Soluciones problemas 1. Ecuaciones I (C). 09/10

1.1 a) $\boxed{y'=y-(2+2\cos t)y^2}$ Bernouilli: $z=\frac{1}{y}\to z'=-z+(2+2\cos t)\to \boxed{y=\frac{1}{Ce^{-t}+2+\operatorname{sen}t+\cos t}}$.

b) $\boxed{y'=\frac{2ty-y^2}{t^2}}$ homogénea: $z=\frac{y}{x}\to tz'+z=2z-z^2$, $\int\frac{dz}{z(1-z)}=\int\frac{dt}{t}+C\to\boxed{y=\frac{Ct^2}{1+Ct}}=\frac{t^2}{C^*+t}$;

o Bernouilli: $z=\frac{1}{y}\to z'=-\frac{2z}{t}+\frac{1}{t^2}\to z=\frac{C+t}{t^2}\to\boxed{y=\frac{t^2}{C+t}}$.

c) $\boxed{y'=1-\frac{2}{t+y}}$; $t+y=z\to z'=2-\frac{2}{z}\to z+\log|z+1|=2t+C\to\boxed{y-t+\log|t+y-1|=C}$.

d) $\boxed{y'=\frac{t^2+y}{t}}$ lineal: $z=Ct+t\int\frac{t\,dt}{t}\to\boxed{y=Ct+t^2}$.

e) $\boxed{12x+5y-9+(5x+2y-3)y'=0}$; $M_y=N_x=5$ (exacta) $\to\boxed{y^2+6x^2+5xy-3y-9x=C}$;

o bien (1.2): $\left.\begin{matrix}12x+5y-9=0\\5x+2y-3=0\end{matrix}\right\}\to\left.\begin{matrix}u=x+3\\v=y-9\end{matrix}\right\}\to\frac{dv}{du}=-\frac{12u+5v}{5u+2v}\underset{z=v/u}{\to}\frac{(2z+5)z'}{z^2+5z+6}=\frac{-2}{u}\to v^2+5uv+6u^2=C\uparrow$

f) $\boxed{y'=x+\frac{x}{y}}$ separable: $\int\frac{y\,dy}{1+y}=\int x\,dt+C\to\boxed{y-\log|1+y|=\frac{x^2}{2}+C}$.

g) $\boxed{y'=y+\operatorname{sen}x}$ lineal: $y=Ce^x+e^x\int e^{-x}\operatorname{sen}x\,dx\to\boxed{y=Ce^x-\frac{1}{2}(\operatorname{sen}x+\cos x)}$.

[Sin integrar: $y_p=A\cos x+B\operatorname{sen}x\to -As+Bc=Ac+Bs+s\to B=A$, $-A=B+1\to A=B=-\frac{1}{2}$].

h) $\boxed{y'=\frac{y}{x+y^3}}$; $\frac{N_x-M_y}{M}=-\frac{2}{y}\to y^{-2}$ factor integrante; $-\frac{1}{y}+(\frac{x}{y^2}+y)$ exacta $\to\boxed{\frac{y^2}{2}-\frac{x}{y}=C}$;

mucho más corto: $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+y^2$ lineal: $x=Cy+y\int\frac{y^2}{y}dy=Cy+\frac{y^3}{3}\nearrow$

i) $\boxed{y'=2t-t^2+y^2}$ Riccati; $y_p=At+B\to A=2t-t^2+A^2t^2+2ABt+B^2\to A=B^2,\ 0=2AB+2,\ 0=A^2-1$

$\to y_p=t-1$. $u=y-y_p\to u'=2(t-1)u+u^2\underset{u=1/z}{\to}z'=-2(t-1)z-1\to\boxed{y=t-1+\frac{e^{t^2-2t}}{C-\int e^{t^2-2t}dt}}$.

j) $\boxed{y-2ty-y^2+(t+y)y'=0}$; e^{-2t} f. integrante, $(y-2ty-y^2)e^{-2t}+(t+y)e^{-2t}y'=0\to\boxed{y^2+2ty=Ce^{2t}}$.

k) $\boxed{y'=\frac{1-2ty^3}{3t^2y^2}}$ Bernouilli: $3y^2y'=-\frac{2}{t}y^3+\frac{1}{t^2}\overset{z=y^3}{\to}z'=-\frac{2z}{t}+\frac{1}{t^2}\to z=\frac{C}{t^2}+\frac{1}{t}\to\boxed{y=[\frac{C+t}{t^2}]^{1/3}}$;

o exacta: $2ty^3-1+3t^2y^2y'=0$, $M_y=N_t=6ty^2$, $\begin{matrix}U=t^2y^3-t+p(y)\\U=t^2y^3+q(t)\end{matrix}\to t^2y^3-t=C\uparrow$.

l) $\boxed{(y')^2=9y^4}$, $y'=\pm3y^2$ (dos ecuaciones), $\pm\frac{1}{y}=3t+C$, $\boxed{y=\frac{1}{C\pm3t}}$.

1.2 $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+m}{cx+dy+n})}$ se convierte en separable con estos cambios: si $m=n=0$, $z=\frac{y}{x}$ [es $y'=f(\frac{y}{x})$];

si $m^2+n^2\neq0$ y $ad-bc=0$, $z=ax+by$ [es $y'=f(ax+by)$];

si $m^2+n^2\neq0$, $ad-bc\neq0$, $\left.\begin{matrix}ax_0+by_0+m=0\\cx_0+dy_0+n=0\end{matrix}\right\}$, $u=x-x_0$, $v=y-y_0$, $z=\frac{v}{u}$.

$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+2}{-2x+y+6}}$ $\left.\begin{matrix}x+2y+2=0\\y-2x+6=0\end{matrix}\right\}\to(2,-2)$ corte de las rectas; $\left.\begin{matrix}u=x-2\\v=y+2\end{matrix}\right\}\to\frac{dv}{du}=-\frac{u+2v}{v-2u}\underset{z=v/u}{\to}\frac{(z-2)z'}{1+4z-z^2}=\frac{1}{v}$

$\to u^2+4uv-v^2=C\to\boxed{(x-2)^2+4(x-2)(y+2)-(y+2)^2=C}$.

1.3 $\boxed{y'=-3y+3ty^{2/3}}$ (Bernouilli) $\overset{z=y^{1/3}}{\longrightarrow}z'=-z+t\to z=Ce^{-t}+t-1\to\boxed{y=(Ce^{-t}+t-1)^3}$.

f continua en $\mathbf{R}^2$, $f_y=-3+2ty^{-1/3}$ en $\mathbf{R}^2-\{y=0\}\Rightarrow$ solución única con $y(t_o)=y_o$ si $y_o\neq0$ y hay solución, quizás no única, si $y_o=0$. Por tanto, para ii) hay una solución: $1=(C-1)^3\to\boxed{y=(2e^{-t}+t-1)^3}$.

Para i) la solución general nos da una solución: $0=(Ce^{-1})^3\to\boxed{y=(t-1)^3}$. Pero $\boxed{y\equiv0}$ es otra solución clara perdida en los cálculos. No hay unicidad.

1.4 $\boxed{y'=\frac{y}{t}+\operatorname{sen}t}$ i) Si $y(a)=b$, $b\neq0$ solución única. ii) $y(0)=0$ para todas las soluciones $y=Ct+t\int\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt$.

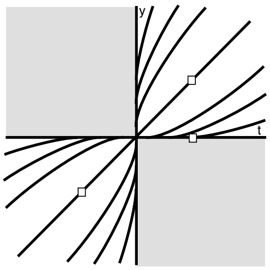
1.5 $(y^2+2xy)h(y)-(x^2+2y^2)h(y)\frac{dy}{dx}=0$ exacta si $h'(y)=\frac{-2}{y}$, $h(y)=\frac{1}{y^2}\to\boxed{x^2+xy-2y^2=Cy}$ [*].

(También es homogénea: $z=\frac{y}{x}\to\int\frac{(2z^2+1)\,dz}{z(2z^2-z-1)}=\ln\frac{(2z+1)(z-1)}{z}=C-\ln x$, $\frac{(2y+x)(y-x)}{y}=C$).

Soluciones rectas: $f(x,mx)=\frac{m^2+2}{1+2m^2}=m\to y=0$ (no recogida en [*]), $y=x$, $y=-\frac{x}{2}$.

i) $y=0$, ii) $y=x$, soluciones únicas, pues f y f_y son continuas en entorno de $(1,0)$ y $(1,1)$.

