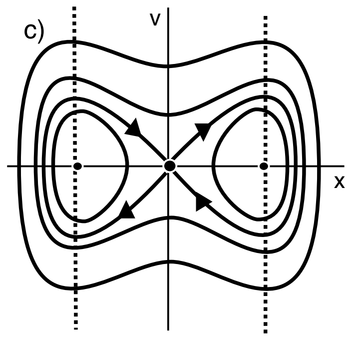
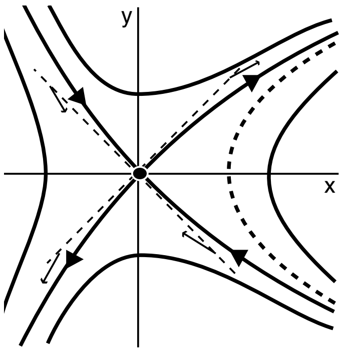
Soluciones de algunos problemas adicionales 4 (9-10)

1 c) $\boxed{x''=x-x^3}$ Exacta. $V(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$. $x=\pm1$ mínimos (centros)
$x=0$ máximo (silla)



$\begin{cases} x'=v \\ v'=x-x^3 \end{cases} \to \binom{0}{0}$ silla con $\mathbf{v}=\binom{1}{\pm1}$. H: $x=0,\pm1$.



j) $\boxed{\begin{array}{l} x'=y\,e^x \\ y'=e^x-1 \end{array}}$ $\binom{0}{0}$: $\lambda=\pm1 \to \binom{1}{\pm1}$, silla. H: $x=0$ V: $y=0$.

Órbitas: $y^2=2x+2e^{-x}+C$. $\mathbf{v}(x,x)=\begin{pmatrix}\pm e^x \\ e^x-1\end{pmatrix}$.

Separatrices: $y=\pm\sqrt{2x+2e^{-x}-2}\underset{x\to\infty}{\sim}\pm\sqrt{2x-2}$.

---

6 $\boxed{\begin{array}{l} x'=9x-3y \\ y'=6x-2xy \end{array}}$ a) $\begin{array}{l} y=3x \\ x=0,y=3 \end{array} \to \binom{0}{0},\binom{1}{3}$; $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6-2y & -2x \end{pmatrix}$ $(0,0)\nearrow$ $\lambda=3,6$ con $\binom{1}{2}$ [tangencia] y $\binom{1}{1} \to$ nodoI.
$(1,3)\searrow$ $\lambda=9,-2$ [evidente!!] con $\binom{1}{0}$ y $\binom{3}{11} \to$ silla.

H: $y=3$ (órbita) y $x=0$. V: $y=3x$. $\mathbf{v}(x,0)=3x\binom{3}{2}$, $\mathbf{v}(1,y)=(3-y)\binom{3}{2}$.

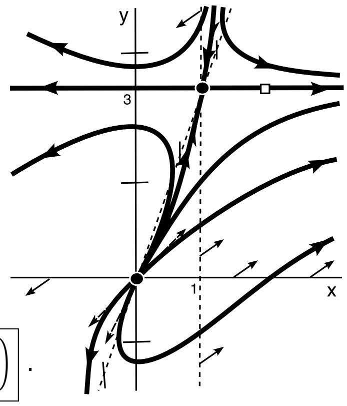
La recta de la separatriz estable de la aproximación lineal es $y=\frac{11x-2}{3}$.

$\mathbf{v}\big(x,\frac{11x-2}{3}\big)=\frac{2}{3}(1-x)\binom{3}{11x}$ [si $x>1$ su pendiente es mayor que la de la recta].

La separatriz, pues, se curva ‘ $)$’ y, como las demás órbitas (menos 2) sale del nodo con pendiente 2 . La otra, como vimos, se mantiene recta.

$\mathbf{v}(x,x)=2x\binom{3}{3-x}$, $\mathbf{v}(x,2x)=x\binom{3}{6-4x}$.

[$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \to y=3$ y la curva de inflexión $y^2-3xy+2x^2-2x^3=0$, $y=\frac{x}{2}\big(3\pm\sqrt{1+8x}\,\big)$].



b) $y=3$ órbita por $(2,3) \to x'=9x-9$, $x=1+Ke^{9t}\xrightarrow[x(0)=2]{} x=1+e^{9t}$, $\boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1+e^{9t} \\ 3\end{pmatrix}}$.

