Soluciones del examen de febrero de 2010 **Ecuaciones Diferenciales I (grupo C)**

1. Sea $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y^2}{2t(y-t)}$. **a]** Resolverla hallando un factor integrante $g(t)$ y por otro camino. **b]** Hallar la expresión explícita de todas las soluciones que cumplan $y(1)=2$. **c]** Precisar cuántas curvas integrales pasan por cada punto del plano.

a] $y^2g(t)+(2t^2-2ty)g(t)y'=0$, exacta si $2yg=(4t-2y)g+(2t^2-2ty)g'$, $g'=-\frac{2}{t}g \to g(t)=\frac{1}{t^2} \to$

$\frac{y^2}{t^2}+(2-\frac{2y}{t})$ exacta. $\begin{matrix} U=-\frac{y^2}{t}+p(y) \\ U=2y-\frac{y^2}{t}+q(t)\end{matrix} \to 2y-\frac{y^2}{t}=C$, $\boxed{y^2-2ty=Ct}$, $y=t\pm\sqrt{t^2+Ct}$.

También es homogénea: $\frac{y}{t}=z \to tz'=\frac{z^2}{2z-2}-z=\frac{2z-z^2}{2z-2}$, $\int\frac{2z-2}{z^2-2z}dz=-\int\frac{dt}{t}+C$, $z^2-2z=\frac{y^2-2ty}{t^2}=\frac{C}{t}$.

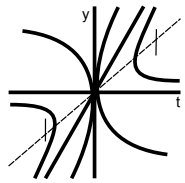
O Bernouilli, al dar la vuelta a la ecuación: $\frac{dt}{dy}=\frac{2t}{y}-\frac{2t^2}{y^2} \xrightarrow{z=t^{-1}} \frac{dz}{dy}=-\frac{2z}{y}+\frac{2}{y^2}$, $z=\frac{C}{y^2}+\frac{2}{y}=\frac{1}{t}$, $t=\frac{y^2}{C+2y}$.

b] El TEyU asegura solución única con $y(t_o)=y_o$ si $t_o\neq 0$ e $y_o\neq t_o$ (f , f_y continuas en un entorno).

La única con $y(1)=2$ es: $4-4=C$, $y(y-2t)=0 \to \boxed{y=2t}$ ($y=0$ no cumple esos datos).

c] El TEyU asegura solución única $t(y)$ de la ecuación equivalente por cualquier (t_o,y_o) si $y_o\neq 0$.

El único punto para el que los teoremas no precisan cuántas curvas integrales pasan es el $(0,0)$ (por los demás pasa una única $y(t)$ o $t(y)$, es decir, sólo una curva integral). Por $(0,0)$, además de las evidentes $y=0$, $t=0$ y la $y=2t$ de **b]**, pasan otras infinitas, como muestra la solución general [o se podría deducir del crecimiento y decrecimiento, aunque no supiésemos hallar las soluciones].



2. Sea $\begin{cases} x'=x+2z+t \\ y'=-2(a+1)x-2y-2z \\ z'=y-az\end{cases}$. **a]** Discutir la estabilidad del sistema según los valores de $a\in\mathbf{R}$. **b]** Para $a=-1$, hallar la solución con $x(0)=0$, $y(0)=1$, $z(0)=-1$.

$$-\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -2(a+1) & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+(a+1)\lambda^2+a\lambda+2(a+1) \quad [=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1) \text{ si } a=-1\,].$$

a] Si $a<0$ es inestable, si $a=0$ no es AE y si $a>0$ necesitamos Routh-Hurwitz:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 2(a+1) & a & a+1 \\ 0 & 0 & 2(a+1)\end{pmatrix} \to a+1\,,\ (a+1)(a-2)\,,\ a+1 \to \boxed{\textbf{AE} \text{ si } a>2\ ,\ \textbf{I} \text{ si } a<2} \text{ (y noAE si } a=2\text{)}.$$

Para $\boxed{a=2}$, $\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+6=(\lambda+3)(\lambda^2+2) \to \lambda=-3$, $\lambda=\pm\sqrt{2}\,i$ simples: $\boxed{\textbf{EnoA}}$

b] $\begin{cases} x'=x+2z+t \\ y'=-2y-2z \qquad z''+z=0\,,\ z=c_1+c_2e^{-t} \xrightarrow{z(0)=-1,z'(0)=0} \boxed{z=-1} \searrow \\ z'=y+z \to y=z'-z \nearrow \qquad \boxed{y=1}\end{cases}$.