1.6 $\boxed{y'=\sqrt{y/x}}$ Isoclinas $y=mx \to f(x,mx)=\sqrt{m} \to y=0,\ y=x$ soluciones ($x=0$ es curva integral, solución de la 'equivalente').



Solución única para i) e iii) (la $y=x$ en ambos casos).

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x}}+C \to \boxed{\sqrt{y}=\sqrt{x}+C}\ ,\ \text{si } x,y>0\,.$$

$$(\ \sqrt{-y}=\sqrt{-x}+C\ ,\ \text{si } x,y<0\ ).$$

Satisfacen $y(1)=0$ las soluciones $y=0$ e $y=(\sqrt{x}-1)^2,\ x\geq 1$.

1.7 $(y^2-t)+2yy'=0$ no exacta. Para que $(y^2-t)g(t)+2yg(t)y'=0$ lo sea: $2yg=2yg' \to g(t)=e^t \to$

$\searrow 2y\not\equiv 0 \swarrow$

$$e^t(y^2-t)+2e^tyy'=0 \ \to\ \begin{matrix} U=e^ty^2-te^t+e^t+p(y)\\ U=e^ty^2+q(t)\end{matrix} \ \to\ e^t(y^2-t+1)=C\ ,\ \boxed{y^2=Ce^{-t}+t-1}\,.$$

$\searrow 2e^ty \swarrow$

También es de Bernouilli con $p=-1$: $2yy'=t-y^2 \xrightarrow{y^2=z} z'=-z+t \to z=Ce^{-t}+e^{-t}\int te^tdt\uparrow$

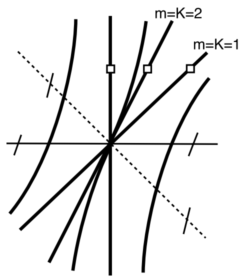
El TEyU asegura **solución única** con $y(t_o)=y_o$ si $y_o\neq 0$. Para el dato i) por ejemplo:

$$1=C-1\ ,\ y^2=2e^{-t}+t-1\ ,\ \boxed{y=-\sqrt{2e^{-t}+t-1}}\ \text{ (la raíz positiva no lo cumple).}$$

Para ii) el TEyU no decide. Como $\frac{dt}{dy}=\frac{2y}{t-y^2}$ tiene solución única $t(y)$ con $t(0)=1$ (y es $t'(0)=0$), sólo pasa una curva integral de pendiente vertical por $(1,0)$ y **no hay solución** que cumpla ii).

[Lo que sale imponiendo el dato, $y=\pm\sqrt{t-1}$, son dos funciones con derivada infinita en $t=1$].

1.8 En una homogénea (de isoclinas $y=mt$) las rectas solución salen de:



$$f(m)=(m-1)^2+1=m \ \to\ m=1,2 \ \to\ \boxed{y=t}\ \text{ e } \boxed{y=2t}\,.$$

i) $tz'+z=z^2-2z+2$, $\int\frac{dz}{(z-1)(z-2)}=\int\frac{dz}{z-2}-\int\frac{dz}{z-1}=\ln\frac{z-2}{z-1}=\ln t+C$, $\frac{y-2t}{y-t}=Ct$ $\downarrow$

ii) $u=y-t \to u'=\frac{u^2}{t^2}+1-1=\frac{u^2}{t^2} \to \frac{1}{u}=\frac{1}{t}-C \to y=t+\frac{t}{1-Ct} \to \boxed{y=\frac{2t-Ct^2}{1-Ct}}$.

f y $f_y=2(y-t)/t^2$ continuas en un entorno de cada uno de los dos puntos $\Rightarrow$ **solución única** para ii) y iii). Son, respectivamente, las rectas $y=2t$ e $y=t$.

[Ojo con las soluciones mentirosas; imponiendo iii): $2=\frac{4-4C}{1-2C} \to 2=4$; $y=t$ se ha perdido].

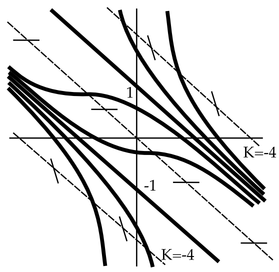
El TEyU no dice nada para i), pero aplicándolo a $\frac{dt}{dy}=\frac{t^2}{(y-t)^2+t^2}$, deducimos que por $(0,2)$ pasa la única curva integral vertical $t\equiv 0 \Rightarrow$ **no existe solución** $y(t)$ **con** $y(0)=2$.

[Según la solución general, todas cumplen $y(0)=0$, pero se podía haber perdido alguna].

1.9 $\boxed{y'=\frac{3}{x}(y-y^{2/3})} \xrightarrow{z=y^{1/3}} z'=\frac{z-1}{x} \to z=1+Cx \to \boxed{y=(1+Cx)^3}$ solución (e $y\equiv 0$ perdida).

Para i) el TEyU asegura solución única (es la $y\equiv 1$).
Para ii) los TEyU no dicen nada. Se ve que se cumple $y(0)=1$ para todo C. Infinitas soluciones.
Para iii) hay solución seguro, pero no sabemos si es única. De la solución general sale $y=(1-x)^3$, pero lo cumple también la $y\equiv 0$ perdida. O la unión de esta y un trozo de parábola cúbica. Infinitas soluciones.

1.10 $\boxed{y'=-[y+t]^2}=K \to y=-t\pm\sqrt{-K}$; o mejor, $y=-t+b \to K=-b^2$.



$y=-t\pm 1$ rectas solución. $y''=-2[y+t][1-(y+t)^2]=0$

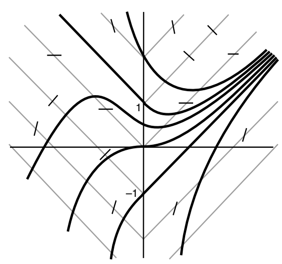
↑ inflexión ↖ rectas solución

$$y_p=1-t \underset{z=y-y_p}{\longrightarrow} z'=-2z-z^2 \underset{u=1/z}{\longrightarrow} z'=2z+1,\ z=Ce^{2t}-\tfrac{1}{2}\ ,\ \boxed{y=\frac{Ce^{2t}+1}{Ce^{2t}-1}-t}\,.$$

$$y+t=z \to z'=1-z^2,\ \int\frac{2\,dz}{z^2-1}=\log\frac{z-1}{z+1}=K-2t\ ,\ \frac{z-1}{z+1}=Ke^{-2t},\ \boxed{y=\frac{1+Ke^{-2t}}{1-Ke^{-2t}}-t}\,.$$

f y f_y continuas en $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ solución única para cualquier dato inicial. Pero una solución general 'mentirosa' puede no recogerla: i) $\frac{C+1}{C-1}=1$ imposible (es $y=1-t$ que se ha perdido). ii) $\frac{C+1}{C-1}=-1 \to C=0 \to y=-1-t$.

1.11 $\boxed{y'=|t|-y}$ Única solución para cualquier dato inicial. Isoclinas: $y=|t|-K$.



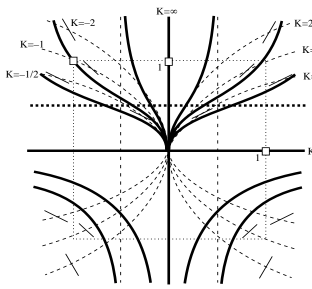
Dos semirrectas solución: $y=t-1$ para $t\geq 0$ e $y=1-t$ para $t\leq 0$.

En el dibujo se ve que $y=1-t$, si $t\leq 0$.

Para $t\geq 0$: $y=t-1+Ce^{-t} \xrightarrow{y(0)=1} C=2$.

La solución pedida es, pues, $y=\begin{cases}1-t,\ t\leq 0\\ t-1+2e^{-t},\ t\geq 0\end{cases}$

1.12 $\boxed{y'=\frac{y^2}{t}}$ Separable, $-\frac{y'}{y^2}=-\frac{1}{t}\to y=\frac{1}{C-\log|t|}$ (todas con asíntotas).

