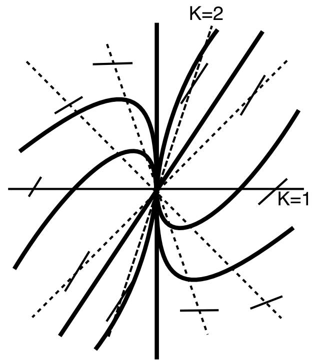
Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 1 (29/10/08)**

1. Sea $y'=\frac{by+t}{t}$. **a]** Si $b=\frac{1}{3}$, hallar su solución general y dibujar isoclinas y curvas integrales.
b] Discutir la estabilidad de la solución con $y(1)=0$ según los valores de b.

a] La solución de esta lineal $y'=\frac{y}{3t}+1$ es: $y=Ct^{1/3}+t^{1/3}\int t^{-1/3}dt=\boxed{Ct^{1/3}+\frac{3}{2}t}$.

[U homogénea: $tz'+z=\frac{z}{3}+1$, $\int\frac{3dz}{3-2z}=-\frac{3}{2}\ln(3-2z)=\ln t+C$, $3-2z=Ct^{-2/3}\dots$].



Sus isoclinas son $y=mt \rightarrow K=\frac{m}{3}+1$. $m=-3,-1,0,1,3 \rightarrow$ $K=0, 2/3, 1, 4/3, 2$

Rectas solución si $\frac{m}{3}+1=m \rightarrow m=\frac{3}{2}$ [o de la solución general].

Si $t=0$, $K=\infty$ (curva integral vertical). Decrecen entre $y=-3t$ y $t=0$.

$y''=\frac{y'}{3t}-\frac{y}{3t^2}=\frac{3t-2y}{9t^2} \rightarrow$ no hay puntos de inflexión $\left(y=\frac{3t}{2}\right.$ solución$\left.\right)$.

El TEyU garantiza única curva integral por cada punto del plano, salvo, quizás, en $(0,0)$. Son la recta más los múltiplos de $t^{1/3}$.

b] Lineal con coeficientes continuos en $[1,\infty)$: $e^{\int_1^t a}=t^b$ da la estabilidad de todas las soluciones.

Si $b<0$, como $t^b\rightarrow 0$ cuando $t\rightarrow\infty$, la ecuación es **AE**. Si $b=0$ es **EnoA** ($t^0=1\not\rightarrow 0$).

Y si $b>0$ (por ejemplo el caso de arriba) es **I** por no estar t^b acotada.

2. Sea $y'=\frac{t-y^2}{2y}$. **a]** Resolverla hallando un factor integrante $g(t)$ y por otro camino diferente.
b] Hallar la(s) solución(es), si existe(n), con: i) $y(0)=-1$, ii) $y(1)=0$.

a] $(y^2-t)+\underbrace{2yy'}_{2y\neq 0}=0$ no exacta. Para que $(y^2-t)g(t)+2yg(t)y'=0$ lo sea: $2yg=2yg' \rightarrow g(t)=e^t$

$\rightarrow e^t(y^2-t)+\underbrace{2e^tyy'}_{2e^ty}=0 \rightarrow$ $\begin{matrix} U=e^ty^2-te^t+e^t+p(y) \\ U=e^ty^2+q(t)\end{matrix}$ $\rightarrow e^t(y^2-t+1)=C$, $\boxed{y^2=Ce^{-t}+t-1}$.

También es de Bernouilli con $p=-1$: $2yy'=t-y^2 \xrightarrow{y^2=z} z'=-z+t \rightarrow z=Ce^{-t}+e^{-t}\int te^tdt$ ↑

b] El TEyU asegura que hay **solución única** con $y(t_o)=y_o$ si $y_o\neq 0$. Para el dato i) por ejemplo:

$1=C-1$, $y^2=2e^{-t}+t-1$, $\boxed{y=-\sqrt{2e^{-t}+t-1}}$ (la raíz positiva no lo cumple).

