Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 1 (24/10/07)**

1. Sea $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{2xy}$. **a]** Resolverla como homogénea, como exacta y como Bernouilli.
b] Precisar dónde crecen y decrecen sus soluciones y si alguna recta es solución.
c] Hallar la expresión explícita de la o las soluciones (si es que existen) que satisfacen:
i) $y(1)=-3$, ii) $y(1)=0$. [6 puntos]

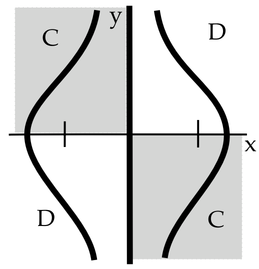
a] $xz'+z=-\frac{1+z^2}{2z}$, $\int\frac{6z\,dz}{1+3z^2}=-\int\frac{3\,dx}{x}+C \to 1+3z^2=\frac{C}{x^3}=1+3\frac{y^2}{x^2}\to y^2=\frac{C}{x}-\frac{x^2}{3}$.

$$(x^2+y^2)+2xyy'=0\to \begin{matrix} U=\frac{x^3}{3}+xy^2+p(y)\\ U=xy^2+q(x)\end{matrix}\to \frac{x^3}{3}+xy^2=C\to y^2=\frac{C}{x}-\frac{x^2}{3}\,.$$
$\searrow 2y \swarrow$

$$2yy'=-\frac{y^2}{x}-x\xrightarrow{y^2=z} z'=-\frac{z}{x}-x\to z=\frac{C}{x}-\frac{1}{x}\int x^2dx=\frac{C}{x}-\frac{x^2}{3}=y^2\,.$$

b] Como el numerador es positivo, las soluciones decrecen cuando x e y tienen el mismo signo, y crecen cuando lo tienen distinto.
[En los ejes la pendiente es vertical. $x=0$ es curva integral (no solución)].
Lo anterior bastaría para asegurar que no hay rectas solución, pero lo vemos directamente. Esas rectas (deben ser isoclinas) satisfarían:

$$K=f(x,mx)=-\frac{1+m^2}{2m}=m\to 3m^2+1=0\,,\ \text{imposible.}$$



c] El TEyU asegura que hay solución única con $y(x_o)=y_o$ si $x_o\neq 0$. Para el dato i) por ejemplo.

$$9=C-\frac{1}{3}\,,\ C=\frac{28}{3}\,,\ y^2=\frac{28-x^3}{3x}\,,\ \boxed{y=-\sqrt{\frac{28-x^3}{3x}}}\ \text{(la raíz positiva no lo cumple).}$$

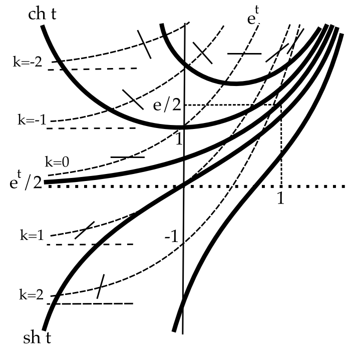
Para ii) el TEyU no decide. Como $\frac{dx}{dy}=-\frac{2xy}{x^2+y^2}$ tiene solución única $x(y)$ con $x(0)=1$ (y es $x'(0)=0$), sólo pasa una curva integral vertical por $(1,0)$ y no hay solución que cumpla ii).
$\big[$Lo que sale imponiendo el dato, $y=\pm\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$, son dos funciones con derivada infinita en $x=1\big]$.

2. Sea $y'=e^t-y$. **a]** Hallar la solución con $y(0)=0$ y precisar su estabilidad.
b] Dibujar isoclinas, puntos de inflexión y aproximadamente las soluciones. [4 puntos]

a] La solución de esta lineal es: $y=Ce^{-t}+e^{-t}\int e^{2t}dt=Ce^{-t}+\frac{1}{2}e^t \underset{y(0)=0}{\longrightarrow} \boxed{y=\frac{1}{2}[e^t-e^{-t}]=\operatorname{sh}t}$.