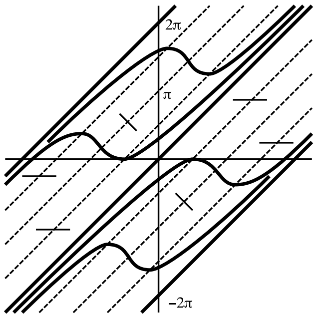


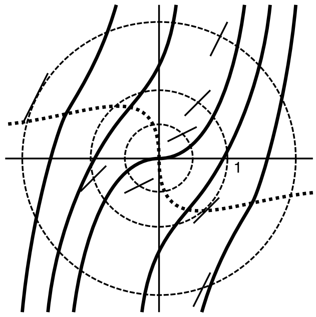
El TEyU asegura que sólo una cumple i) y ii) $\left(y=\frac{1}{1-\log|t|}\text{ e } y=0\right)$.

Para $(0,1)$ el TEyU no dice en principio nada para nuestra ecuación, pero como $\frac{dt}{dy}=\frac{t}{y^2}$ tiene solución única $t(y)$ en ese punto (la $t\equiv 0$), para $y(0)=1$ no existe solución $y(t)$, pues ya pasa la única curva integral vertical $t\equiv 0$.

1.13 a) $\boxed{y'=\cos(x-y)}$, $y=x-2\arctan\frac{1}{C-x}$.

Solución única por cada punto.
Isoclinas: $f(x,x+b)=\cos b$.



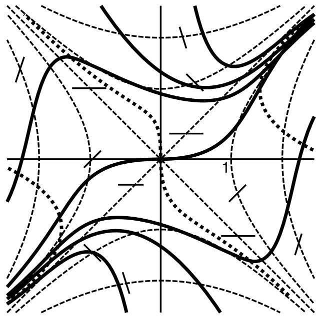


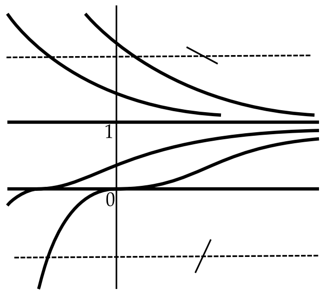
b) $\boxed{y'=x^2+y^2}$, no resoluble.

Solución única en cada punto.
Isoclinas: $x^2+y^2=K$ (circunferencias).
Inflexión: $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4y^4}}{2y}\begin{array}{l}\sim -y^3+\cdots\\ \sim -1/y+\cdots\end{array}$ $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$

c) $\boxed{y'=x^2-y^2}$, no resoluble.

Solución única en cada punto.
Isoclinas: $x^2-y^2=K$ (hipérbolas).
Inflexión: $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4y^4}}{2y}\begin{array}{l}\sim \frac{1}{y}+y^3+\cdots\\ \sim -y^3+\cdots\end{array}$



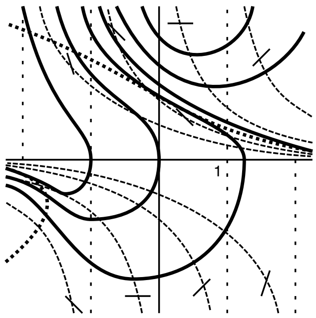


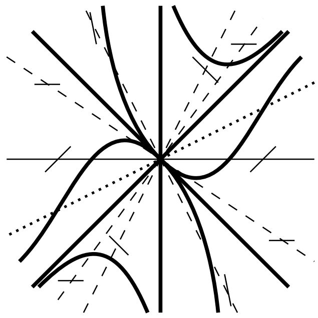
d) $\boxed{y'=y^{2/3}-y}$, $y=[1-Ce^{-x/3}]^3$.

Solución única por $(a,b), b\neq 0$. Por $(a,0)$ pasan 2 al menos: $y\equiv 0$ e $y=[1-e^{(a-x)/3}]^3$.

e) $\boxed{y'=x-\frac{1}{y}}$, no resoluble.

Única curva integral por cada punto.
Sobre $y=0$ no existe solución.
Isoclinas: $y=\frac{1}{x-K}$. Inflexión: $x=\frac{1}{y}-y^2$.



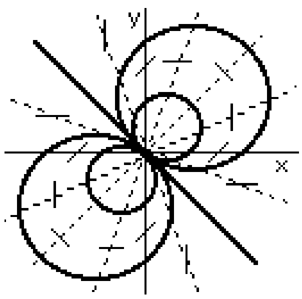


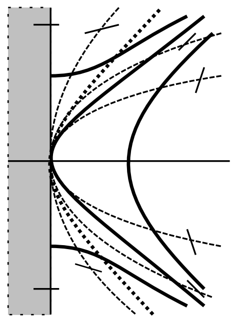
f) $\boxed{y'=1+\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}}$ Homogénea o Riccati: $y=x\frac{Cx^2-1}{Cx^2+1}$.

Solución única si $x\neq 0$. Única curva en $\mathbf{R}^2-(0,0)$.
Por $(0,0)$ infinitas soluciones.
Rectas solución: $y=\pm x$. Inflexión: $y=\frac{x}{2}$.

g) $\boxed{y'=\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}}$, $y+x=C(x^2+y^2)$. $f(x,mx)=\frac{1+2m-m^2}{1-2m-m^2}$.

Única solución si $m\neq -1\pm\sqrt{2}$. Única curva en $\mathbf{R}^2-(0,0)$. Por $(0,0)$ infinitas soluciones.



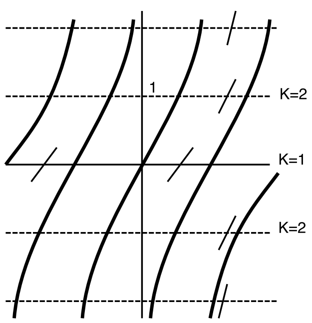


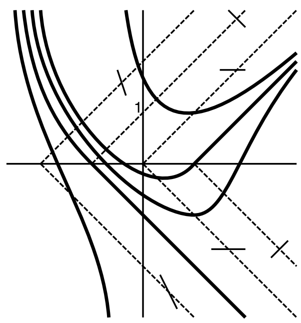
h) $\boxed{y'=\frac{\sqrt{x}}{y}}$, $y^2=\frac{4}{3}x^{3/2}+C$.

Solución única por $(a,b), a\geq 0, b\neq 0$.
Por $(a,0), a\geq 0$ no solución, única curva integral.
Isoclinas: $y=\sqrt{x}/K$. Inflexión $y^2=2x^{3/2}$.

i) $\boxed{y'=1+y^{2/3}}$, $y^{1/3}-\arctan y^{1/3}=\frac{x}{3}+C$.

Solución única por cada punto.
(f continua en $\mathbf{R}^2\Rightarrow\exists$ solución;
$1/f$ y $[1/f]_t$ continuas $\Rightarrow$ es única).
Isoclinas: $y=b\to y'=1+b^{2/3}$.

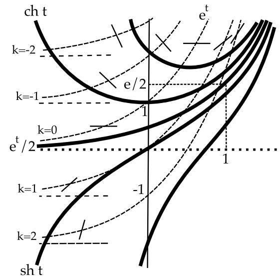




j) $\boxed{y'=x-|y|}$, $y=\begin{cases} Ce^{x}-x-1,\ y\leq 0\\ Ce^{-x}+x-1,\ y\geq 0\end{cases}$

Isoclinas: $x=|y|+K$.
$|x-|y|-(x-|y^*|)|\leq|y-y^*|$ en $\mathbf{R}^2\Rightarrow$ solución única para cualquier dato inicial.

1.14 $\boxed{y'=e^t-y}$ $\rightarrow\ y=Ce^{-t}+\frac{1}{2}e^t \underset{y(0)=0}{\rightarrow} \boxed{y=\frac{1}{2}[e^t-e^{-t}]=\operatorname{sh} t}$.



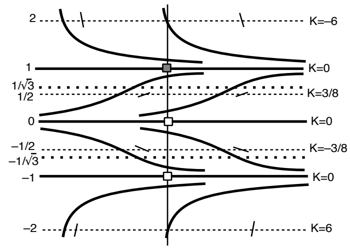
En una lineal (con coeficientes continuos $\forall t$) la estabilidad de todas las soluciones es la misma y la da $e^{\int a}=e^{-t}\underset{t\to\infty}{\rightarrow}0$. La ecuación es AE.

Isoclinas: $y=e^t-K$. Inflexión: $y''=e^t-y'=y\ \rightarrow\ y=0$.

En la solución general vemos soluciones importantes:

$y=\frac{1}{2}e^t$ (única que $\underset{t\to-\infty}{\rightarrow}0$). $y=\operatorname{sh} t$ (única impar). $y=\operatorname{ch} t$ (única par).