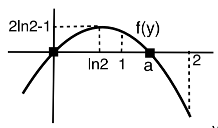
Para ii) el TEyU no decide. Como $\frac{dt}{dy}=\frac{2y}{t-y^2}$ tiene solución única $t(y)$ con $t(0)=1$ (y es $t'(0)=0$), sólo pasa una curva integral de pendiente vertical por $(1,0)$ y **no hay solución** que cumpla ii).

[Lo que sale imponiendo el dato, $y=\pm\sqrt{t-1}$, son dos funciones con derivada infinita en $t=1$].

3. Sea $y'=1+2y-e^y$. **a]** Probar que tiene una solución constante $y\equiv a$, con $a>1$.
b] Precisar la estabilidad de la solución con i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=1$.

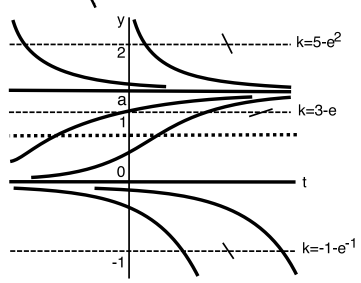
a] Si $f(y)=1+2y-e^y$, como $f(1)=3-e>0>7-e^3=f(3)$ $[e^3>2^3>7] \Rightarrow \exists a>1$ con $f(a)=0$.

Dibujamos la gráfica de f que será útil para **b]**.



$f'(y)=2-e^y \Rightarrow f$ crece hasta $y=\ln 2$ y decrece después.

$f(0)=0$, $f(\ln 2)=\ln 4-1$, $f(2)=5-e^2<0$ $[e^2>(\frac{5}{2})^2>5]$; $f\underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow}-\infty$.



b] i) La solución $y\equiv 0$ es inestable porque $f'(0)=1>0$
[o porque decrece cuando $y<0$, por ser $f(y)<0$].

ii) La que cumple $y(0)=1$ es AE pues ella y todas las que parten cerca están definidas para $t\geq 0$ y todas tienden hacia la solución constante $y\equiv a$.

Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 2 (28/11/08)**

1. Hallar la solución de $t^2x''+3tx'=\frac{1}{t}$ que satisface $x(1)=x'(1)=1$. [0.3 puntos]

Es una ecuación con $b(t)\equiv 0$:

$$x'=y \;\to\; y'=-\frac{3}{t}y+\frac{1}{t^3} \;\to\; y=\frac{C}{t^3}+\frac{1}{t^3}\int dt=\frac{C}{t^3}+\frac{1}{t^2} \;\to\; \boxed{x=K+\frac{C}{t^2}-\frac{1}{t}}\,.$$

Aunque también la podemos mirar como una ecuación de Euler:

$$\lambda(\lambda-1)+3\lambda=\lambda(\lambda+2)=0 \;\to\; \text{solución general: } x=c_1+c_2t^{-2}+x_p\,.$$

Para hallar la x_p podemos utilizar la fórmula de variación de las constantes:

$$\begin{vmatrix}1 & t^{-2}\\ 0 & -2t^{-3}\end{vmatrix}=-2t^{-3}\,;\quad x_p=t^{-2}\int\frac{1\cdot t^{-3}\,dt}{-2t^{-3}}-\int\frac{t^{-2}t^{-3}dt}{-2t^{-3}}=-\frac{t^{-1}}{2}-\frac{t^{-1}}{2}=-t^{-1} \;\to\; \boxed{x=c_1+\frac{c_2}{t^2}-\frac{1}{t}}\,.$$

O bien, hay $x_p=Ae^{-s}=At^{-1}$ (haciendo $t=e^s$ quedaría $\cdots=e^{-s}$ y $\lambda=-1$ no es autovalor)

$$\to\; x_p'=-At^{-2}\,,\; x_p''=2At^{-3} \;\to\; 2At^{-1}-3At^{-1}=t^{-1} \;\to\; A=-1\,,\; x_p=-t^{-1}\,.$$