En una lineal (con coeficientes continuos en todo $\mathbf{R}$) la estabilidad de todas las soluciones es la misma y viene dada por $e^{\int_0^t a}$. Como en nuestro caso $e^{-t}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$, **la ecuación es AE**.

b] Isoclinas: $y=e^t-K$ [traslaciones rígidas verticales de $y=e^t$].
Inflexión: $y''=e^t-y'=y\to y=0$ recta de puntos de inflexión.
En la solución general vemos soluciones importantes:
$y=\frac{1}{2}e^t$ (la única que $\to 0$ cuando $t\to-\infty$).
$y=\operatorname{sh}t$ (la única impar). $y=\operatorname{ch}t$ (la única par).
Solución única en cada punto del plano, todas ellas se juntan en el infinito (AE), son la y_p más familia de exponenciales decrecientes.



Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 2 (28/11/07)**

1. Hallar la solución general de $t^2x''-3tx'+3x=9\log t$. [2 puntos]

$$\lambda(\lambda-1)-3\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0 \;\rightarrow\; \text{solución general: } x=c_1t+c_2t^3+x_p\,.$$

Para hallar la x_p podemos utilizar la fórmula de variación de la constantes:

$$\begin{vmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{vmatrix}=2t^3\;;\;\; x_p=t^3\int\frac{9\log t\,dt}{2t^4}-t\int\frac{9\log t\,dt}{2t^2}\underset{\text{partes}}{=}-\frac{3\log t}{2}+t^3\int\frac{3\,dt}{2t^4}+\frac{9\log t}{2}-t\int\frac{9\,dt}{2t^2}=3\log t+4$$

$$\rightarrow\; \boxed{x=c_1t+c_2t^3+3\log t+4}\,.$$

O bien, hay $x_p=As+B=A\log t+B$ (haciendo $t=e^s$ quedaría $\cdots=9s$ y $\lambda=0$ no autovalor)

$$\rightarrow\; x_p'=\frac{A}{t}\,,\; x_p''=-\frac{A}{t^2}\;\rightarrow\; -A-3A+3A\log t+3b=9\log t\;\rightarrow\; \begin{matrix}A=3\\B=4\end{matrix}\,,\; x_p=3\log t+4\,.$$

2. Resolver $\begin{cases} x'=z-2y \\ y'=-y \\ z'=x-2y \end{cases}$, con $x(0)=4$, $y(0)=3$, $z(0)=2$. [3 puntos]

La y se obtiene fácilmente de la segunda ecuación: $y'=-y\;\rightarrow\; y=Ce^{-t}\underset{y(0)=3}{\rightarrow}\boxed{y=3e^{-t}}\;\rightarrow$

$$(\bullet)\begin{cases} x'=z-6e^{-t} \\ z'=x-6e^{-t} \end{cases}\rightarrow\; x''=x-6e^{-t}+6e^{-t}=x\underset{\lambda=\pm1}{\rightarrow} x=c_1e^t+c_2e^{-t}\underset{x(0)=4,\,x'(0)=-4}{\longrightarrow}\boxed{x=4e^{-t}}$$

$$z=x'+6e^{-t}=\boxed{2e^{-t}}$$

Laplace:

$$\begin{cases} sX-4=Z-2Y \\ sY-3=-Y \\ sZ-2=X-2Y \end{cases},\; Y=\frac{3}{s+1}\;\left[y=3e^{-t}\right]\nearrow\; Z=sX-4+\frac{6}{s+1}\searrow\;(s^2-1)X=4s+2-\frac{6s+6}{s+1}=4s-4\;\rightarrow$$

$$X=\frac{4}{s+1}\;\left[x=4e^{-t}\right]\;\rightarrow\; Z=\frac{4s}{s+1}-4+\frac{6}{s+1}=\frac{2}{s+1}\;\left[z=2e^{-t}\right].$$

Mediante matrices (al ser homogénea) mejor buscamos la solución general (sin calcular $\mathbf{P}^{-1}$):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

$$\lambda=1:\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\;\rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\quad \lambda=-1 \text{ doble: }\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\;\rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\text{ y }\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

$$\text{Solución general: }\;\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^t+\left[c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right]e^{-t}\underset{\text{d.i.}}{\rightarrow}\begin{cases} c_1+c_2=4 \\ c_3=3 \\ c_1-c_2-2c_3=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow\; c_3=3\,,\; c_1=0\,,\; c_2=4\;\rightarrow\;\boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}e^{-t}}\,.$$

[El vector que acompaña a e^{-t} es, desde luego, un vector propio asociado a $\lambda=-1$].