---

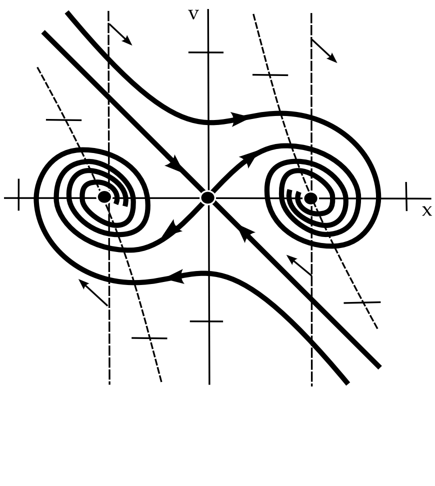
7 $\boxed{x''=x-x^3-x^2x'}$. a) $\begin{cases} x'=v \\ v'=x-x^3-x^2v \end{cases}$. Puntos críticos $\begin{array}{l} v=0 \\ x=0,\pm1 \end{array}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2-2xv & -x^2 \end{pmatrix}$ $\pm1 \nearrow$ $\lambda=\frac{1}{2}\big[-1\pm i\sqrt{7}\,\big]$ focosE.
$0 \searrow$ $\lambda=\pm1 \to \binom{1}{\pm1}$ silla.

Horizontal: $y=\frac{1}{x}-x$, $x=0$. Vertical: $y=0$ (como en toda ecuación).

$\frac{dv}{dx}=\frac{x-x^3}{v}-v^2$ no resoluble. $\mathbf{v}(\pm1,v)=\binom{v}{-v}$.

$\mathbf{v}(x,x)=x\binom{1}{1-2x^2}$ (esta se deforma) , $\mathbf{v}(x,-x)=x\binom{-x}{x}$ (esta se conserva)



b] La órbita que pasa por (1,−1) es $y=-x=\frac{dx}{dt}\overset{x(0)=1}{\to}$ $\boxed{x=e^{-t}}$.

10 a) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x(x-2) \\ y'=(x-2y)(x-1) \end{array}}$ Exacto. $-x^2y+2xy-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}=C$.

$\binom{0}{0}\to\begin{pmatrix}-2&0\\-1&2\end{pmatrix}\to\pm2\to\binom{0}{1},\binom{4}{1}$. $\binom{2}{1}\to\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}\to\pm2\to\binom{4}{1},\binom{0}{1}$, sillas.

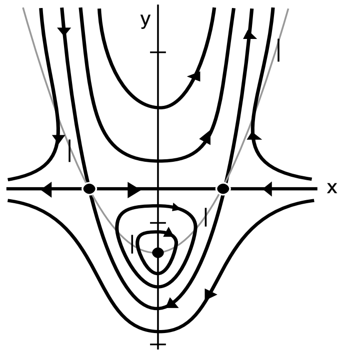
Separatrices: $C=0\to x=0$, $y=\frac{x^2(2x-3)}{6(x-2)}$. $C=\frac{2}{3}\to x=2$, $y=\frac{2x^2+x+2}{6x}$.

Horizontal: $x=1$, $y=\frac{x}{2}$
Vertical: $x=0,2$ órbitas . $\mathbf{v}(x,0)=x\binom{x-2}{x-1}$, $\mathbf{v}(x,1)=(x-2)\binom{x}{x-1}$.

$x=0\to y'=2y$, $x=2\to y'=2-2y$, lineales; soluciones definidas $\forall t$.

Órbita por $(2,0)$ $\to$ $\boxed{x=2}$ $\to$ $y=1+Ce^{-2t}\underset{y(1)=0}{\to}\boxed{y=1-e^{2-2t}}$.

b) $\boxed{\begin{array}{l} x'=1+y-x^2 \\ y'=2xy \end{array}}$ Exacto. $\binom{0}{-1}$: $\pm i$, centro.



$\binom{1}{0}:\mp2\to\binom{1}{0},\binom{1}{4}$, silla. $\binom{-1}{0}:\pm2\to\binom{1}{0},\binom{1}{-4}$, silla.

$y^2+2y-2x^2y=C\to y=0,\ y=2x^2-2$ separatrices.

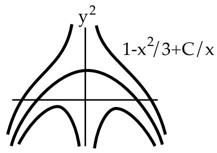
Horizontal: $x=0$, $y=0$
Vertical: $y=x^2-1$. $\mathbf{v}(\pm1,y)=y\binom{1}{\pm2}$.