Imponiendo el dato inicial: $\begin{matrix}c_1+c_2-1=1\\ -2c_2+1=1\end{matrix}\;\to\; c_2=0,\ c_1=2 \;\to\; \boxed{x=2-\frac{1}{t}}\,.$

2. Sea [e] $x^{IV}+4x'''+6x''+4x'+ax=4e^{-2t}$, $a\in\mathbf{R}$. [0.8 puntos]

a] Hallar una solución de [e] para todos los valores de a.
b] Para $a=0$, hallar la solución general de [e].
c] Precisar un a para el que [e] sea: i) inestable, ii) asintóticamente estable.
d] Para $a=65$, razonar si todas las soluciones de [e] tienden a 0 cuando $t\to\infty$.

a] $\lambda=-2$ es raíz de $P(\lambda)=\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+a$ si $16-32+24-8+a=a=0$
[y es raíz simple, por ejemplo, porque no anula la derivada: $P'(\lambda)=4(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)$].

Por tanto, si $a\neq 0$ hay $x_p=Ae^{-2t} \;\to\; A[16-32+24-8+a]e^{-2t}=4e^{-2t} \;\to\; \boxed{x_p=\frac{4}{a}e^{-2t}}$.

Si $a=0$: $x_p=Ate^{-2t}, x_p'=A(1-2t)e^{-2t}, x_p''=A(4t-4)e^{-2t}, x_p'''=A(12-8t)e^{-2t}, x_p^{IV}=A(16t-32)e^{-2t}$

$$\to\; At[16-32+24-8]e^{-2t}+A[-32+48-24+4]e^{-2t}=-4Ae^{-2t}=4e^{-2t} \;\to\; \boxed{x_p=-te^{-2t}}$$

b] Para $a=0$: $P(\lambda)=\lambda(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+2) \;\to\; \lambda=0,-2,-1\pm i \;\to$

$$\boxed{x=c_1+c_2e^{-2t}+e^{-t}(c_3\cos t+c_4\,\mathrm{sen}\,t)-te^{-2t}}\,.$$

c] Para cualquier $\boxed{a<0}$ seguro que es **I** (pues uno de los coeficientes de $P(\lambda)$ es negativo).
O si se prefiere, $\lambda=1$ es autovalor (y, por tanto, la ecuación es inestable) si $a=-15$.

Con una mínima vista se observa que si $a=1$ es $P(\lambda)=(\lambda+1)^4 \;\to\; \lambda=1$ cuádruple $\Rightarrow$ **AE**.
Si queremos saber todos lo valores para los que es **AE**, acudimos a R-H:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&1&0&0\\4&6&4&1\\0&a&4&6\\0&0&0&a\end{pmatrix} \to\; 4>0\,,\; 20>0\,,\; 16(5-a)>0\,,\; a>0 \;\to\; \boxed{\mathbf{AE}\Leftrightarrow 0<a<5}\,.$$

d] Si $a=65$, la ecuación es inestable, según muestra R-H (coeficientes positivos **no** implica **EA**), y esto implica que hay alguna solución x_h de la homogéna que no está acotada en el infinito. La solución $x_h+\frac{4}{65}e^{-2t}$ de [e] seguro que no tiende a 0 cuando $t\to\infty$.

[Con un poco de vista, podemos calcular los autovalores para todo a:
$P(\lambda)=(\lambda+1)^4+a-1=0 \;\to\; \lambda=-1+\sqrt[4]{1-a}$ (4 raíces reales o complejas)
Por ejemplo, si $a=65$, $\lambda=-1+2\sqrt[4]{-4}=1\pm 2i,-3\pm 2i$].