[Más largo hubiera sido utilizar matrices para resolver el sistema (•) de arriba en x y z, pues tendríamos que hacer alguna integración].

3. Sea [e] $x''''+2x'''+6x''+ax'+5x=4\cos t$, $a\in\mathbf{R}$.

a] Discutir la **estabilidad** de sus soluciones.

b] Hallar **una** solución de [e] para cada $a\neq 2$.

c] Para $a=10$, escribir la **solución general** de [e].

d] Para $a=-14$, escribir **dos** soluciones distintas de [e].

e] Para $a=6$, **describir** las soluciones de [e] para valores grandes de t .

f] Para $a=2$, precisar el número de **soluciones periódicas** de [e]. [5 puntos]

a] $P(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+6\lambda^2+a\lambda+5=0\ \rightarrow$ si $a<0$ es I, si $a=0$ no es AE y si $a>0$ no sabemos.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\a&6&2&1\\0&5&a&6\\0&0&0&5\end{pmatrix}\ \rightarrow\ 2>0\ ,\ a<12\ ,\ 12a-a^2-20=-(a-2)(a-10)>0\ ,\ 5>0\ \rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{AE}\Leftrightarrow 2<a<10}\ ,\ \boxed{a<2\text{ ó }a>10\Rightarrow\mathbf{I}}\ .$$

Para ver lo que pasa si $a=2,10$ buscamos autovalores imaginarios puros:

$$\lambda=qi\ \rightarrow\ q^4-2q^3i-6q^2+aqi+5=0\ \rightarrow\begin{cases}q^4-6q^2+5=0\ \rightarrow\ q^2=1\text{ ó }5\ \searrow\\ q(a-2q^2)=0\qquad\qquad\qquad a=2\text{ ó }10\end{cases}$$

Por tanto, si $a=2$: $P(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2+2\lambda+5)\ \rightarrow\ \lambda=\pm i\ ,\ \lambda=-1\pm 2i\ \rightarrow$ **EnoA**.

Y si $a=10$: $P(\lambda)=(\lambda^2+5)(\lambda^2+2\lambda+1)\ \rightarrow\ \lambda=\pm\sqrt{5}\,i\ ,\ \lambda=-1$ doble $\rightarrow$ **EnoA**.

b] Si $a\neq 2$ ($\lambda=\pm i$ no autovalor) hay $x_p=A\cos t+B\operatorname{sen} t\ \rightarrow$

$$[Ac+Bs]+2[As-Bc]-6[Ac+Bs]+a[Bc-As]+5[Ac+Bs]=4c\rightarrow\begin{matrix}(a-2)B=4\\(2-a)A=0\end{matrix}\rightarrow\boxed{x_p=\tfrac{4}{a-2}\operatorname{sen} t}$$

c] Con los autovalores de arriba y la x_p: $\boxed{x=(c_1+c_2t)e^{-t}+c_3\cos\sqrt{5}\,t+c_4\operatorname{sen}\sqrt{5}\,t+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t}$.

d] Para $a=-14$, una raíz clara de $P(\lambda)$ es $\lambda=1$ (las demás no son calculables exactamente) $\rightarrow$

$x=c_1e^t+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4-\frac{\operatorname{sen} t}{4}$. Dos soluciones, por ejemplo, son $\boxed{-\frac{\operatorname{sen} t}{4}}$ y $\boxed{e^t-\frac{\operatorname{sen} t}{4}}$.

e] Si $a=6$ no hay raíces sencillas de $P(\lambda)$ y no tenemos ninguna solución de la homogénea, pero conocemos la $x_p=\operatorname{sen} t$ y sabemos que la ecuación es asintóticamente estable, o sea, que las soluciones de la homogénea tienden a 0 cuando $t\rightarrow\infty$. De aquí deducimos que cualquier solución para t gordo acabará siendo como $\operatorname{sen} t$ (casi casi será periódica).

