Ecuaciones Diferenciales I (C - piloto) **Soluciones del parcialillo 1 (28/10/09)**

1. Sea $\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{x^2+y^2}$.

a] Resolverla por **dos** de estos tres caminos: i) hallando un factor integrante $g(y)$, ii) como homogénea, iii) como Bernouilli, tras dar la vuelta a la ecuación.
b] Determinar cuántas soluciones satisfacen: i) $y(0)=-1$, ii) $y(0)=0$.
[¿Dónde crecen y decrecen las soluciones?].

a] i) $\underbrace{xy+(x^2+y^2)y'}_{x\not\equiv 2x}=0$ no exacta. Para que $xyg(y)+(x^2+y^2)g(y)y'=0$ lo sea: $xg+xyg'=2xg$, $g'=\frac{1}{y}g\ \to$

$$g(y)=y\ \to\ \underbrace{xy^2+(x^2y+y^3)yy'}_{2xy}=0\ \to\ \begin{matrix}U=\frac12x^2y^2+p(y)\\ U=\frac12x^2y^2+\frac14y^4+q(x)\end{matrix}\ \to\ \boxed{y^4+2x^2y^2=C}\ \to\ y=\pm\sqrt{\sqrt{x^4+C}-x^2}\ .$$

ii) $z=\frac{y}{x}$, $xz'+z=-\frac{z}{z^2+1}$, $\int\frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+2)}=\int\left[\frac{1/2}{z}+\frac{z/2}{z^2+2}\right]dz=-\int\frac{dx}{x}+C$, $2\ln z+\ln(z^2+2)=C-4\ln x$, $z^2(z^2+2)=\frac{C}{x^4}$

iii) $\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ Bernouilli: $2xx'=-\frac{2x^2}{y}-2y\xrightarrow{x^2=z}z'=-\frac{2z}{y}-2y\to z=\frac{C}{y^2}-\frac{1}{y^2}\int 2y^3dy=\frac{C}{y^2}-\frac{y^2}{2}=x^2$

b] Como f y f_y son continuas en $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$, el TEyU asegura **solución única** con $y(x_o)=y_o$ excepto si $x_o=y_o=0$ [pues son continuas en un entorno de (x_o,y_o)]. Para el dato i) por ejemplo.

$\Big[1=C$, $y=-\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}$ es esa solución única; $y^4+2x^2y^2=1$ describe 2 funciones $y(x)\Big]$.

Para ii) el TEyU no decide. $1=C$, $y^2(y^2+2x^2)=0\ \to\ y=0$, pero esto no basta para probar la unicidad, pues se podría haber perdido alguna solución en el cálculo. Como las soluciones crecen en el segundo y cuarto cuadrantes, y decrecen en el primero y tercero, **por el origen sólo pasa la solución** $y\equiv0$.

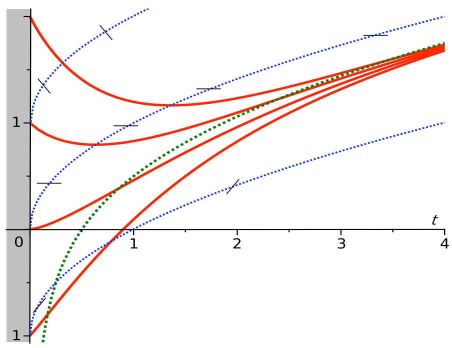
2. Sea $y'=\sqrt{t}-y$.

a] Dibujar isoclinas, curva de puntos de inflexión y soluciones.
b] Probar que todas sus soluciones tienden a ∞ cuando $t\to\infty$.
Precisar la estabilidad de la solución con $y(0)=0$.
[$\int t^r e^t dt$ no calculable si $r\notin\mathbf{N}$].

a] Ecuación definida en $t\geq0$. $\sqrt{t}-y=K\ \to$ isoclinas $y=\sqrt{t}-K$.
Las soluciones crecen (decrecen) si $y<\sqrt{t}$ ($y>\sqrt{t}$).

$y''=\frac{1}{2t^{1/2}}-t^{1/2}+y=0\ \to\ y=t^{1/2}-\frac{1}{2t^{1/2}}=\frac{2t-1}{2t^{1/2}}$ inflexión.