3. Sea $\begin{cases} x' = y-3 \\ y' = x+az \\ z' = 1-3y \end{cases}$. **a]** Discutir la estabilidad según los valores de a. [0.9 puntos]
b] Si $a=-1$: Hallar la solución con $x(0)=0$, $y(0)=3$, $z(0)=4$. Escribir una matriz fundamental del sistema homogéneo.

a] $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & a \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda-3a\lambda = -\lambda\left[\lambda^2-(1-3a)\right] \Rightarrow$ Si $a<\frac{1}{3}$ es **I**, pues $\exists\lambda=\sqrt{1-3a}>0$.

Si $a>\frac{1}{3}$ es **EnoA**, pues $0, \pm\sqrt{3a-1}$ tienen $\mathrm{Re}=0$ y son simples.

Si $a=\frac{1}{3}$ es $\lambda=0$ triple con un único vector propio l.i. $\left[\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2\right]$. Es **I**.

b] Derivando la segunda ecuación se consigue fácilmente una de segundo orden que sólo tiene y:

$$y''=x'-z'=y-3-1+3y \to y''-4y=-4 \to y=1+c_1e^{-2t}+c_2e^{2t} \xrightarrow[y(0)=3,y'(0)=-4]{} \boxed{y=1+2e^{-2t}}$$

$$\to x'=2e^{-2t}-2 \to x=c_3-2t-e^{-2t} \xrightarrow[x(0)=0]{} \boxed{x=1-2t-e^{-2t}} \to z=x-y'=\boxed{1-2t+3e^{-2t}}$$

Para hallar una matriz fundamental por este camino, hallamos la solución general del homogéno:

$$\begin{aligned} &y''=x'-z'=y+3y \to y''-4y=0 \to y=c_1e^{-2t}+c_2e^{2t}=x' \to \\ &x=c_3-\tfrac{1}{2}c_1e^{-2t}+\tfrac{1}{2}c_2e^{2t} \to z=x-y'=c_3+\tfrac{3}{2}c_1e^{-2t}-\tfrac{3}{2}c_2e^{2t} \end{aligned} \to \boxed{\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{-2t} & e^{2t} \\ 1 & \frac{3}{2}e^{-2t} & -\frac{3}{2}e^{2t} \end{pmatrix}}.$$

Laplace:

$$\begin{cases} sX=Y-\frac{3}{s} \quad \to \quad X=\frac{Y}{s}-\frac{3}{s^2} \searrow \\ sY-3=X-Z \\ sZ-4=\frac{1}{s}-3Y \to Z=\frac{4}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{3Y}{s} \nearrow \end{cases} sY-\frac{4Y}{s}=3-\frac{4}{s}-\frac{4}{s^2},\ Y=\frac{3s^2-4s-4}{s(s+2)(s-2)}=\frac{3s+2}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}=\frac{A(s+2)+Bs}{s(s+2)}$$

$$s=0\to A=1,\ s=-2\to B=2\ \left[y=1+2e^{-t}\right]$$

$$X=\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s(s+2)}-\frac{3}{s^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}-\frac{2}{s^2}\ \left[x=1-2t-e^{-2t}\right] \to$$

$z=x-y'=\cdots$, o siguiendo por Laplace, $Z=\cdots=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s+2}\ \left[z=1-2t+3e^{-2t}\right]$.

Laplace es largo para soluciones generales (resolveríamos con $x(0)=a$, $y(0)=b$, $z(0)=c$).

Mediante matrices:

$$\lambda=0:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \lambda=-2:\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\quad \lambda=2:\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \mathbf{P^{-1}}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.\ e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.\ \mathbf{x_0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.\ \mathbf{f}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{P}}{4}e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{\mathbf{P}}{2}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}ds=\frac{\mathbf{P}}{4}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5e^{-2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix} -8 \\ 2e^{2s-2t} \\ -2e^{2t-2s} \end{pmatrix}ds\right]=\frac{\mathbf{P}}{4}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5e^{-2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8t \\ 1-e^{-2t} \\ 1-e^{2t} \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1-2t-e^{-2t} \\ 1+2e^{-2t} \\ 1-2t+3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Una $\mathbf{W}(t)$ (formada por 3 soluciones del homogéneo) es: $\boxed{\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix} 1 & -e^{-2t} & e^{2t} \\ 0 & 2e^{-2t} & 2e^{2t} \\ 1 & 3e^{-2t} & -3e^{2t} \end{pmatrix}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}}$.