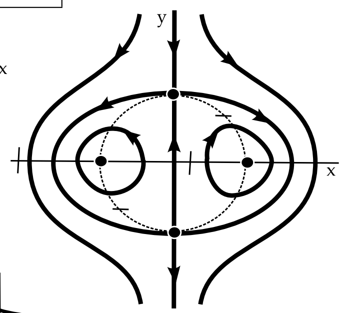
$y=0\to x'=1-x^2$, con potencia $>1\to$ soluciones no acotadas explotan.

Órbita por $(3,0)$ $\to$ $\boxed{y=0}$ $\to\left\{\begin{array}{l} x'=1-x^2 \\ x(0)=3 \end{array}\right.\to\boxed{x=\frac{2e^{2t}+1}{2e^{2t}-1}}$.

c) $\boxed{\begin{array}{l} x'=2xy \\ y'=1-x^2-y^2 \end{array}}$ Ecuación de las órbitas exacta o Bernouilli. $\boxed{xy^2+\frac{1}{3}x^3-x=C}$ ó $y^2=1-\frac{x^2}{3}+\frac{C}{x}$.

$C=0\to x=0$, $y^2+\frac{x^2}{3}=1$ (elipse).





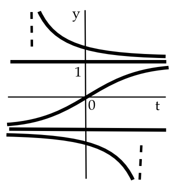
$\binom{\pm1}{0}$ centro (exacto o simetría respecto ambos ejes).

$\binom{0}{\pm1}\to\lambda=\pm2$ con vectores propios $\binom{1}{0},\binom{0}{1}$. Silla.

Horizontal sobre $x^2+y^2=1$ y vertical si $x=0$ ó $y=0$.

$\mathbf{v}(\pm1,y)=\binom{\pm2y}{-y^2}$, $\mathbf{v}(x,\pm1)=\binom{\pm2x}{-x^2}$.

Sobre $x=0$ es $y'=1-y^2$, ecuación autónoma con potencia dominante $>1\Rightarrow$ las soluciones cuyas proyecciones son semirrectas explotan.

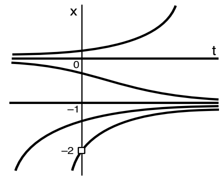


La órbita por $(\sqrt{3},0)$ es $y^2+\frac{x^2}{3}=1$, $x^2=3-3y^2$

$\to\left\{\begin{array}{l} y'=2y^2-2 \\ y(0)=0 \end{array}\right.\to\boxed{y=\frac{1-e^{4t}}{1+e^{4t}}}\to\boxed{x=\frac{2\sqrt{3}\,e^{2t}}{1+e^{4t}}}$.

---

11 $\boxed{\begin{array}{l} x'=x+x^2 \\ y'=2x+y \end{array}}$ a) $x'=x+x^2$ es autónoma y el dibujo basta para precisar la estabilidad. $x=\substack{0\\-1}$, soluciones constantes. Crecen si $\substack{x<-1\\x>0}$. Decrecen si $-1<x<0$.

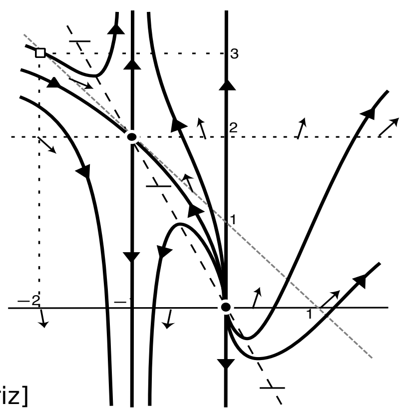


La solución con $x(0)=-2$ y las cercanas definidas $\forall t\geq0$ y $\to-1$ si $t\to\infty\Rightarrow$ **AE**.

b) Órbitas: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+x^2}+\frac{2}{1+x}\to e^{\int[\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}]}=\frac{x}{1+x}\to y=\frac{Cx}{1+x}+\frac{2x}{1+x}\int\frac{dx}{x}=\boxed{\frac{x(C+2\log|x|)}{1+x}}$.

$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1+2x&0\\2&1\end{pmatrix}$. $\binom{0}{0}\to\lambda=1$ doble asociado a $\binom{0}{1}$: nodo1tgl.

$\binom{-1}{2}\to\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}\to\lambda=1,\binom{0}{1}$ y $\lambda=-1,\binom{1}{-1}$: silla.



Vertical: $x=0,-1$ (órbitas).
Horizontal: $y=-2x$. $\mathbf{v}(x,0)=x\binom{1+x}{2}$, $\mathbf{v}(x,2)=(1+x)\binom{x}{2}$.

$\mathbf{v}(x,1-x)=(1+x)\binom{x}{1}\to$ la separatriz estable se deforma.