$$x'=x+t-2 \xrightarrow[x_p=At+B]{} x=c_3e^t-t+1 \xrightarrow[x(0)=0]{} \boxed{x=1-t-e^t}\ .$$

Laplace: $\begin{cases} sX=X+2Z+\frac{1}{s^2} \\ sY-1=-2Y-2X \qquad (s^2+s)Z=-(s+1)\,,\ Z=-\frac{1}{s}\,,\ z=-1 \text{ y seguir como arriba, o:} \\ sZ+1=Y+Z \to Y=(s-1)Z+1 \nearrow\end{cases}$

$$Y=-1+\frac{1}{s}+1\,,\ y=1\ ,\quad X=\frac{1-2s}{s^2(s-1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s-1}\,,\ x=1-t-e^t\,.$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix},\ \mathbf{x}=\mathbf{P}\begin{pmatrix} -2e^t \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}+\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix} se^{t-s} \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}ds=\boxed{\begin{pmatrix} 1-t-e^t \\ 1 \\ -1\end{pmatrix}}$$

$\lambda=1,0,-1$

3. Sea $tx''-2x'+x=0$. Hallar una solución no trivial que se anule en $t=0$, escribiendo la regla de recurrencia, sus 4 primeros términos y la expresión de su término general.

a] $t^2x''+t(-2)x'+tx=0$, $t=0$ singular regular, $r(r-1)-2r=0$, $r=3,0$. Se anula en $t=0$:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+3} \to \sum_0\left[(k+3)(k+2)c_kt^{k+2}-2(k+3)c_kt^{k+2}+c_kt^{k+3}\right]=0 \to$$

$$t^2:\ 6c_0-6c_0=0,\ c_0 \text{ indeterminado};\quad t^3:\ 12c_1-8c_1+c_0=0,\ c_1=-\tfrac{1}{4}c_0;$$

$$t^{k+2}:\ (k+3)kc_k+c_{k-1}=0 \to \boxed{c_k=-\tfrac{1}{(k+3)k}c_{k-1}} \to$$

$$c_2=-\tfrac{1}{5\cdot2}c_1=\tfrac{1}{5\cdot4\cdot2\cdot1}c_0=\tfrac{1}{40}c_0;\quad c_3=-\tfrac{1}{6\cdot3}c_2=-\tfrac{1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}c_0=-\tfrac{1}{720}c_0;\ \ldots$$

$$c_k=\tfrac{1}{(k+3)(k+2)\cdot k(k-1)}c_{k-2}=-\tfrac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)\cdot k(k-1)(k-2)}c_{k-3}=\cdots$$

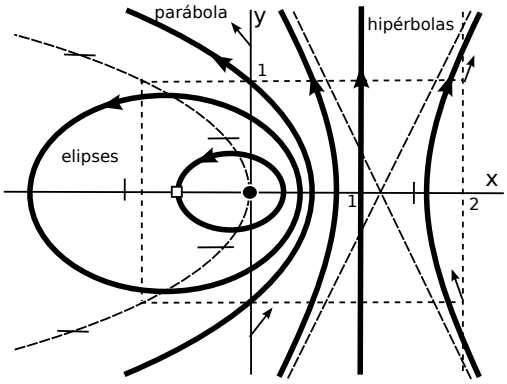
$$\boxed{x_1=t^3-\tfrac{1}{4}t^4+\tfrac{1}{40}t^5-\tfrac{1}{720}t^6+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{6(-1)^k}{(k+3)!\,k!}t^{k+3}}.$$

4. **a]** Resolver la ecuación de las órbitas y dibujar el mapa de fases del sistema $\begin{cases}x'=y(x-1)\\ y'=x+y^2\end{cases}$.

b] Precisar un a tal que la solución con $x(0)=a$, $y(0)=0$ sea periódica no constante y hallar el periodo de esta solución (escribir el sistema en polares).

a] $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-1}+\frac{x}{y(x-1)}\overset{z=y^2}{\to} z'=\frac{2z}{x-1}+\frac{2x}{x-1}$, $z=C(x-1)^2+(x-1)^2\int\frac{2x-2+2}{(x-1)^3}dx$, $\boxed{y^2=C(x-1)^2+1-2x}$

($C<0$ elipses, $C>0$ hipérbolas).