[Como $\lambda=0$ es autovalor no funcionaría el atajo de buscar $\mathbf{x_p}$ constante. Inspirándonos en el método de coeficientes indeterminados para las ecuaciones se nos puede ocurrir probar:

$$\mathbf{x_p}=\begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \\ Et+F \end{pmatrix} \to \left.\begin{matrix} A=Ct+D-3 \\ C=At+B-Et-F \\ E=1-3Ct-3D \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} C=0,\ B=F \\ A=E=-2,\ D=1 \end{matrix} \to \mathbf{x_p}=\begin{pmatrix} B-2t \\ 1 \\ B-2t \end{pmatrix} \text{ para cualquier } B.$$

$$\to \text{solución general: } \mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}+c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}e^{2t}-\begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 2t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{d.i.}]{}$$

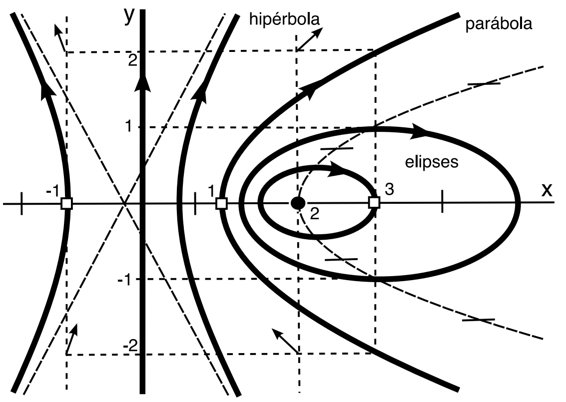
$$\begin{cases} c_1-c_2+c_3=0 \\ c_2+c_3=1 \\ c_1+3c_2-3c_3=4 \end{cases} \to c_1=c_2=1,\ c_3=0 \to \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1-2t-e^{-2t} \\ 1+2e^{-2t} \\ 1-2t+3e^{-2t} \end{pmatrix}\ ].$$

1. Sea $\begin{cases} x'=xy \\ y'=2-x+y^2 \end{cases}$. **a]** Hallar sus órbitas y dibujar el mapa de fases. **b]** Decidir si es periódica la solución del sistema que satisface $x(0)=a$, $y(0)=0$, para: i) $a=-1$, ii) $a=1$, iii) $a=3$. [0.6 puntos]

a] $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{x-2}{xy} \xrightarrow{z=x^2} \frac{dz}{dx}=\frac{2z}{x}-\frac{2x-4}{x} \to z=Cx^2-x^2\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx = \boxed{Cx^2+2x-2=y^2}$ (cónicas).

Puntos críticos: $\begin{matrix} x=0\downarrow \\ 2+y^2\neq 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} y=0\downarrow \\ x=2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. $\left.\begin{pmatrix} y & x \\ -1 & 2y \end{pmatrix}\right|_{(2,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \lambda=\pm i\sqrt{2}$, centro de la AL.

Como f es impar en y y g par en y (o como se ve en la expresión recuadrada de arriba), las órbitas son simétricas respecto a $y=0$ y el centro lo es también de nuestro sistema no lineal.



Campo horizontal: $x=2+y^2$ (parábola). Campo vertical: $x=0$ (órbita) e $y=0$.

$\mathbf{v}(0,y)=\begin{pmatrix}0\\2+y^2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2,y)=\begin{pmatrix}2y\\y^2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(-1,y)=\begin{pmatrix}-y\\3+y^2\end{pmatrix}$.

b] Para $a=-1$ es claro por el campo que la órbita no es cerrada (solución no periódica). En concreto, es la de $C=4$ (y, por tanto, se trata de una hipérbola).