1.15 $\boxed{y'=y-y^3}$. Autónoma (y, por tanto, separable), o también Bernouilli:



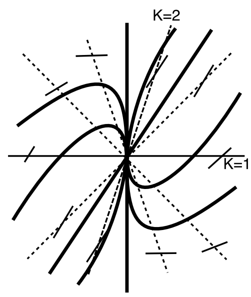
$z=y^{-2}\rightarrow z'=-2z+2\rightarrow z=Ce^{-2t}+1\rightarrow \boxed{y=\pm\frac{1}{\sqrt{1+Ce^{-2t}}}}$.

O bien: $t+C=\int\frac{dy}{y(1+y)(1-y)}=\frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1-y^2}\rightarrow y^2=\frac{Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}$ (casi igual).

Solución única para cada dato (en concreto, $y=0$ e $y=-1$).

El dibujo (por ser autónoma) prueba que $y=1$ es asintóticamente estable.

1.16 a] $y'=\frac{y}{3t}+1\ \rightarrow\ y=Ct^{1/3}+t^{1/3}\int t^{-1/3}dt=\boxed{Ct^{1/3}+\frac{3}{2}t}$.



[U homogénea: $tz'+z=\frac{z}{3}+1$, $\int\frac{3dz}{3-2z}=-\frac{3}{2}\ln(3-2z)=\ln t+C$, $3-2z=Ct^{-2/3}\dots$].

Isoclinas $y=mt\ \rightarrow\ K=\frac{m}{3}+1$. $\begin{matrix} m=-3,-1,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 3 \\ K=\ 0\ ,2/3,\ 1,4/3,\ 2\end{matrix}$. $\frac{m}{3}+1=m\ \rightarrow\ m=\frac{3}{2}$ solución.

Si $t=0$, $K=\infty$ (curva integral vertical). Decrecen entre $y=-3t$ y $t=0$.

$y''=\frac{y'}{3t}-\frac{y}{3t^2}=\frac{3t-2y}{9t^2}\ \rightarrow$ no hay puntos de inflexión ($y=\frac{3t}{2}$ solución).

b] Lineal con coeficientes continuos en $[1,\infty)$: $e^{\int_1^t a}=t^b$ da la estabilidad.

Si $b<0$, como $t^b\rightarrow 0$ si $t\rightarrow\infty$, la ecuación es **AE**. Si $b=0$ es **EnoA** ($t^0=1\not\rightarrow 0$).

Y si $b>0$ (por ejemplo el caso de arriba) es **I** por no estar t^b acotada.

1.17 a) $\boxed{y'=1-ty}$ lineal. $e^{-\int t dt}=e^{-t^2/2}\underset{t\to\infty}{\rightarrow}0\Rightarrow$ todas son AE (y todas ellas $y=\frac{C+\int e^{t^2/2}dt}{e^{t^2/2}}\underset{t\to\infty}{\rightarrow}0$).

b) $\boxed{y'=\frac{y}{t^2}}$ lineal. $e^{\int_1^t ds/s^2}=e^{1-1/t}\underset{t\to\infty}{\rightarrow}e$ (y acotado por e) $\Rightarrow$ todas son E no A.

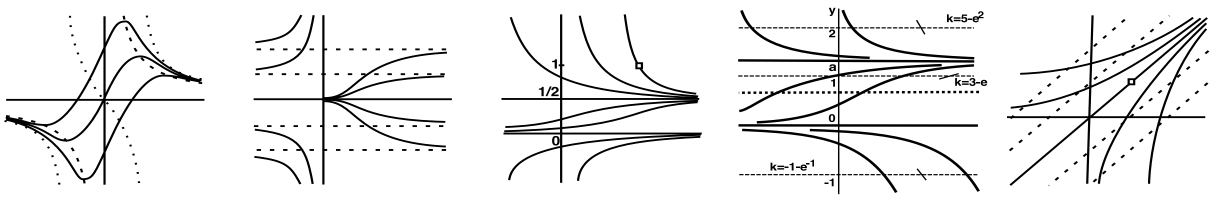
c) $\boxed{y'=y^2-2y^3}$ autónoma (el dibujo prueba). Todas las próximas tienden a $y=1/2\Rightarrow$ AE.

(La solución $t+\frac{1}{y}-2\log\left|\frac{y}{1-2y}\right|=C$ sirve para poco).

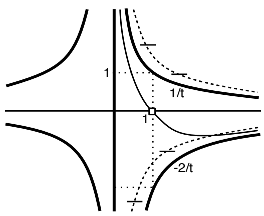
d) $\boxed{y'=1+2y-e^y}$ autónoma. f sólo se anula 2 veces, si $y=0$ y para un $a\in(0,2)$. La de $y(1)=1$ es AE pues ella y las que parten cerca tienden hacia la solución constante $y\equiv a$.

e) $\boxed{y'=e^{t-y}}$ separable: $\int e^y dy=\int e^t dt+C\rightarrow y=\log(C+e^t)$ [mucho más largo $z=t-y\ \dots$] $\overset{y(1)=1}{\rightarrow}\ y=t$.

Las próximas definidas en $[1,\infty)$ y $|\log(C+e^t)-t|=\left|\log\frac{C+e^t}{e^t}\right|\underset{t\to\infty}{\rightarrow}0\ \Rightarrow$ AE.



1.18 $\boxed{y'=y^2-\frac{2}{t^2}}$. Única curva integral por cada punto. Por el origen, $t=0$.



Probando $y=\frac{A}{t}$, se obtiene que $y=\frac{1}{t}$ e $y=-\frac{2}{t}$ son soluciones.

La solución con $y(1)=0$, encerrada entre ellas y $t=0$, está definida en $(0,\infty)$.
Como las próximas también están definidas en $[1,\infty)$ y todas $\underset{t\to\infty}{\rightarrow}0$, es AE.

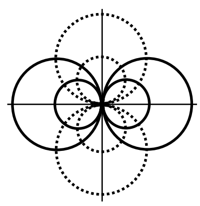
[Podemos hallar solución de la Riccati $y=\frac{C+2t^3}{t(C-t^3)}$ y comprobarlo].

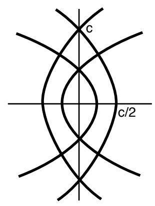
1.19 $\boxed{x^2+y^2=2Cx}$, $x+yy'=C\Rightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}\ \underset{\text{ortogonales}}{\Rightarrow}\ y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}\ \Rightarrow\ \boxed{x^2+y^2=Cy}$.

$\boxed{y^2+2Cx=C^2}$, $yy'+C=0\Rightarrow$ [e] $y^2y'^2+2xyy'-y^2=0$, $yy'=-x\pm\sqrt{y^2+x^2}$

$\Rightarrow$ ortogonales: [o] $y'=\frac{y}{x\pm\sqrt{y^2+x^2}}\overset{z=y/x}{\rightarrow}xz'=\frac{\pm z\sqrt{1+z^2}}{1\mp\sqrt{1+z^2}}$,

$\int\left(\pm\frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}-\frac{1}{z}\right)dz=-\log\left(1\pm\sqrt{1+z^2}\right)=\log x+C\rightarrow\boxed{y^2+2Cx=C^2}$





(parábolas iniciales; de hecho, desarrollando [o] se llega a [e]).

Soluciones problemas 2. Ecuaciones I (C). 09/10

$\boxed{\mathbf{2.1}}$ a) $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}}$, $\lambda=-1,-3$; $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}e^{-t}&0\\0&e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}e^{-t}+e^{-3t}\\e^{-t}-e^{-3t}\end{pmatrix}}$

Derivando: $\begin{cases}x'=-2x+y\\y'=x-2y\end{cases}$, $x=y'+2y$, $y''+4y'+3y=0$, $y=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}\xrightarrow{y(0)=0,y'(0)=2}y=e^{-t}-e^{-3t}$

$\searrow x=-e^{-t}+3e^{-3t}+2e^{-t}-2e^{-3t}$, como arriba.

Laplace: $\begin{cases}sX-2=-2X+Y\\sY=X-2Y\end{cases}$, $X=(s+2)Y$, $[(s+2)^2-1]Y=1$, $Y=\frac{2}{(s+1)(s+3)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\nearrow\dots$

b) $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}\mathbf{x}}$, $\lambda=1$ doble; $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}\mathbf{w}=\mathbf{v}\to\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$,

$e^{\mathbf{J}t}=e^t\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=e^t\mathbf{P}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}=\boxed{e^t\begin{pmatrix}1+2t\\t\end{pmatrix}}$

Derivando: $\begin{cases}x'=3x-4y\\y'=x-y\end{cases}$, $x=y'+y$, $y''-2y'+y=0$, $y=(c_1+c_2t)e^t\xrightarrow[y(0)=0,\,y'(0)=1]{}y=te^t$

$\searrow x=(t+1)e^t+te^t$, como antes.