[Función creciente que pasa por $(\frac12,0)$, $\underset{t\to0^+}{\to}-\infty$, $\underset{t\to\infty}{\sim}t^{1/2}$].



b] La solución de esta lineal de coeficientes continuos en $[0,\infty)$ es:

$$y=Ce^{-t}+e^{-t}\int t^{1/2}e^t dt\ .\quad \lim_{t\to\infty}\frac{C+\int t^{1/2}e^tdt}{e^t}\overset{\frac{\infty}{\infty},\,\text{L'H}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{t^{1/2}e^t}{e^t}=\infty\ .$$

$e^{\int a}=e^{-t}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$ da la estabilidad de todas las soluciones.
Todas ellas son **AE**, la de $y(0)=0$ en particular.

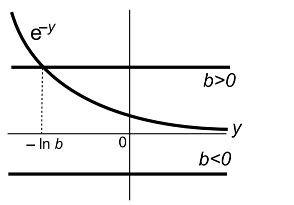
3. Sea $y'=e^{-y}-b$.

a] Discutir según los valores de b la estabilidad de las posibles soluciones constantes.
b] Si $b=0$, la solución con $y(0)=0$, ¿está definida en $[0,\infty)$?, ¿es estable?

a] Si $e^{-y}-b=0\ \to\ y\equiv-\ln b$, si $b>0$. Si $b\leq0$, no hay soluciones constantes.
La estabilidad de las soluciones constantes de autónomas la da un teorema:

$$f'(y)=-e^{-y}\ ,\ f'(-\ln b)=-b>0\Rightarrow$$

para cada $b>0$ **hay 1 solución constante que es AE**.

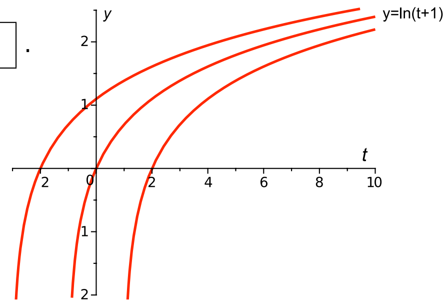


Nos diría esto mismo el signo de f antes y después de la solución constante: por debajo de $y\equiv-\ln b$ las soluciones crecen y por encima decrecen.

b] La solución general de $y'=e^{-y}$, $e^yy'=1$, es $e^y=t+C$, $\boxed{y=\ln(t+C)}$.

La que cumple $y(0)=0$ es $y=\ln(t+1)$, claramente definida si $t\geq0$.
Las de $y(0)=y_o$, que son $y=\ln(t+e^{y_o})$, también lo están.

[Esto lo podíamos decir sin resolver la ecuación: como todas las soluciones son crecientes, no pueden irse a $-\infty$; como en $y>0$ es $y'<1$, no pueden irse a $+\infty$ en tiempo finito, porque sus pendientes están acotadas].



Y como $\left|\ln(t+1)-\ln(t+C)\right|=\left|\ln\frac{t+1}{t+C}\right|\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}|\ln 1|=0$, es **AE**.

1. Sea $t^2x''-tx'=4\ln t$. **a]** Hallar su solución general. [0.5 puntos]
b] Hallar la matriz fundamental canónica en $t=1$ del sistema equivalente.

a] Es una ecuación con $b(t)\equiv 0$:

$$x'=y \to y'=\frac{1}{t}y+\frac{4\ln t}{t^2} \to y=Ct+t\int\frac{4\ln t}{t^3}dt \overset{\text{partes}}{=} Ct-\frac{2\ln t}{t}-\frac{1}{t} \to \boxed{x=K+Ct^2-\ln^2 t-\ln t}\ .$$

Aunque quizás sea más corto mirarla como una ecuación de Euler:

$$\lambda(\lambda-1)-\lambda=\lambda(\lambda-2)=0 \to \text{ solución general: } x=c_1+c_2t^2+x_p\ .$$

Para hallar la x_p podemos utilizar la fórmula de variación de las constantes:

$$\begin{vmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{vmatrix}=2t\ ;\quad x_p=t^2\int\frac{4t^{-2}\ln t\,dt}{2t}-\int\frac{t^2 4t^{-2}\ln t\,dt}{2t}=-\ln t-\tfrac{1}{2}-\ln^2 t \to \boxed{x=c_1+c_2t^2-\ln^2 t-\ln t}\ .$$