La órbita para $a=1$ es la de $C=0$, o sea, la parábola $x=1+\frac{1}{2}y^2 \to$ solución no periódica.

A $a=3$ le corresponde la de $C=-\frac{4}{9} \to y^2+\frac{4}{9}(x-\frac{9}{4})^2=\frac{1}{4} \to$ elipse (solución periódica).

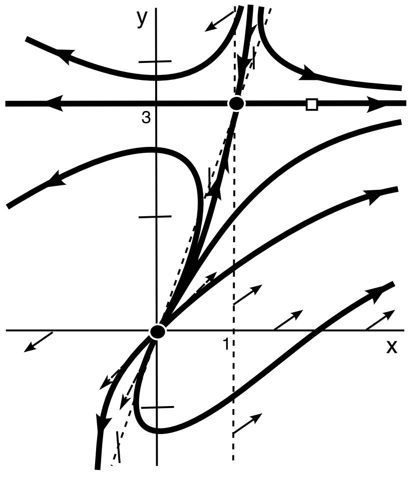
[También se deduce del mapa: desde $(3,0)$ sigue $\swarrow$, luego $\nwarrow$, debe cortar el eje, y es simétrica].

2. Sea $\begin{cases} x'=9x-3y \\ y'=6x-2xy \end{cases}$. **a]** Dibujar su mapa de fases. **b]** Hallar la solución del sistema que cumple $x(0)=2$, $y(0)=3$. [0.7 puntos]

a] $\begin{matrix} y=3x \\ x=0, y=3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6-2y & -2x \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} (0,0)\nearrow \lambda=3,6 \text{ con } \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ [tangencia] y } \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to \text{nodoI.} \\ (1,3)\searrow \lambda=9,-2 \text{ [evidente!!] con } \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}3\\11\end{pmatrix} \to \text{silla.} \end{matrix}$

Campo horizontal: $y=3$ (órbita) y $x=0$. Campo vertical: $y=3x$.

$\mathbf{v}(x,0)=3x\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(1,y)=(3-y)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.



La recta que contiene a la separatriz estable de la aproximación lineal es $y=\frac{11x-2}{3}$.

$\mathbf{v}(x,\frac{11x-2}{3})=\frac{2}{3}(1-x)\begin{pmatrix}3\\11x\end{pmatrix}$ [si $x>1$ su pendiente es mayor que la de la recta].

La separatriz, pues, se curva ')' y, como las demás órbitas (menos 2) sale del nodo con pendiente 2.

La otra separatriz, como vimos, se mantiene recta.

$\mathbf{v}(x,x)=2x\begin{pmatrix}3\\3-x\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x,2x)=x\begin{pmatrix}3\\6-4x\end{pmatrix}$.

$\left[\text{Haciendo } \frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{ se obtiene } y=3 \text{ y la curva de inflexión } y^2-3xy+2x^2-2x^3=0,\ y=\frac{x}{2}(3\pm\sqrt{1+8x})\right]$.

b] La órbita por $(2,3)$ es la recta $y=3 \to x'=9x-9 \to x=1+Ke^{9t} \underset{x(0)=2}{\longrightarrow} x=1+e^{9t}$, $\boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1+e^{9t}\\3\end{pmatrix}}$.

3. Sea $(t^2-1)x''-4tx'+6x=0$. **a]** Hallar la solución que satisface $x(0)=-1$, $x'(0)=3$.
b] Hallar, utilizando Frobenius, una solución que se anule en $t=1$.
c] Estudiar si existen soluciones no triviales que tiendan a 0 cuando $t\to\infty$. [1.1 puntos]

a] Como $t=0$ es regular (a y b son analíticas para $|t|<1$), probamos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k \to \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kt^k-k(k-1)c_kt^{k-2}]+\sum_{k=1}^{\infty}-4kc_kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}6c_kt^k=0 \to$$