Laplace: $\begin{cases}sX-1=3X-4Y\\sY=X-Y\end{cases}$, $X=(s+1)Y$, $[(s-3)(s+1)+4]Y=1$, $Y=\frac{1}{(s-1)^2}\nearrow\dots$

c) $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&-1\end{pmatrix}\mathbf{x}}$; $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1&1\\-\sqrt{2}\,i&\sqrt{2}\,i\end{pmatrix}e^{-t}\begin{pmatrix}e^{i\sqrt{2}t}&0\\0&e^{-i\sqrt{2}t}\end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&i\\\sqrt{2}&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\boxed{e^{-t}\begin{pmatrix}\cos\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}\,t\\2\cos\sqrt{2}\,t+\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}\,t\end{pmatrix}}$.

Derivando: $\begin{cases}x'=-x-y\\y'=2x-y\end{cases}$, $y=-x'-x$, $x''+2x'+3x=0$, $x=(c_1\cos\sqrt{2}\,t+c_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}\,t)e^{-t}\xrightarrow[x(0)=1,x'(0)=-3]{}$

$x=e^{-t}(\cos\sqrt{2}\,t-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}\,t)\longrightarrow\searrow y=e^{-t}(2\cos\sqrt{2}\,t+\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}\,t)$

Laplace: $\begin{cases}sX-1=-X-Y\\sY-2=2X-Y\end{cases}$, $Y=1-(s+1)X$, $[(s+1)^2+2]x=s-1$, $X=\frac{(s+1)-2}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}\nwarrow\dots$

$\boxed{\mathbf{2.2}}$ a) $\boxed{\begin{matrix}x'=x-2y-t\\y'=2x-3y-t\end{matrix}}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $y=\frac{x-x'-t}{2}$, $\begin{cases}x''+2x'+x=-t-1\\x(0)=1,x'(0)=2-3=-1\end{cases}$, $\boxed{x=1-t}$, $\boxed{y=1-t}$.

$\begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}\lambda=-1\\\text{doble}\end{matrix}$; $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1/2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-2\\0&1\end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=e^{-t}\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}e^t-te^t-1\\e^t-te^t-1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1-t\\1-t\end{pmatrix}}$

$\begin{cases}sX-1=X-2Y-\frac{1}{s^2}\\sY-1=2X-3Y-\frac{1}{s^2}\end{cases}$, $X=\frac{(s+3)Y}{2}+\frac{1-s^2}{2s^2}$, $[(s-1)(s+3)+4]Y=\frac{(s+1)^2(s-1)}{s^2}$, $Y=\frac{s-1}{s^2}\uparrow\dots$

b) $\boxed{\begin{matrix}x'=y-2\\y'=2x-y\end{matrix}}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$; $y=x'+2$, $\begin{cases}x''+x'-2x=-2\\x(0)=0,x'(0)=2\end{cases}$, $\boxed{x=1-e^{-2t}}$, $\boxed{y=2+2\,e^{-2t}}$

$\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}$, $\lambda=\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}$; $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{-2t}&0\\0&e^t\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\frac{1}{3}\mathbf{P}\left[e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}-\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-s)}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}ds\right]=\boxed{\begin{pmatrix}1-e^{-2t}\\2+2e^{-2t}\end{pmatrix}}$

Para no integrar buscamos $\mathbf{x}_p=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ (no siempre hay): $\begin{matrix}0=b-2\\0=2a-b\end{matrix}\to\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\nearrow$d.i.

$\begin{cases}sX=Y-\frac{2}{s}\\sY-4=2X-Y\end{cases}\to\begin{matrix}Y=sX+\frac{2}{s}\downarrow\\(s+1)(sX+\frac{2}{s})-4=2X\to X=\frac{2(s-1)}{s(s+2)(s-1)}=\frac{2}{s(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\uparrow\dots\end{matrix}$

c) $\boxed{\begin{matrix}x'=3x+2y\\y'=-6x-4y+t\cos t\end{matrix}}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $y=\frac{x'-3x}{2}$, $\begin{cases}x''+x'=t\cos t\\x(0)=x'(0)=0\end{cases}$, $\begin{matrix}\boxed{(2-t)\cos t+(1+t)\,\mathrm{sen}\,t-2}\downarrow\\\boxed{(2t-3)\cos t-(t+2)\,\mathrm{sen}\,t+3}\end{matrix}$.

$\begin{pmatrix}3&2\\-6&-4\end{pmatrix}$, $\lambda=0,,-1$; $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}=\mathbf{P}^{-1}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix}s\cos s\\-2e^{-t}se^s\cos s\end{pmatrix}ds\uparrow$

$\begin{cases}sX=3X+2Y\\sY=-6X-4Y+\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\end{cases}$, $X=-\frac{2}{s}+\frac{2s}{s^2+1}+\frac{2s+2}{(s^2+1)^2}\nearrow$ $\left[L(t\,\mathrm{sen}\,t)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right.$, $\left.L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)=\mathrm{sen}\,t*\mathrm{sen}\,t\right]$

d) $\boxed{\begin{matrix}x'=2x-y\\y'=x+|2-t|\end{matrix}}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; $\begin{cases}sX=2X-Y\\sY+1=X+\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}e^{-2s}\end{cases}$ [pues $|2-t|=2-t+2u_2(t)(t-2)$],

$X=\frac{1}{s^2}+e^{-2s}\left[-\frac{4}{s}-\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}\right]$, $x=t+u_2(t)[-2t+(8-t)e^{t-2}]=\boxed{\begin{cases}t,\ t\le 2\\-t+(8-2t)e^{t-2},\ t\ge 2\end{cases}}\to$

$y=\boxed{\begin{cases}2t-1,\ t\le 2\\1-2t+(10-2t)e^{t-2},\ t\ge 2\end{cases}}$. O bien, $x''-2x'+x=-|2-t|$; $t\le 2$: $\begin{cases}x''-2x'+x=t-2\\x(0)=0,x'(0)=1\end{cases}$, $x=t$

$\to t\ge 2$: $\begin{cases}x''-2x'+x=2-t\\x(2)=2,x'(2)=1\end{cases}$, $x=-t+(8-2t)e^{t-2}\ \dots$

2.3 a) $\boxed{x''-x=e^{2t}}$, $\lambda=\pm1$, $x_p=Ae^{2t}$, $4A-A=1\to$ $\boxed{x=c_1e^t+c_2e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}}$

b) $\boxed{x''+x=te^t\cos t}$, $\lambda=\pm i$, $x_p=(At+B)e^tc+(Ct+D)e^ts$, $x_p''=2(A+C+D+Ct)e^tc+2(-A+C-B-At)e^ts$

$\to$ $\boxed{x=c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t+\frac{1}{25}[(5t-2)\cos t+(10t-14)\,\mathrm{sen}\,t]e^t}$

c) $\boxed{x'''+2x''+5x'=5t}$, $\lambda=0,\ -1\pm2i$, $x_p=(At+B)t\to$ $\boxed{x=c_1+(c_2\cos2t+c_3\,\mathrm{sen}\,2t)e^{-t}+\frac{t^2}{2}-\frac{2t}{5}}$

d) $\boxed{x^{IV}+4x=te^t\cos t}$, $\lambda^4=-1\to\lambda=\pm1\pm i$, $x_p=(At^2+Bt)e^tc+(Ct^2+Dt)e^ts$,

$\to$ $\boxed{x=(c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t)e^t+(c_3\cos t+c_4\,\mathrm{sen}\,t)e^{-t}+\frac{t}{32}\left[(3-t)\cos t+t\,\mathrm{sen}\,t\right]e^t}$,

e) $\boxed{x''+x=\cos^3t}$, $\begin{vmatrix} c & s\\ -s & c\end{vmatrix}=1$, $x_p=s\int c^4-c\int sc^3\to$ $\boxed{x=c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t+\frac{3t}{8}\,\mathrm{sen}\,t-\frac{1}{8}\cos^3t}$

O bien, $\cos^3t=\frac{1}{4}(3\cos t+\cos3t)\to x_p=t(A\cos t+B\,\mathrm{sen}\,t)+C\cos3t\to x_p=\frac{3t}{8}\,\mathrm{sen}\,t-\frac{1}{32}\cos3t\uparrow$

f) $\boxed{t^2x''-3tx'+3x=9\ln t}$, $\lambda^2-4\lambda+3=0\ \to\ x=c_1t+c_2t^3+x_p$. Con variación de constantes:

$|\mathbf{W}[t]=2t^3$; $x_p=t^3\int\frac{9\ln t\,dt}{2t^4}-t\int\frac{9\ln t\,dt}{2t^2}\underset{\text{partes}}{=}3\ln t+4\ \to$ $\boxed{x=c_1t+c_2t^3+3\ln t+4}$.