Esta separatriz es la órbita de $C=0$: $y=\frac{2x\log|x|}{1+x}$, pues $\frac{\log|x|}{1+x}\underset{x\to-1}{\to}-1$ [L'Hôp].

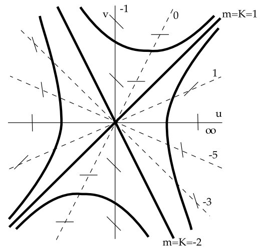
[Su valor en $x=-2$ es: $4\log2\approx4\times0.69<3$].

c) $x\equiv-1$ órbita por $\binom{-1}{-1}\to y'=y-2\underset{y(0)=-1}{\to}y=2-3e^t$, o sea, $\mathbf{x}(t)=\binom{2-3e^t}{-1}$.

d) $x(t)\underset{t\to\infty}{\to}-1$, según a). $y(t)\underset{t\to\infty}{\to}\infty$ [la órbita está por encima de la separatriz]
[$y(t)$ solución de lineal, definida $\forall t\geq0$].

a) y d) se pueden responder (más largo) hallando las soluciones de [S]: $x'=x+x^2$ Bernouilli o separable
$\to x=\frac{1}{Ce^{-t}-1}\overset{x(0)=-2}{\to}x=\frac{2}{e^{-t}-2}\underset{t\to\infty}{\to}-1$; $y'=y+\frac{4}{e^{-t}-2}\overset{y(0)=3}{\to}y=e^t(3-4\log|2-e^{-t}|)\underset{t\to\infty}{\to}\infty$.

12 a) $\boxed{\frac{dv}{du}=\frac{2u-v}{v}}$ Homogénea. $z=\frac{v}{u}\to\int\frac{z\,dz}{(z+2)(z-1)}=-\int\frac{du}{u}+C\to\boxed{(v+2u)^2(v-u)=C}$



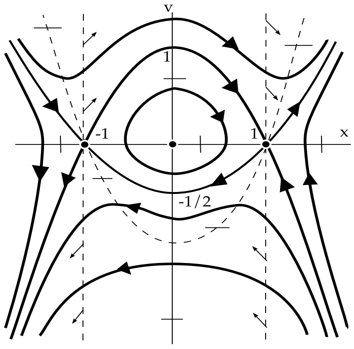
Isoclinas : $K=f(u,mu)=\frac{2}{m}-1$. Rectas solución si $K=m\to m=-2,1\nearrow$

m	2	0	-1	$-1/2$	$1/2$
K	0	∞	-3	-5	1

. Además, sobre $u=0$ es $K=-1$.

b) $\boxed{\begin{array}{l}x'=v\\ v'=x^3-x-xv\end{array}}$ $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3x^2-1-v & -x\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}\pm1\\0\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & \mp1\end{pmatrix}\to\lambda=\mp2,\pm1$ (sillas).

En $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es $\lambda=\pm i$ y $g(-x,v)=-g(x,v)\to$ centro del no lineal.



Las parábolas solución, por la simetría, deben tener la forma $v=Ax^2+B$:

$(Ax^2+B)2Ax=x-x^3-x(Ax^2+B)\to\begin{cases}2A^2+A-1=0\to A=1/2,-1\searrow\\ 2AB+B+1=0 \qquad\qquad B=-1/2,1\end{cases}$

$\to y=1-x^2,\ y=\frac{x^2-1}{2}$ que son precisamente las **separatrices** de las sillas.

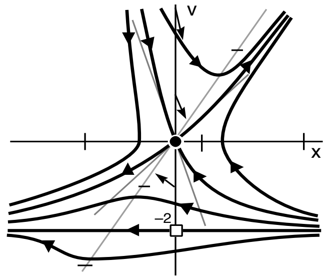
Como $u=\frac{1}{2}[x^2-1]\to\frac{dv}{du}x=\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dx}=\left[\frac{2u}{v}-1\right]x\to\frac{dv}{du}=\frac{2u-v}{v}$,

las órbitas son $(v+x^2-1)^2(2v-x^2+1)=C$ [y otra vez las separatrices].

$\mathbf{v}$ horizontal en $x=0$ y $v=x^2-1$. $\mathbf{v}(\pm1,v)=\begin{pmatrix}v\\ \mp v\end{pmatrix}$.
Vertical (como en toda ecuación) en $v=0$.

---

13 $\boxed{x''=(ax-x')(2+x')}$ $\begin{cases}x'=v\\ v'=(ax-v)(2+v)\end{cases}$. a) Si $a=0$, es $x=0$ recta de puntos críticos no elementales.