$$t^0:\ -2c_2+6c_0=0\to c_2=3c_0=-3\ \left[\,c_0=x(0)\,\right];$$

$$t^1:\ -6c_3-4c_1+6c_1=0\to c_3=\tfrac{c_1}{3}=1\ \left[\,c_1=x'(0)\,\right];$$

$$t^k:\ (k^2-5k+6)c_k-(k+2)(k+1)c_{k+2}=0\to c_{k+2}=\tfrac{(k-2)(k-3)}{(k+2)(k+1)}c_k \to$$

$$c_4=0=c_6=\cdots,\ c_5=0=c_7=\cdots \to \boxed{x=-1+3t-3t^2+t^3=(t-1)^3}\ .$$

De otra forma: $-x''(0)+6x(0)=0 \to x''(0)=-6$. Y derivando:

$$(t^2-1)x'''-2tx''+2x'=0\to x'''(0)=2x'(0)=6\ ,$$

$$(t^2-1)x^{IV}=0\to x^{IV}=0\to x^V=x^{VI}=\cdots=0\ .$$

b] Haciendo $t=s+1$ obtenemos $(2s+s^2)x''-4(1+s)x'+6x=0$, $s^2x''-s\frac{4(1+s)}{2+s}x'+\frac{6s}{2+s}x=0$

$\to$ singular regular con $r=3,0\to$ se anula en $s=0$ la $x_1=s^3\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k=c_0s^3+c_1s^4+\cdots$

(Debe salir $x_1=s^3$ según el apartado **a]**).

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[2(k+3)(k+2)c_ks^{k+2}+(k+3)(k+2)c_ks^{k+3}-4(k+3)c_ks^{k+2}-4(k+3)c_ks^{k+3}+6c_ks^{k+3}\Big]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\big[2k(k+3)c_ks^{k+2}+k(k+1)c_ks^{k+3}\big]=0\to$$

$$s^{k+2}:\ 2k(k+3)c_k+(k-1)kc_{k-1}=0\to c_k=-\tfrac{k-1}{2(k+3)}c_{k-1}\ ,\ k\geq1\ .$$

A partir de la serie inicial: s^2: $0c_0=0\to c_0$ indeterminado;

s^3: $8c_1+0c_0=0\to c_1=0$ [coincide con la regla de recurrencia].

Como cada c_k queda en función del anterior, $c_2=c_3=\cdots=0\to \boxed{x_1=s^3}$ $\big[=(t-1)^3\big]$.

c] Como, a la vista de **a]**, la solución general es $x=c_0\big[1+3t^2\big]+c_1\big[t+\frac{1}{3}t^3\big]$,
es claro que no hay soluciones no triviales que tiendan a 0 si $t\to\infty$,
pero lo podemos ver directamente analizando el punto del infinito:

$$t=\tfrac{1}{s}\to\Big[\tfrac{1}{s^2}-1\Big]\big[s^4\ddot{x}+2s^3\dot{x}\big]-\tfrac{4}{s}\big[-s^2\dot{x}\big]+6x=s^2\big[1-s^2\big]\ddot{x}+s\big[6-2s^2\big]\dot{x}+6x=0\ ,$$

ecuación para la que $s=0$ es singular regular con $r_1=-2$, $r_2=-3$,
por lo que sus soluciones $x_1=\frac{1}{s^2}\sum$ y $x_2=\frac{1}{s^3}\sum+dx_1\ln s$ se van al
infinito cuando $s\to0^+$, o sea, cuando $t\to\infty$.

$\Big[$Si, haciendo **b]**, hemos llegado a $x_1=s^3$, podríamos hallar la solución general calculando

$$x_2=s^3\int\frac{e^{2\int\frac{2s+2}{s^2+2s}}}{s^6}=s^3\int\frac{(s+2)^2}{s^4}=s^3\big[-\tfrac{1}{s}-\tfrac{2}{s^2}-\tfrac{4}{3s^3}\big]\to x=k_1s^3+k_2\big(\tfrac{4}{3}+2s+s^2\big)\Big].$$