O bien, $x_p=As+B=A\ln t+B$, $x_p'=\frac{A}{t}$, $x_p''=-\frac{A}{t^2}\ \to\ -A-3A+3A\ln t+3B=9\ln t\ \to\ x_p=3\ln t+4$.

g) $\boxed{(t+1)x''-x'=(t+1)^2}$, $\dot{x}=v$, $v'=\frac{v}{t+1}+t+1$, $v=c_1(t+1)+t^2+t$, $\boxed{x=c_1(t^2+2t)+c_2+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}}$

O bien, $t+1=s$, $sx''-x'=s^2$ (Euler), $x_p=As^3$, $x=k_1s^2+k_2+\frac{s^3}{3}=k_1(t+1)^2+k_2+\frac{(t+1)^3}{3}$

h) $\boxed{t^2x''-t(t+2)x'+(t+2)x=t^3}$, $x_1=t$, $x=t\int u\to u'=u+1\to u=Ce^t-1\to$ $\boxed{x=Kt+Cte^t-t^2}$

O bien, $x_2=t\int\frac{e^{\int\frac{t+2}{t}}}{t^2}=te^t$, $|W|=t^2e^t$, $x_p=te^t\int e^{-t}-t\int1=-t^2-t\nearrow$

2.4 i) $t^2x''+2tx'=t^2$. $\lambda(\lambda-1)+2\lambda=0\ \to\ x=c_1+c_2t^{-1}+x_p$ solución de la no homogénea.

$\begin{vmatrix} 1 & t^{-1}\\ 0 & -t^{-2}\end{vmatrix}=-t^{-2}$, $x_p=\frac{1}{t}\int\frac{1\cdot1}{-t^{-2}}-1\int\frac{1/t\cdot1}{-t^{-2}}=\frac{t^2}{6}$. O mejor, $x_p=At^2$ (Ae^{2s}) $\to$ $2A+4A=1$.

ii) $ty'+2y=t\ \to\ y=\frac{t}{3}+\frac{C}{t^2}\ \to\ x=\frac{t^2}{6}-\frac{C}{t}+K$, como antes (con otro nombre de las constantes).

iii) $x=\frac{y}{t}$, $x'=\frac{y'}{t}-\frac{y}{t^2}$, $x''=\frac{y''}{t}-\frac{2y'}{t^2}+\frac{2y}{t^3}\ \to\ y''=t\ \to\ y'=\frac{t^2}{2}+k_1\ \to\ y=\frac{t^3}{6}+k_1t+k_2=tx$.

Si $t_o\neq0$ solución única (TEyU). $\underset{\text{(debe ser }C=0\text{)}}{x(0)=a,\,x'(0)=b}\ \to$ Si $b=0$, para cada a, sólo vale $x=\frac{t^2}{6}+a$ (solución única).
Si $b\neq0$, ninguna solución lo cumple, sea quien sea el a.

2.5 a) $\boxed{x''+x=\frac{2}{\cos^3t}}$ $\lambda=\pm i$, $\begin{vmatrix} c & s\\ -s & c\end{vmatrix}=1$, $x_p=s\int\frac{2}{c^2}-c\int\frac{s}{c^3}=\frac{1}{c}-2c\to x=c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t+\frac{1}{\cos t}$

$\xrightarrow{x(0)=x'(0)=0}$ $\boxed{x=\frac{1}{\cos t}-\cos t=\frac{\mathrm{sen}^2t}{\cos t}}$

b) $\boxed{x''+2x'+2x=f(t)}$ $s^2X+2sX+2X=F(s)$, $X=\frac{F(s)}{(s+1)^2+1}\to x=f(t)*(e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t)=$ $\boxed{\int_0^te^{-(t-s)}\,\mathrm{sen}(t-s)f(s)ds}$.

O bien: $\lambda=-1\pm i$; solución homogénea: $x=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t$; fórmula variación de constantes:

$$x_p=e^{-t}\mathrm{sen}\,t\int_0^te^{-s}\cos s\,f(s)ds-e^{-t}\cos t\int_0^te^{-s}\mathrm{sen}\,s\,f(s)ds=\int_0^te^{-(t-s)}\,\mathrm{sen}(t-s)f(s)ds$$

(casualmente cumple $x(0)=x'(0)=0$).

c) $\boxed{x'''+5x''+8x'+4x=-8e^{-2t}}$, $\lambda=-1,\lambda=-2$ doble, $x_p=At^2e^{-2t}$, $A=4$,

$x=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+c_3te^{-2t}+4t^2e^{-2t}\xrightarrow{x(0)=1,\,x'(0)=-1,\,x''(0)=9}$ $\boxed{x=e^{-t}+4t^2e^{-2t}}$

O Laplace: $(s^3+s^2+8s+4)X=s^2+4s+12-\frac{8}{s+2}$, $X=\frac{s^3+6s^2+20s+16}{[s+1][s+2]^3}=\frac{1}{s+1}+\frac{8}{[s+2]^3}\uparrow$

d) $\boxed{x''+2tx'=2t}$, $v'=-2tv+2t\ \underset{v_p=1\text{ a ojo}}{\to}\ v=c_1e^{-t^2}+1$, $x=c_1\int_0^te^{-s^2}ds+c_2+t\xrightarrow{x(1)=x'(1)=1}$ $\boxed{x=t}$

e) $\boxed{t^2x''+4tx'+2x=e^t}$, $x=\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+x_p$, $|W|=-t^{-4}$, $x_p=-t^{-2}\int te^t+t^{-1}\int e^t=\frac{e^t}{t^2}\underset{\text{d.i.}}{\to}$ $\boxed{x=\frac{e^t}{t^2}-\frac{e}{t}}$

f) $\boxed{t^3x'''+t^2x''-2tx'+2x=t^3}$, $t=e^s\to x'''-2x''-x'+2x=e^{3s}$, $\lambda=1,2,-1$, $x_p=Ae^{3s}$, $A=\frac{1}{8}$,

$x=c_1t+c_2t^2+\frac{c_3}{t}+\frac{t^3}{8}\xrightarrow{x(1)=x'(1)=x''(1)=1}$ $\boxed{x=\frac{1}{8}(t^3+6t+\frac{1}{t})}$

2.6 a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$; $\lambda=1,2,-1$, $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-t}$.

b) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$; $\lambda=2$, $\lambda=-1$ doble (pero con 2 v. propios l.i.), $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$.

c) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$; $\lambda=-1\to\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$, $\lambda=2$ doble $\to\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ único vector propio.

Probando $\mathbf{x}=(t\mathbf{v}+\mathbf{w})e^{2t}$ en $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$: $(2t\mathbf{v}+\mathbf{v}+\mathbf{w})e^{2t}=(t\mathbf{A}\mathbf{v}+\mathbf{A}\mathbf{w})e^{2t}$, $\left\{\begin{array}{l}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}\\(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}\end{array}\right.$ $\to$

$\mathbf{v}=\mathbf{u}_2$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, por ejemplo $\to\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}+c_3\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t\right]e^{2t}$.