Si $a\neq0$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ punto crítico. AL: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2a & -2\end{pmatrix}$, $\lambda=-1\pm\sqrt{1+2a}$: $\begin{cases}\text{silla si } a>0\\ \text{nodoE si } 0>a>-\frac{1}{2}\\ \text{nodo1tgE si } a=-\frac{1}{2}\\ \text{focoE si } -\frac{1}{2}>a\end{cases}$

b) $\boxed{a=\frac{3}{2}}$ $\lambda=1,-3$. $\mathbf{v}(x,x)=x\begin{pmatrix}1\\ 1+\frac{x}{2}\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x,-3x)=3x\begin{pmatrix}-1\\ 3-\frac{9x}{2}\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0,v)=v\begin{pmatrix}1\\ -2-v\end{pmatrix}$.

Horizontal si $v=\frac{3x}{2}$ o si $v=-2$, órbita por $(0,-2)\to x=C-2t\xrightarrow{x(1)=0}x=2-2t$.

---

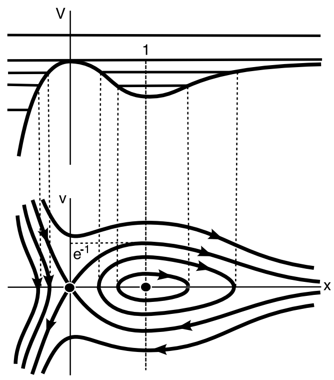
15 $\boxed{x''=(x-x^2)\,e^{-2x}}$ a) Exacta: $V(x)=\int(x^2-x)\,e^{-2x}dx\overset{\text{partes}}{=}-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\to$ órbitas: $\boxed{v^2=x^2e^{-2x}+C}$.

$V'=(x^2-x)\,e^{-2x}\to V$ decrece en $(0,1)$ y crece en el resto.

$V(0)=0$, $V(1)=-\frac{1}{2e^2}$, $V\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, $V\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$.

Directamente: $\begin{cases}x'=v\\ v'=(x-x^2)\,e^{-2x}\end{cases}$ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ (2x^2-4x+1)e^{-2x} & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\to\lambda=\pm1$ silla. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1\\ -e^{-2} & 0\end{pmatrix}\to\lambda=\pm\frac{i}{e}$ centro (lineal y no lineal)



Órbitas por el origen ($C=0$, separatrices): $v=\pm xe^{-x}$.

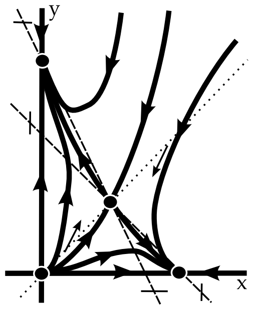
b) La solución para i) es $x=0$, punto silla, y, por tanto, **inestable**.

La órbita asociada a ii) es $v=xe^{-x}$ $\left[e^{-2}=e^{-2}+C\right]$, que es la primera órbita no cerrada. Soluciones próximas a la dada (que tiende a ∞) no se parecen nada a ella (son periódicas). También es **inestable**.

---

21 apuntes

28 El sistema es: $\boxed{\begin{array}{l} x'=x(2-a-x-y) \\ y'=y(3-y-2x) \end{array}}$. Para $a=0$ está dibujado en la página 80 de los apuntes:



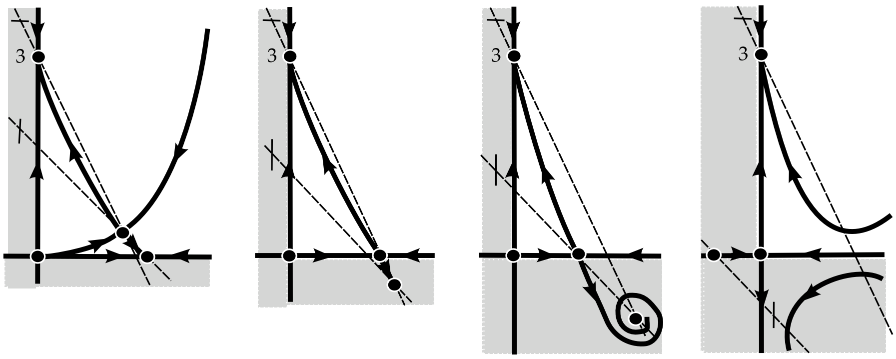
$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 2-a-2x-y & -x \\ -2y & 3-2x-2y \end{pmatrix}$. Puntos críticos: $\underset{\mathbf{O}}{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{P}}{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{Q}}{\begin{pmatrix}2-a\\0\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{R}}{\begin{pmatrix}1+a\\1-2a\end{pmatrix}}$.

