ la primera componente es mayor que la segunda, la separatriz estable se deforma $\smile$ .

No sabemos resolver la ecuación de las órbitas.

**b]** La órbita que pasa por el punto $(0,1)$ es la $x=0$ (única órbita sencilla y calculable).

Sobre ella es $x'=0$ (claro, es $x(t)\equiv 0$ para todo $t$ ), y además:

$y'=2y \to y=Ke^{2t} \underset{y(2)=1}{\longrightarrow} y=e^{2t-4}$ . La solución pedida es, pues, $\boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\e^{2t-4}\end{pmatrix}}$ .