Punto crítico $\binom{0}{0}$ con $\lambda=\pm i$. Centro de la AL, y del no lineal por ser simétricas las órbitas respecto a $y=0$.

v vertical si $y=0$ ó $x=1$ (órbita). Horizontal si $x=-y^2$.

$$\mathbf{v}(0,y)=\binom{-y}{y^2},\quad \mathbf{v}(2,y)=\binom{y}{2+y^2}.$$

La órbita más sencilla: $x=\frac{1-y^2}{2}$ (parábola).

Polares: $\begin{cases}r'=r^2(c^2s+s^3)=r^2\operatorname{sen}\theta\\ \theta'=c^2+s^2=1 \to \theta=t+K\end{cases}$

$\frac{dr}{d\theta}=r^2\operatorname{sen}\theta \to \frac{1}{r}=C+\cos\theta$, $1-x=C\sqrt{x^2+y^2}$

(da de otra forma las mismas órbitas de arriba).

b] Para cualquier $a<\frac{1}{2}$ ($a\neq0$) la solución es periódica no trivial (órbita elíptica).

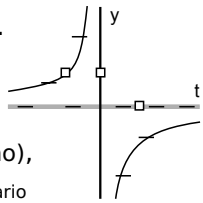
[Para $a<0$ se puede decir sin usar las órbitas: debe decrecer y hasta encontrar $x=-y^2$, luego debe cortar el eje x (no puede tocar $x=1$), y, por simetría, es cerrada].

Todas ellas tienen periodo 2π (lo que tarda θ en volver).

Soluciones del examen de septiembre de 2010 **Ecuaciones Diferenciales I (grupo C)**

1. Sea $\frac{dy}{dt}=-\frac{y(1+ty)}{t}$. **a]** Hallar su solución general. **b]** Dibujar las isoclinas de pendiente $K=0$.
c] Hallar, si existen, la o las soluciones con: i) $y(-1)=1$, ii) $y(1)=0$, iii) $y(0)=1$. [2.5 puntos]

a] $\frac{dy}{dt}=-\frac{y}{t}-y^2$ es de Bernouilli. $z=\frac{1}{y}\to z'=\frac{z}{t}+1\to z=Ct+t\int\frac{dt}{t}$, $\boxed{y=\frac{1}{t(C+\ln|t|)}}$.



b] $\frac{y(1+ty)}{t}=0\to y=0$ (recta solución) y la curva $y=-\frac{1}{t}$.

c] El TEyU asegura solución única con $y(t_o)=y_o$ si $t_o\neq 0$ (f , f_y continuas en un entorno), con lo que i) y ii) deben tener solución única. Para i), $1=-\frac{1}{C}\to\boxed{y=\frac{1}{t(\ln|t|-1)}}$ (necesario el $\ln|t|$).

Para ii), $0=\frac{1}{C}$ imposible. Pero la solución única es la $\boxed{y\equiv 0}$ perdida en el cálculo.

Para iii), El TEyU aplicado a nuestra ecuación no dice nada, pero aplicado a la ecuación equivalente asegura solución única $t(y)$ cerca de $(0,1)$ (denominador no nulo). Como por ese punto pasa la evidente curva integral vertical $t\equiv 0$, deducimos que para iii) **no existe solución** $y(t)$.

2. Sea $x^{IV}+2x'''+5x''+2\alpha x'+\alpha x=4$. **a]** Para $\alpha=0$ hallar la solución general.
b] Para $\alpha=4$ hallar la solución con $x(0)=0$, $x'(0)=2$, $x''(0)=0$, $x'''(0)=6$.
c] Discutir la estabilidad de la ecuación según los valores de la constante α . [3 puntos]

a] $\lambda^2(\lambda^2+2\lambda+5)=0\to\lambda=0$ doble, $\lambda=-1\pm 2i$. $x_p=At^2\to 10A=4$. La solución general es, pues:

$$\boxed{x=c_1+c_2t+e^{-t}(c_3\cos 2t+c_4\operatorname{sen}2t)+\tfrac{2}{5}t^2}\ .$$

b] $\lambda^4+2\lambda^3+5\lambda^2+8\lambda+4=(\lambda+1)^2(\lambda^2+4)=0\to\lambda=1$ doble, $\lambda=\pm 2i$. $x_p=1$ (a ojo). Por tanto:

$$\begin{array}{l} x=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+c_3\cos 2t+c_4\operatorname{sen}2t+1\\ x'=-c_1e^{-t}+c_2(1-t)e^{-t}-2c_3\operatorname{sen}+2c_4\cos\\ x''=c_1e^{-t}+c_2(t-2)e^{-t}-4c_3\cos-4c_4\operatorname{sen}\\ x'''=-c_1e^{-t}+c_2(3-t)e^{-t}+8c_3\operatorname{sen}-8c_4\cos\end{array}\to\begin{array}{c} c_1+c_3+1=0\\ -c_1+c_2+2c_4=2\\ c_1-2c_2-4c_3=0\\ -c_1+3c_2-8c_4=6\end{array}\to\boxed{x=1+2te^{-t}-\cos 2t}\ .$$

Laplace: $s^4X-2s^2-6+2s^3X-4s+5s^2X-10+8sX+4X=(s+1)^2(s^2+4)X-2s^2-4s-16=\frac{4}{s}\to$

$$\frac{2s^3+4s^2+16s+4}{s(s+1)^2(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+4}=\frac{A(s+1)^2(s^2+4)+Bs(s+1)(s^2+4)+Cs(s^2+4)+(Ds+E)s(s+1)^2}{s(s+1)^2(s^2+4)}\to$$

$$\begin{array}{l} s=0\to A=1\\ s=-1\to C=2\end{array}\text{, y además: }\begin{array}{l} s^4:\ A+B+D=0\\ s^3:\ 2A+B+C+2D+E=2\\ s^1:\ 8A+4B+4C+E=16\end{array}\to\begin{array}{c} D=-1\\ B=0\\ C=0\end{array}\to X=\frac{1}{s}+\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{s}{s^2+2^2}\uparrow$$

c] El signo de los coeficientes dice que si $\alpha<0$ es I y que si $\alpha=0$ no es AE (y no dice nada si $\alpha>0$) .

$$\text{R-H: }\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\2\alpha&5&2&0\\0&\alpha&2\alpha&5\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}\to 2>0,\ 10-2\alpha>0,\ 2\alpha\begin{vmatrix}1&1&0\\\alpha&5&2\\0&1&2\end{vmatrix}=4\alpha(4-\alpha)>0,\ \alpha>0\to$$

AE si $0<\alpha<4$, **I** si $\alpha<0$ ó $\alpha>4$ (y noAE si $\alpha=0,4$).

Para $\alpha=4$, viendo los autovalores (hallados en **b]**), como dos son negativos (que sean dobles no influye) y los otros dos son con $\operatorname{Re}\lambda=0$ y simples, la ecuación es **EnoA**.
Para $\alpha=0$, el $\lambda=0$ doble (hallado en **a]**) implica que es **I** (para un sistema no bastaría).
Concluimos, pues:

$$\boxed{\textbf{AE}\text{ si }0<\alpha<4\ ,\ \textbf{I}\text{ si }\alpha\leq 0\text{ ó }\alpha>4\ ,\ \textbf{EnoA}\text{ si }\alpha=4}\ .$$

3. Sea $2t^2x''+t(3-2t)x'-(1+4t)x=0$. Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial acotada cerca de $t=0$ e identificarla con una función elemental. [2 puntos]