f] Como la solución particular es de la forma $x_p=At\cos t+Bt\operatorname{sen} t$, ninguna solución de [e] es periódica $\big[$la homogénea tenía infinitas soluciones periódicas ($c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t$) y otras que no lo eran ($c_3e^{-t}\cos 2t+c_4e^{-t}\operatorname{sen} 2t$), con lo que [e] debía tener infinitas o ninguna$\big]$.

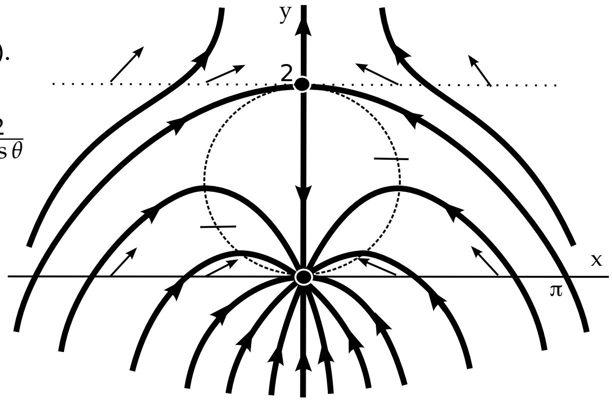
Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 3 (20/12/07)**

1. Sea $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x^2+y^2-2y \end{cases}$. **a]** Clasificar sus puntos críticos y estudiar el campo $\mathbf{v}$. **b]** Escribirlo en polares y hallar sus órbitas. **c]** Dibujar el mapa de fases. [6 puntos]

a] Puntos críticos: $\begin{matrix} x=0 \searrow & \\ & y=0,2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2x & 2y-2 \end{pmatrix}$ $0 \nearrow$ $\lambda=-2$ doble, $\mathbf{M}$ diagonal $\to$ nodo estelar I. $2 \searrow$ $\lambda=\pm 2$ con $\binom{0}{1}$ y $\binom{1}{0}$ $\to$ silla.

Campo horizontal: $x^2+(y-1)^2=1$ (circunferencia). Vertical: $x=0$ (órbita). $\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}(x,2)=\begin{pmatrix}-2x\\x^2\end{pmatrix}$ (la separatriz estable se deforma).

Ecuación de las órbitas: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{2x}-\frac{x}{2}$ (Riccati sin y_p sencilla).



b] $\begin{cases} r'=-2c^2r-2s^2r+sr^2=r(r\operatorname{sen}\theta-2) \\ \theta'=\frac{1}{r}[cr^2-2csr+2csr]=r\cos\theta \end{cases} \longrightarrow \frac{dr}{d\theta}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}r-\frac{2}{\cos\theta}$

$\to r=\frac{K}{\cos\theta}-\frac{2\theta}{\cos\theta}$, $x=K-2\arctan\frac{y}{x}$, $\boxed{y=x\tan\frac{K-x}{2}}$

c] Del sistema en polares deducimos que:
r crece si $y>2$; θ crece si $x>0$.

Y de la expresión recuadrada:
Todas las órbitas tienen asíntotas verticales y es $y(0)=0$ excepto si $K=\pi$ pues entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos\frac{\pi-x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi-x}{2}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{\operatorname{sen}\frac{\pi-x}{2}}\cdot 1=2 \to \text{ la separatriz estable es } y=x\tan\frac{\pi-x}{2}$$

[$K=-\pi,3\pi,\ldots$ dan la misma órbita]

$\to$ las separatrices estables cortan el eje en $x=\pm\pi$ [y sus asíntotas son $x=\pm 2\pi$].

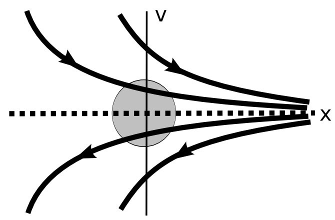
Sorprendentemente salen sencillos los puntos de inflexión: $\frac{d^2y}{dx^2}=\cdots=\frac{(y-2)(x^2+y^2)}{2x^2} \to y=2$.