2.7 a) $\boxed{\begin{array}{l}x'=-2z\\y'=x\\z'=x-2z\end{array}}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\underset{\lambda=0,\,-1\pm i}{\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&0\\1&0&-2\end{pmatrix}}$, $\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1+i\\1\\i\end{pmatrix}e^{-t+it}+c_3\begin{pmatrix}-1-i\\1\\-i\end{pmatrix}e^{-t-it}$

$\xrightarrow{\text{d.i.}} c_1=0, c_2=-\frac{i}{2}, c_3=\frac{i}{2}$, $\mathbf{x}=\frac{1}{2}e^{-t}\begin{pmatrix}[e^{it}+e^{-it}]+i[e^{it}-e^{-it}]\\-i[e^{it}-e^{-it}]\\e^{it}+e^{-it}\end{pmatrix}=\boxed{e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t-\operatorname{sen}t\\\operatorname{sen}t\\\cos t\end{pmatrix}}$

$x=z'+2z$ a la 1ª: $\left\{\begin{array}{l}z''+2z'+2z=0\\z(0)=1,z'(0)=-1\end{array}\right.$, $\begin{array}{l}z=e^{-t}\cos t\ \downarrow\\x=e^{-t}(\cos t-\operatorname{sen}t)\end{array}$, $\left\{\begin{array}{l}y'=e^{-t}(\cos t-\operatorname{sen}t)\\y(0)=0\end{array}\right.$, $y=e^{-t}\operatorname{sen}t$.

$\left\{\begin{array}{l}sX-1=-2Z\\sY=X\\sZ-1=X-2Z\end{array}\right.$, $X=(s+2)z-1$, $Z=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$, $X=\frac{s+1-1}{(s+1)^2+1}$, $Y=\frac{1}{(s+1)^2+1}\uparrow$

Un autovalor simple con $\operatorname{Re}\lambda=0$ y dos con $\operatorname{Re}\lambda<0\Rightarrow$ **estabilidad no asintótica**.

b) $\boxed{\begin{array}{l}x'=x-4y+2z\\y'=x-3y+z\\z'=x-2y+1\end{array}}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}-\lambda&0&-2\\1&-\lambda&0\\1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2\lambda$; $\lambda=-1\to\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\lambda=0\to\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

EnoA

$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&3&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix}0\\-e^{s-t}\\1\end{pmatrix}ds=\boxed{\begin{pmatrix}2e^{-t}+2t\\e^{-t}+t\\1+t\end{pmatrix}}$

$z''=2x-y=1-z'$, $\left\{\begin{array}{l}z=c_1+c_2e^{-t}+1\\z(0)=z'(0)=1\end{array}\right.$, $z=1+t$, $x=2y$, $\left\{\begin{array}{l}y'+y=t+1\\y(0)=1\end{array}\right.$, $y=t+e^{-t}$, $x=2t+2e^{-t}$.

$\left\{\begin{array}{l}sX-2=X-4Y+2Z\\sY-1=X-3Y+Z\\sZ-1=X-2Y+\frac{1}{s}\end{array}\right.$, $X=(s+3)Y-Z-1$, $\left\{\begin{array}{l}(s+1)Y=Z+1\\(s+1)Z=(s+1)Y+\frac{1}{s}\end{array}\right.$, $\begin{array}{c}Y=\frac{s^2+s+1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1},\ Z=\frac{(s+1)^2}{s^2(s+1)}\\x=z'+2y-1\end{array}$

c) $\boxed{\begin{array}{l}x'=y\\y'=4x+z\\z'=-z+4e^{-2t}\end{array}}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$; $\underset{\lambda=-1,\,-2,\,2}{\begin{pmatrix}0&1&0\\4&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}$, $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&2\\3&0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&0&4\\6&-3&3\\6&3&1\end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}$,

$\mathbf{x}=\frac{1}{12}\mathbf{P}\begin{pmatrix}-16e^{-t}\\-3e^{-2t}\\-e^{2t}\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\mathbf{P}\int_0^t\begin{pmatrix}4e^{t-s}\\3e^{-2t}\\e^{2t-4s}\end{pmatrix}ds=\boxed{e^{-2t}\begin{pmatrix}1+t\\-1-2t\\-4\end{pmatrix}}$ (el camino más largo)

$\exists\,\lambda=2\Rightarrow$ sistema **inestable** (que esta $\mathbf{x}\to\mathbf{0}$ no importa).

3ª desacoplada: $\left\{\begin{array}{l}z=Ce^{-t}-4e^{-2t}\\z(0)=-4\end{array}\right.$, $z=-4e^{-2t}$, $\left\{\begin{array}{l}x''-4x=-4e^{-2t}\\x(0)=1,x'(0)=-1\end{array}\right.$, $x=(1+t)e^{-2t}$, $y=x'=(-1-2t)e^{-2t}$.

$\left\{\begin{array}{l}sX-1=Y\\sY+1=4X+Z\\sZ+4=-Z+\frac{4}{s+2}\end{array}\right.$, $Z=\frac{-4s-4}{(s+1)(s+2)}=\frac{-4}{s+2}$, $X=\frac{s+3}{(s+2)^2}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}$, $y=x'\uparrow$

d) $\boxed{\begin{array}{l}x'=y-2z\\y'=-z\\z'=4x-5z\end{array}}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}-\lambda&1&-2\\0&-\lambda&-1\\4&0&-5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)^2(\lambda+1)$. Rango$(\mathbf{A}+2\mathbf{I})=2$. Mejor sin matrices.

AE

$z''=4y-8z-5z'$, $\left\{\begin{array}{l}z'''+5z''+8z'+4z=0\\z(0)=1,z'(0)=-5,z''(0)=17\end{array}\right.$, $\boxed{z=e^{-t}-4te^{-2t}}$, $y=\frac{z''+5z'+8z}{4}=\boxed{e^{-t}-(1+2t)e^{-2t}}$,

$x=\frac{z'+5z}{4}=\boxed{e^{-t}-(1+3t)e^{-2t}}$.

$\left\{\begin{array}{l}sX=Y-2Z\\sY=-Z\\sZ-1=4X-5Z\end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l}sX-(1+2s)Y=0\\4X+s(s+5)Y=-1\end{array}\right.$, $(s^3+5s^2+8s+4)Y=-s$, $Y=\frac{-s}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}$,

$y=e^{-t}-(1+2t)e^{-2t}$, $z=-y'=e^{-t}-4te^{-2t}$, $x=\frac{z'+5z}{4}=e^{-t}-(1+3t)e^{-2t}$.

2.8 $\boxed{x'''+x''+2x'+8x=e^{at}}$ $P(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+8$. i) $P(1)=12$, $\lambda=1$ no autovalor $\to x_p=Ae^t \to \boxed{x_p=\frac{1}{12}e^t}$

ii) $P(-2)=0$, $\lambda=-2$ sí es autovalor $\to$ $x_p=At\,e^{-2t} \to 10A\,e^{-2t}=e^{-2t} \to \boxed{x_p=\frac{1}{10}t\,e^{-2t}}$

La estabilidad sólo depende de la ecuación homogénea, en concreto de las raíces de $P(\lambda)$.

$\lambda=-2$ autovalor $\to$ $P(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda^2-\lambda+4)$ $\to$ $\lambda=-2$ y $\lambda=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Hay autovalores con $\mathrm{Re}\lambda>0 \Rightarrow$ todas las soluciones son **inestables** (para cualquier a).

[Lo confirma R-H: $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\8&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\to$ $1>0$, $-6<0 \Rightarrow$ **I**. El signo de los coeficientes no decía nada.]

2.9 $\boxed{x'''+5x''+4x'+cx=t}$ i) Si $c\neq 0$, $\lambda=0$ no es autovalor, $x_p=At+B \to \boxed{x_p=\frac{t}{c}-\frac{4}{c^2}}$.

Si $c=0$, $x_p=At^2+Bt \to \boxed{x_p=\frac{t^2}{8}-\frac{5t}{16}}$.

ii) $\lambda^3+5\lambda^2+4\lambda-10=0 \to \lambda=1,-3\pm i$. $\boxed{x=c_1e^t+e^{-3t}[c_2\cos t+c_3\,\mathrm{sen}\,t]-\frac{t}{10}-\frac{1}{25}}$.

iii) Signo coeficientes: si $c<0$ inestable, si $c=0$ no es AE. Para saber más se necesita Routh-Hurwitz:

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&1&0\\c&4&5\\0&0&c\end{pmatrix} \to 5>0$, $20-c>0$, $c>0 \to$ $\boxed{\textbf{AE} \Leftrightarrow 0<c<20}$, $\boxed{\textbf{I} \Leftrightarrow c<0 \text{ ó } c>20}$.

Si $\boxed{c=0,20 \text{ es } \textbf{EnoA}}$, pues los autovalores respectivos son $\lambda=-4,-1,0$ y $\lambda=-5,\pm i$.