$t^2x''+t\frac{3-2t}{2}x'+\frac{1+4t}{2}x=0$, $t=0$ singular regular, $r(r-1)+\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}=0$, $r=\frac{1}{2},-1$. Acotada en $t=0$:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+1/2} \to \sum_0\Big[2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_kt^{k+1/2}+3(k+\tfrac{1}{2})c_kt^{k+1/2}-2(k+\tfrac{1}{2})c_kt^{k+3/2}$$

$$(2k^2-\tfrac{1}{2}+3k+\tfrac{3}{2}-1) \qquad -c_kt^{k+1/2}+4c_kt^{k+3/2}\Big]=0 \to$$

$$\sum_0\Big[k(2k+3)c_kt^{k+1/2}-(2k+5)c_kt^{k+3/2}=0$$

$t^{1/2}$: $0c_0=0$, c_0 indeterminado; $t^{3/2}$: $5c_1-5c_1=0$, $c_1=c_0$;

$$t^{k+1/2}:\ k(2k+3)c_k-(2k+3)c_{k-1}=0 \to \boxed{c_k=\tfrac{1}{k}c_{k-1}} \to$$

$$c_2=\tfrac{1}{2}c_1=\tfrac{1}{2}c_0;\ c_3=\tfrac{1}{3}c_2=\tfrac{1}{3\cdot 2}c_0;\ c_4=\tfrac{1}{4}c_3=\tfrac{1}{4!}c_0;\ \dots;\ c_k=\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-2}=\cdots=\tfrac{1}{k!}c_0.$$

$$\boxed{x_1=t^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}t^k=t^{1/2}e^t},\ t>0.$$

$[\,x_1=|t|^{1/2}e^t$ sería una solución válida $\forall t\neq 0\,]$.

4. Sea $\begin{cases} x'=1+x-2xy \\ y'=y^2-y \end{cases}$.
a] Hallar sus órbitas y, en concreto, la que pasa por $(2,\frac{1}{2})$.
b] Dibujar su mapa de fases.
c] Hallar la solución del sistema que cumple $x(0)=0$, $y(0)=1$. [2.5 puntos]

a] $f_x+g_y=1-2y+2y-1\equiv 0 \Rightarrow$ sistema exacto: $\begin{matrix} H_y=1+x-2xy \\ H_x=y-y^2 \end{matrix}$, $\begin{matrix} H=y+xy-xy^2+p(x) \\ H=xy-xy^2+q(y) \end{matrix}$, $\boxed{y+xy-xy^2=C}$.

Por $(2,\frac{1}{2})$ pasa la órbita con $C=1 \to y=\frac{x+1\pm\sqrt{x^2-2x+1}}{2x} \to \boxed{y=\frac{1}{x}}$ ($y=1$ no pasa por ahí).

b] $\begin{matrix} x=-1 & x=1 \\ \uparrow & \uparrow \\ y=0 & y=1 \end{matrix}$. La matriz de la aproximación lineal $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1-2y & -2x \\ 0 & 2y-1 \end{pmatrix}$ en cada punto crítico es:

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, silla: $1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $-1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, silla: $-1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pendiente horizontal si $y=0,1$ (órbitas).

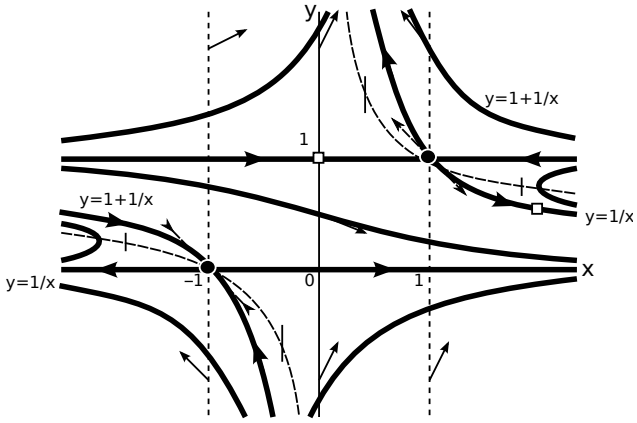
Vertical sobre la hipérbola $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}$.

Separatrices de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: las halladas $y=\frac{1}{x}$ e $y=1$.

Las de $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son $y=0$ e $y=1+\frac{1}{x}$ (para $C=0$).

$\mathbf{v}(1,y)=(y-1)\begin{pmatrix} -2 \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(-1,y)=y\begin{pmatrix} 2 \\ y-1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{v}(0,y)=\begin{pmatrix} 1 \\ y^2-y \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x,1/2)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$.



c] La solución pedida está asociada a la órbita $y=1 \to x'=1-x \to x=1+Ce^{-t} \xrightarrow[x(0)=0]{} \boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}}$.