2. Sea $x''=ax-(x')^2$. **a]** Discutir la estabilidad de su solución $x\equiv 0$.
[Si $a=0$ hallar los puntos críticos, las órbitas y dibujar el mapa de fases].
b] Para $a=0$ hallar la solución de la ecuación que satisface $x(1)=0$, $x'(1)=1$. [4 puntos]

a] $\begin{cases} x'=v \\ v'=ax-v^2 \end{cases} \to \mathbf{M}=\begin{pmatrix}0&1\\a&0\end{pmatrix} \to \lambda=\pm\sqrt{a}$. Por tanto, si $\boxed{a>0}$ es $\binom{0}{0}$ una silla y $x\equiv 0$ es **I**.

Si $\boxed{a<0}$ es $\binom{0}{0}$ centro de la aproximación lineal, y en principio $x\equiv 0$ puede ser AE, EnoA o I.
Como $g(x,v)=ax-v^2$ es par en v el centro lo sigue siendo del no lineal y $x\equiv 0$ es **EnoA**.

Si $\boxed{a=0}$ todos los puntos del eje $v=0$ son críticos (no elementales).
Sus órbitas vienen dadas por: $\frac{dv}{dx}=-v \to \boxed{v=Ce^{-x}}$. Con esto (y el sentido de las ecuaciones) podemos trazar el mapa de fases.
En él se observa que $\binom{0}{0}$ (y, por tanto, la solución $x\equiv 0$) es **I**
[las $x(t)$ (no constantes) con datos próximos tienden a $+$ ó $-\infty$].



b] La órbita con $v(x=0)=1$ es $v=e^{-x}=\frac{dx}{dt} \to e^x=t+K$, $x=\log(t+K)\underset{x(1)=0}{\longrightarrow}\boxed{x=\log t}$.

[Además de ser autónoma, en la ecuación no aparece x, con lo que se podría resolver asi:
$x'=v \to v'=-v^2 \to v=\frac{1}{t+C}\overset{v(1)=1}{\to} v=\frac{1}{t} \to x=\log t+K \overset{x(1)=0}{\to} x=\log t$].

Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 4 (23/01/08)**

1. Sea $(1-t^2)x''-2tx'+x=0$ $\big($Legendre con $p=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\big)$.
a] Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de la solución que cumple $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
b] Ver si hay soluciones no triviales que tiendan a 0 cuando i) $t\to -1$, ii) $t\to\infty$. [5 puntos]

a] Como $t=0$ es regular (a y b son analíticas para $|t|<1$), probamos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k \;\to\; \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kt^{k-2}-k(k-1)c_kt^k]+\sum_{k=1}^{\infty}-2kc_kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k=0 \;\to$$

$$t^0:\ 2c_2+c_0=0\to c_2=-\tfrac{c_0}{2}=0\ [\,c_0=x(0)\,];\quad t^1:\ 6c_3-2c_1+c_1=0\to c_3=\tfrac{c_1}{6}=\tfrac{1}{6}\ [\,c_1=x'(0)\,];$$

$$t^k:\ (k+2)(k+1)c_{k+2}-(k^2+k-1)c_k=0\to c_{k+2}=\tfrac{k^2+k-1}{(k+2)(k+1)}c_k\ \to\ c_4=0\,,\ c_5=\tfrac{11}{20}c_3=\tfrac{11}{120}c_1$$

$\to$ el desarrollo pedido es $\boxed{x=t+\frac{1}{6}t^3+\frac{11}{120}t^5+\cdots}$.