Autovalores respectivos: $\begin{array}{c}\lambda=3\\ \lambda=2-a\end{array}$, $\begin{array}{c}\lambda=-3\\ \lambda=-1-a\end{array}$, $\begin{array}{c}\lambda=2-a\\ \lambda=2a-1\end{array}$, $\lambda=\frac{1}{2}\big[a-2\pm\sqrt{8-8a-7a^2}\,\big]$.

	a<1/2	1/2<*a*<*A*	*A*<*a*<2	2<*a*
O	nodoI	nodoI	nodoI	silla
P	nodoE	nodoE	nodoE	nodoE
Q	nodoE	silla	silla	nodoI
R	silla	nodoE	focoE	focoI

con $A=\frac{6\sqrt{2}-4}{7}$.

Horizontal: $y=3-2x$.
Vertical: $y=2-a-x$.



En el primer caso las truchas pueden sobrevivir. En los dos siguientes sólo lo hacen si no hay salmones. En el último, se extinguen aunque no haya salmones.

---

29 $\boxed{\begin{array}{l} x'=x(5-x-ay) \\ y'=y(5-y-ax) \end{array}}$ $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 5-2x-ay & -ax \\ -ay & 5-2y-ax \end{pmatrix}$. Puntos críticos: $\underset{\mathbf{O}}{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{P}}{\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{Q}}{\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}}, \underset{\mathbf{R}}{\begin{pmatrix}5/(a+1)\\5/(a+1)\end{pmatrix}}$. Autovalores respectivos:

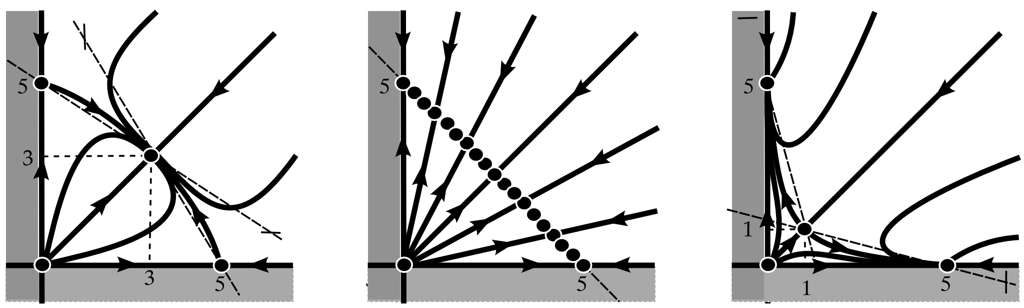
$\begin{array}{c}\lambda=5\\ \text{doble}\end{array}$, $\begin{array}{l}\lambda=5-5a\to\begin{pmatrix}a-2\\a\end{pmatrix}\\ \lambda=-5\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{array}$, $\begin{array}{l}\lambda=-5\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \lambda=5-5a\to\begin{pmatrix}a\\a-2\end{pmatrix}\end{array}$, $\begin{array}{l}\lambda=-5\to\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\ \lambda=5\frac{a-1}{a+1}\to\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{array}$.

	O	**P**	**Q**	**R**
a<1	nodoEI	silla	silla	nodoE
a>1	nodoEI	nodoE (1tg si a=2)	nodoE (1tg si a=2)	silla

Si $a=1$ cada punto de $x+y=3$ es crítico (no elemental, claro).
Para ese valor las órbitas son sencillas: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ \to\ y=Cx$.

b] El campo es horizontal si: $y=0$ (órbita) e $y=5-ax$. Vertical si: $x=0$ (órbita) y $x=5-ay$.

$\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}x(5-x)\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0,y)=\begin{pmatrix}0\\y(5-y)\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x,x)=x[5-(a+1)x]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x,5)=x\begin{pmatrix}5-5a-x\\-5a\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(5,y)=y\begin{pmatrix}-5a\\5-5a-y\end{pmatrix}$.
(órbita)



Si $a<1$ (poca competición) las dos especies tienden hacia un valor de coexistencia estable. Si $a<1$ (mucha competición) una de las especies (la que inicialmente tiene menos individuos) se extingue y la otra tiende hacia su tope logístico. Si $a=1$ se mantiene la proporción inicial de poblaciones.