O bien, hay $x_p=As^2+Bs=A\ln^2 t+B\ln t$ (haciendo $t=e^s$ quedaría $\cdots=4s$ y $\lambda=0$ es autovalor) $\to$

$$x_p'=2At^{-1}\ln t+Bt^{-1},\ x_p''=-2At^{-2}\ln t+(2A-B)t^{-2} \to (2A-2B)-4A\ln t=4\ln t \to A=B=-1\ \uparrow .$$

b] Una $\mathbf{W}(t)$ de $\begin{cases}x'=y\\ y'=y/t\end{cases}$ está formada por las 2 soluciones del homogéneo y sus derivadas: $\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix}1 & t^2\\ 0 & 2t\end{pmatrix}$.

Para hallar la canónica basta multiplicar por $\mathbf{W^{-1}}(1)$: $\mathbf{W_c}(t)=\mathbf{W}(t)\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}(t^2-1)\\ 0 & t\end{pmatrix}}$.

2. Sea $\begin{cases}x'=2x+y+2e^{2t}\\ y'=2x+3y+3e^{t}\end{cases}$. Hallar la solución con $x(0)=1$, $y(0)=-3$ por **dos** de estos caminos:
i) matrices, ii) convirtiéndolo en ecuación, iii) usando Laplace. [0.8 puntos]

i) $\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda-4)$. $\lambda=1$: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$; $\lambda=4$: $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \to \mathbf{P^{-1}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.\ e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{4t}\end{pmatrix}.\ \mathbf{x_0}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}.\ \mathbf{f}=\begin{pmatrix}2e^{2t}\\ 3e^t\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{P}}{3}e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}+\frac{\mathbf{P}}{3}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix}4e^{2s}-3e^s\\ 2e^{2s}+3e^s\end{pmatrix}ds=\frac{\mathbf{P}}{3}\left[\begin{pmatrix}5e^t\\ -2e^{4t}\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}4e^{t+s}-3e^t\\ 2e^{4t-2s}+3e^{4t-3s}\end{pmatrix}ds\right]=\frac{\mathbf{P}}{3}\left[\begin{pmatrix}5e^t\\ -2e^{4t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4e^{2t}-4e^t-3te^t\\ 2e^{4t}-e^{2t}-e^t\end{pmatrix}\right]\to$$

$$\boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}e^{2t}-te^t\\ te^t-e^t-2e^{2t}\end{pmatrix}}$$

ii) $y=x'-2x-2e^{2t} \to x''-2x'-4e^{2t}=2x+3x'-6x-6e^{2t}+3e^t$, $\begin{cases}x''-5x'+4x=-2e^{2t}+3e^t\\ x(0)=1,\ x'(0)=2-3+2=1\end{cases}$

$x_p=Ae^{2t}+Bte^t \to A(4-10+4)e^{2t}+B(2-5)e^t=-2e^{2t}+3e^t \to A=1, B=-1 \to x=c_1e^t+c_2e^{4t}+e^{2t}-te^t$

$\xrightarrow{d.i.}\begin{cases}c_1+c_2+1=1\\ c_1+4c_1+2-1=1\end{cases} \to \boxed{x=e^{2t}-te^t} \to y=2e^{2t}-(t+1)e^t-2e^{2t}+2te^t-2e^{2t}=\boxed{te^t-e^t-2e^{2t}}$.

iii) Laplace: $\begin{cases}sX-1=2X+Y+\frac{2}{s-2} \to Y=(s-2)X-\frac{s}{s-2}\downarrow\\ sY+3=2X+3Y+\frac{3}{s-1} \qquad s(s-2)X-\frac{s^2}{s-2}+3-2X=3(s-2)X-\frac{3s}{s-2}+\frac{3}{s-1},\ (s^2-5s+4)X=\frac{s^2-3s}{s-2}+\frac{3}{s-1}-3,\end{cases}$

$$X=\frac{s^3-7s^2+15s-12}{(s-1)^2(s-2)(s-4)}=\frac{s^2-3s+3}{(s-1)^2(s-2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{s-2}=\frac{A(s-1)(s-2)+B(s-2)+C(s-1)^2}{(s-1)^2(s-2)}$$

$$s=2\to C=1\,;\ s=1\to B=-1\,;\ s^2:1=A+C,\ A=0 \to X=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-1)^2}\,,\ \boxed{x=e^{2t}-te^t}\ .$$