De otra forma: $x''(0)+x(0)=0\ \to\ x''(0)=0$. Y derivando:

$$(1-t^2)x'''-4tx''-x'=0\ \to\ x'''(0)=x'(0)=1\,,$$
$$(1-t^2)x^{IV}-6tx'''-5x''=0\ \to\ x^{IV}(0)=5x''(0)=0\,,$$
$$(1-t^2)x^{V}-8tx^{IV}-11x'''=0\ \to\ x^{V}(0)=11x'''(0)=11\,.$$

b] Haciendo $t+1=s$ obtenemos $(2s-s^2)x''+2(1-s)x'+x=0$, $s^2x''+s\frac{2(1-s)}{2-s}x'+\frac{s}{2-s}x=0\ \to$
$r^2=0\to$ ni $x_1=c_0+c_1s+\cdots$ ni $x_2=b_0s+\cdots+x_1\ln|s|$ tienden a 0 si $s\to 0$ ($t\to -1$).

Con $t=\frac{1}{s}$ nos queda $s^2(s^2-1)\ddot{x}+2s^3\dot{x}+x=0\ \to\ r^2-r-1=0\ \to\ r=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\equiv r_\pm\ \to$
$x_1=s^{r_+}\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\to 0$ cuando $s\to 0^+$ ($t\to\infty$). $\big[$La otra, $x_2=s^{r_-}\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^k$, no lo hace$\big]$.

2. Hallar la solución general de $t^2x''+t(4-t)x'+2(1-t)x=0$, desarrollando en torno a $t=0$.
[Se pueden identificar las series solución con funciones elementales]. [5 puntos]

$t=0$ singular regular, $r^2+3r+2=0\to r=-1,-2\ \to\ x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k-1}$, $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k-2}+dx_1\ln t$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k-1)(k-2)c_kt^{k-1}+4(k-1)c_kt^{k-1}-(k-1)c_kt^k+2c_kt^{k-1}-2c_kt^k\big]=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(k+1)c_kt^{k-1}-(k+1)c_kt^k\big]=0\ \to\ t^{k-1}:\ k(k+1)c_k-kc_{k-1}\to c_k=\tfrac{c_{k-1}}{k+1}$$

A partir de la serie inicial: t^{-1}: $0c_0=0\to c_0$ indeterminado; t^0: $2c_1-c_0=0\to c_1=\frac{c_0}{2}$.

Con la regla de recurrencia: $c_2=\frac{c_1}{3}=\frac{c_0}{3!}$; $c_3=\frac{c_2}{4}=\frac{c_0}{4!}$; ... ; $c_k=\frac{c_0}{(k+1)!}\xrightarrow{c_0=1}$

$$\boxed{x_1=\tfrac{1}{t}\big[1+\tfrac{t}{2!}+\tfrac{t^2}{3!}+\cdots+\tfrac{t^k}{(k+1)!}+\cdots\big]=\tfrac{e^t-1}{t^2}}\quad\big[\to\ x_1'=-\tfrac{1}{t^2}+\tfrac{1}{6}+\cdots\big].$$

x_2 por series: $x_2'=\sum_0^{\infty}(k-2)b_kt^{k-3}+dx_1'\ln t+\frac{dx_1}{t}$, $x_2''=\sum_0^{\infty}(k-2)(k-3)b_kt^{k-4}+dx_1''\ln t+\frac{2dx_1'}{t}-\frac{dx_1}{t^2}$

$\to\ \sum_0\big[k(k-1)b_kt^{k-2}-kb_kt^{k-1}\big]+2dtx_1'+d(3-t)x_1=0$. t^{-2}: b_0 indeterminado;

t^{-1}: $d=0$ (b_1 indeterminado, elegimos $b_1=0$); t^{k-2}: $b_k=\frac{b_{k-1}}{k}\to b_2=b_3=\cdots=0\to\boxed{x_2=\frac{1}{t^2}}$

Identificada x_1: $x_2=\frac{e^t-1}{t^2}\int\frac{t^4t^{-4}e^t}{(e^t-1)^2}=-\frac{1}{t^2}$; o hallada x_2: $x_1=\frac{1}{t^2}\int\frac{t^{-4}e^t}{t^{-4}}=\frac{e^t}{t^2}$.

Solución general: $\boxed{x=\frac{c_1e^t}{t^2}+\frac{c_2}{t^2}}$ o, algo más fea, $\boxed{x=\frac{c_0(e^t-1)}{t^2}+\frac{b_0}{t^2}}$.