$y=x'-2x-2e^{2t}=\cdots$, o siguiendo por Laplace:

$$Y=1-\frac{s-1-1}{(s-1)^2}-\frac{s}{s-2}=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s-2}\,,\ \boxed{y=te^t-e^t-2e^{2t}}\ .$$

3. Sea [e] $x^{IV}+9x'''+ax''+36x'+16x=1$, $a\in\mathbf{R}$. [0.7 puntos]

a] Discutir la estabilidad de [e] según los valores de a .

b] Para $a=8$ y $a=28$, hallar la solución general de [e].

c] Para $a=20$, hallar el límite cuando $t\to\infty$ de la solución de [e] con $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=\pi$.

a] $P_a(\lambda)=\lambda^4+9\lambda^3+a\lambda^2+36\lambda+16$.

Si $a<0$ seguro que es **I** (uno de los coeficientes es negativo), si $a=0$ no es **AE** y si $a>0$ no sabemos. Necesitamos Routh-Hurwitz:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}9&1&0&0\\36&a&9&1\\0&16&36&a\\0&0&0&16\end{pmatrix}\to 9>0\ ,\ 9(a-4)>0\ ,\ 81\begin{vmatrix}1&1&0\\4&a&1\\0&16&4\end{vmatrix}=324\begin{vmatrix}1&1&0\\4&a&1\\0&4&1\end{vmatrix}=324(a-8)>0\ ,\ 16>0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{AE}\Leftrightarrow a>8}\ ,\ \boxed{\mathbf{I}\text{ si } a<8}\ \text{ y no sabemos aún si } a=8 .$$

Para $\boxed{a=8}$ van a existir autovalores $\lambda=\pm qi$. Lo comprobamos:

$$\lambda=qi\to q^4-9q^3i-8q^2+36qi+16\to \begin{matrix}q^4-8q^2+16=(q^2-4)^2=0\\9q(4-q^2)=0\end{matrix}\to\lambda=\pm2i \text{ autovalores}\to$$

$$P_4(\lambda)=(\lambda^2+4)(\lambda^2+9\lambda+4)\to\lambda=\pm2i,\ \tfrac{-9\pm\sqrt{65}}{2}\Rightarrow \textbf{EnoA}\ \text{(los primeros son simples y los otros son } <0\text{)}.$$

b] La solución particular (a ojo) es $x_p=\frac{1}{16}$ para cualquier a .

Para $a=8$ acabamos de calcular los autovalores, con lo que la solución general es:

$$\boxed{x=c_1\cos 2t+c_2\,\mathrm{sen}\,2t+c_3e^{(-9+\sqrt{65})t/2}+c_4e^{(-9-\sqrt{65})t/2}+\frac{1}{16}}\ .$$

Para $a=28$, tras rufinear un rato: $P_{28}(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)^2(\lambda+4)\to\lambda=-1,-2\text{ doble},-4\to$

$$\boxed{x=c_1e^{-t}+(c_2+c_3t)e^{-2t}+c_4e^{-4t}+\frac{1}{16}}\quad\text{(debía ser AE).}$$

c] Si $a=20$, la ecuación es **EA**, con lo que todas las soluciones de la homogéna tienden a 0 cuando $t\to\infty$. Por tanto, todas las de la no homogénea (y la de esos datos en particular) tenderán hacia $\boxed{\frac{1}{16}}$.

1. Sea $t(1+t)x''-x'=0$. **a]** Hallar, utilizando Frobenius, una solución que se anule en $t=0$.
b] Analizar el punto del infinito y deducir si existen soluciones no acotadas cuando $t\to\infty$.
c] Escribir la solución en términos de funciones elementales y comprobar todo lo anterior.

a] $t^2x''-t\,\frac{1}{1+t}\,x'=0$, $t=0$ singular regular, $r(r-1)-r=0$, $r=2,0$; $x_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2}$ se anula en $t=0\to$

$$\sum_0\Big[(k+2)(k+1)c_k[t^{k+1}+t^{k+2}]-(k+2)c_kt^{k+1}\Big]=0\to$$

$$t^1:\ 2c_0-2c_0=0,\ c_0 \text{ cualquiera};\quad t^2:\ 6c_1+2c_0-3c_1=0,\ c_1=-\tfrac{2}{3}c_0;\quad t^{k+1}:\ (k+2)kc_k+(k+1)kc_{k-1}=0\to$$

$$c_k=-\tfrac{k+1}{k+2}c_{k-1}\to c_2=-\tfrac{3}{4}c_1=\tfrac{1}{2}c_0,\ c_3=-\tfrac{4}{5}c_2=-\tfrac{2}{5}c_0,\ c_4=-\tfrac{5}{6}c_3=\tfrac{1}{3}c_0,\ c_5=-\tfrac{6}{7}c_4=-\tfrac{2}{7}c_0,\ \dots$$

$$\text{Tomando } c_0=\tfrac{1}{2},\ x_1=\tfrac{1}{2}t^2-\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{4}t^4-\tfrac{1}{5}t^5+\cdots=\boxed{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}t^k=t-\ln(1+t)}$$

b] Haciendo $t=\frac{1}{s}$ se tiene $s^2(1+s)\ddot{x}+(2+3s)\dot{x}=0$, con $r=0,-1$, y soluciones no acotadas cuando $s\to0$:

$$x_1=s^0\sum \text{ lo está, pero } x_2=\tfrac{1}{s}\big[\sum+dx_1s\ln s\big]\underset{s\to0}{\to}\infty,\ \text{si } b_0>0\ \ \big(\sum\to b_0,\ s\ln s\to0\big).$$

c] $x'=y\to y'=\frac{y}{t(1+t)}\to y=C\frac{t}{1+t}\ \Big(e^{\int[\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}]dt}=e^{\ln\frac{t}{1+t}}\Big)\to x=C\int\frac{1+t-1}{1+t}dt+K=\boxed{C[t-\ln(1+t)]+K}$.

El desarrollo de la primera solución es el de antes y se tiene que $t\Big[1-\frac{\ln(1+t)}{t}\Big]\to\infty$, cuando $t\to\infty$.

2. Sea $x''=x+xx'+(x')^2$. **a]** Estudiar cómo se deforma la aproximación lineal cerca de su punto crítico.
b] Hallar la solución con: o bien i) $x(0)=-1,\ x'(0)=1$ (sólo una es calculable). o bien ii) $x(0)=1,\ x'(0)=1$ ¿Es estable la hallada?

a] $\begin{cases}x'=v\\ v'=x+xv+v^2\end{cases}$. Único punto crítico $\binom{0}{0}$ $\Big[\begin{smallmatrix}v=0\downarrow\\ x=0\end{smallmatrix}\Big]$.

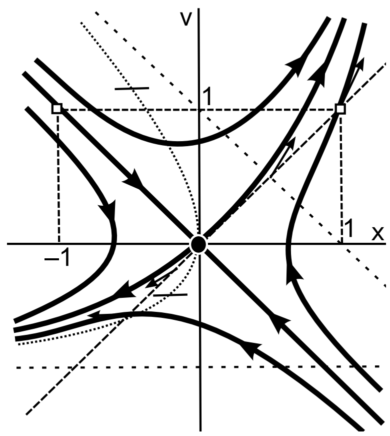
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\to\lambda=\pm1\to$ silla $\Big[\mathbf{v}=\binom{1}{\lambda}$ en las ecuaciones$\Big]$.

Para ver cómo se deforman las separatrices:

$\mathbf{v}(x,x)=x\binom{1}{1+2x}$ (se deforma hacia arriba tanto en $x>0$ como en $x<0$)

$\mathbf{v}(x,-x)=\binom{-x}{x}$ (ésta **no se deforma**).

[Si quisiéramos dibujar el mapa de fases global pintaríamos el campo en varias rectas y la curva de pendiente horizontal:
$x=-\frac{v^2}{1+v}=1-v-\frac{1}{1+v}$].



b] Los datos de i) están asociados a la órbita recta [los de ii) a una no calculable, pues la ecuación de las órbitas no es resoluble]. Por tanto:

$$\binom{-1}{1}\to v=-x=\tfrac{dx}{dt}\to x=Ce^{-t}\underset{x(0)=-1}{\longrightarrow}\boxed{x=-e^{-t}}.$$

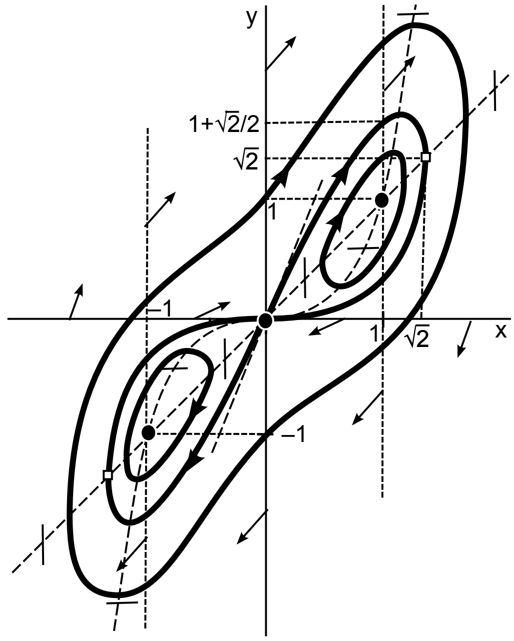
Como esta solución tiende hacia 0 y casi todas las de datos iniciales próximos no se parecen nada a ella (las de la derecha se van a ∞ y las de la izquierda a $-\infty$), esta solución es **inestable**.

3. Sea $\begin{cases} x' = y-x \\ y'=y-x^3 \end{cases}$. **a]** Hallar sus órbitas y dibujar el mapa de fases. **b]** Dar un valor de a para el que la solución con $x(5)=y(5)=a$ no sea periódica.

a] $f_x+g_y\equiv 0$, **exacto**. $H_y=y-x \to H=\frac{1}{2}y^2-xy+p(x)$
$H_x=x^3-y \to H=\frac{1}{4}x^4-xy+q(y)$

Órbitas: $\boxed{y^2-2xy-\frac{1}{2}x^4=C}$, $y=x\pm\sqrt{x^2-\frac{x^4}{2}+C}$.

(Cada una de las órbitas tiene un dominio finito (el radicando se hace negativo para $|x|$ grande) y simétrico respecto del origen; cambiando x por $-x$ e y por $-y$ queda la misma órbita lo que implica que son simetricas respecto del origen).



Puntos críticos: $\binom{0}{0}$ y $\binom{\pm1}{\pm1}$. $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3x^2 & 1\end{pmatrix}$.

$\binom{0}{0}$: $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\lambda=-1\to\binom{1}{0}$, $\lambda=1\to\binom{1}{2}$, silla.

$\binom{\pm1}{\pm1}$: $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ $\to \lambda=\pm i\sqrt{2}$, centros de la aproximación lineal y del no lineal (por ser exacto).

$y=x$ (pendiente horizontal). $y=x^3$ (vertical).

Por $\binom{0}{0}$ pasa la órbita (separatrices) $y=x\pm x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$,
que corta la recta $y=x$ si $x=0,\pm\sqrt{2}$
y pasa por $(1,1\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-1,-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Mas datos sobre las separatrices: $\mathbf{v}(x,0)=-x\binom{1}{x^2}$, $\mathbf{v}(x,2x)=x\binom{x}{1+2x^2}$.

Otros valores del campo: $\mathbf{v}(0,y)=y\binom{1}{1}$, $\mathbf{v}(\pm1,y)=(y\pm1)\binom{1}{1}$.

b] Las únicas soluciones no periódicas correspondientes a órbitas que pasan por (a,a) son las asociadas a las separatrices (las otras órbitas son cerradas o puntos críticos (soluciones constantes de cualquier periodo)).

Debe ser $\boxed{a=\sqrt{2}}$ ó $\boxed{a=-\sqrt{2}}$.