2.10 $\boxed{x'''+2x''+ax'=4e^t+2t}$ a] $\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)^2$. $x_p=Ae^t+Bt^2+Ct \to A=1, B=1, C=-4 \to$

Solución general de la no homogénea: $x=c_1+c_2e^{-t}+c_3te^{-t}+e^t+t^2-4t \xrightarrow{\text{datos}}$

$$\left\{\begin{array}{l}c_1+c_2+1=-2\\-c_2+c_3-3=0\\c_2-2c_3+3=0\end{array}\right\}\ c_3=0,\ c_2=-3 \nearrow c_1=0 \quad \to \quad \boxed{x=e^t-3e^{-t}+t^2-4t}.$$

O Laplace: $(s^3+2s^2+s)X+2(s^2+2s+1)=\frac{4}{s-1}+\frac{2}{s^2}=\frac{4s^2+2s+2}{s^2(s-1)}=\frac{2(2s-1)(s+1)}{s^2(s-1)}$, $X=-\frac{2}{s}+\frac{2(2s-1)}{s^3(s+1)(s-1)}$.

$$\frac{2(2s-1)}{s^3(s-1)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s-1}+\frac{E}{s+1}=\frac{As^2(s-1)(s+1)+Bs(s-1)(s+1)+C(s-1)(s+1)+Ds^3(s+1)+Es^3(s-1)}{s^3(s-1)(s+1)}$$

$s=1 \to D=1$, $s=1 \to E=-3$, $s=0 \to C=2$, $s^1 \to B=-4$, $s^4 \to A+D+E=0 \to A=2$

$$X=-\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s-1}-\frac{3}{s+1} \to x=-4t+t^2+e^t-3te^{-t}.$$

b] $\lambda(\lambda^2+2\lambda+a)$. Como un $\lambda=0$, no puede ser **AE**. Los otros autovalores son: $\lambda_\pm=-1\pm\sqrt{1-a}$. De aquí:

Si $a=0$, hay $\lambda=0$ doble, lo que, al tratarse de una ecuación, basta para asegurar que es **I**.

Si $a<0$, es $\lambda_+>0$ (y $\lambda_-<0$), con lo que la ecuación también es **I**.

Si $a>0$, los $\lambda_\pm$ o son reales negativos o complejos con $\mathrm{Re}\lambda<0$. Por tanto, es **EnoA**.

[El signo de los coeficientes o RH (poco útiles conociendo los λ), sólo dan la inestabilidad para $a<0$; de aplicar RH al polinomio de grado 2 sí deduciríamos (considerando el $\lambda=0$) la EnoA para $a>0$].

2.11 $\boxed{x^{IV}+2x'''+6x''+ax'+5x=4\cos t}$ $P(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+6\lambda^2+a\lambda+5=0 \to$
si $a<0$ es I, si $a=0$ no es AE y si $a>0$ no sabemos.

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\a&6&2&1\\0&5&a&6\\0&0&0&5\end{pmatrix} \to 2>0$, $a<12$, $12a-a^2-20=-(a-2)(a-10)>0$, $5>0$ $\to$ $\boxed{\textbf{AE} \Leftrightarrow 2<a<10}$ $\boxed{a<2 \text{ ó } a>10 \Rightarrow \textbf{I}}$

Para $a=2,10$ buscamos $\lambda=qi \to q^4-2q^3i-6q^2+aqi+5=0 \to \left\{\begin{array}{l}q^4-6q^2+5=0 \to q^2=1 \text{ ó } 5\\ q(a-2q^2)=0\end{array}\right. \searrow a=2 \text{ ó } 10$

Por tanto, si $a=2$: $P(\lambda)=(\lambda^2+1)(\lambda^2+2\lambda+5) \to \lambda=\pm i$, $\lambda=-1\pm 2i \to$ **EnoA**.

Y si $a=10$: $P(\lambda)=(\lambda^2+5)(\lambda^2+2\lambda+1) \to \lambda=\pm\sqrt{5}\,i$, $\lambda=-1$ doble $\to$ **EnoA**.

Si $a\neq 2$ ($\lambda=\pm i$ no autovalor) hay $x_p=A\cos t+B\,\mathrm{sen}\,t \to$

$[Ac+Bs]+2[As-Bc]-6[Ac+Bs]+a[Bc-As]+5[Ac+Bs]=4c \to \begin{array}{l}(a-2)B=4\\(2-a)A=0\end{array} \to \boxed{x_p=\frac{4}{a-2}\,\mathrm{sen}\,t}$

Si $a=10$, con los autovalores de arriba y la x_p: $\boxed{x=(c_1+c_2t)e^{-t}+c_3\cos\sqrt{5}\,t+c_4\,\mathrm{sen}\sqrt{5}\,t+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t}$.

Para $a=-14$, una raíz clara de $P(\lambda)$ es $\lambda=1$ (las demás no son calculables exactamente) $\to$

$x=c_1e^t+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4-\frac{\mathrm{sen}\,t}{4}$. Dos soluciones, por ejemplo, son $\boxed{-\frac{\mathrm{sen}\,t}{4}}$ y $\boxed{e^t-\frac{\mathrm{sen}\,t}{4}}$.

Si $a=6$ no hay raíces sencillas de $P(\lambda)$ y no tenemos soluciones de la homogénea, pero conocemos la $x_p=\mathrm{sen}\,t$ y sabemos que la ecuación es AE, o sea, que las soluciones de la homogénea $\to 0$ cuando $t\to\infty$. Por tanto cualquier solución para t gordo acabará siendo como $\mathrm{sen}\,t$ (casi casi será periódica).

Como $x_p=At\cos t+Bt\,\mathrm{sen}\,t$, ninguna es periódica [la homogénea tenía infinitas soluciones periódicas ($c_1\cos t+c_2\,\mathrm{sen}\,t$) y otras que no ($c_3\,e^{-t}\cos 2t+c_4\,e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t$), y debía tener infinitas o ninguna].

2.12 $\boxed{x^{(n)}+6x'+20x=e^t}$ i) $\lambda^3+6\lambda+20=0 \to \lambda=-2,\,1\pm 3i$; $x_p=Ae^t \to\ 27A=1$

$$\boxed{x=c_1e^{-2t}+e^t(c_2\cos 3t+c_3\operatorname{sen}3t)+\tfrac{1}{27}e^t}\ .$$

ii) Si $n=2$, es fácil hallar los autovalores: $\lambda=-3\pm\sqrt{11}\,i$. Asintóticamente estable.

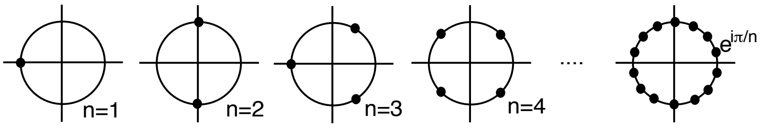
Si $n=3$, los hemos hallado arriba. $\exists\lambda$ con $\mathrm{Re}\lambda>0$. Inestable.

Si $n=4$, no sabemos hallar los λ . Como hay $a_k=0$ no puede ser AE. Si no hay λ con $\mathrm{Re}\lambda=0$ será inestable: $\lambda=qi\Rightarrow q^4+6qi+20=0$ imposible. Es inestable. También lo aseguraba R-H:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\6&0&0&1\\0&20&6&0\\0&0&0&20\end{pmatrix}\to 0\,,\ -6<0\,,\ -36<0\,,\ -720<0\,.$$ Existen menores negativos y es inestable.

2.13 $\boxed{x^{(n)}+x=\cos t}$, $\lambda=\sqrt[n]{-1}$.

Si $n=1$, $\lambda=-1\Rightarrow$ **AE** .
Si $n=2$, $\lambda=\pm i\Rightarrow$ **EnoA** .
Si $n\ge 3$, al menos $\mathrm{Re}(e^{i\pi/n})>0\Rightarrow$ **I** .



La homogénea tiene infinitas soluciones periódicas si i es autovalor: $i^n+1=0\Leftrightarrow n=2,6,\dots,2006,\dots$
Como hay solución $x_p=t(A\cos t+B\operatorname{sen}t)$ ninguna solución de la no homogénea es periódica.

2.14 $\boxed{\begin{array}{l}x'=2-y\\ y'=-2y+cz\\ z'=2x-y\end{array}}$ a] $P(\lambda)=-\begin{vmatrix}-\lambda&-1&0\\0&-2-\lambda&c\\2&-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+2\lambda^2+c\lambda+2c$ $[=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$ si $c=-1]$.

Por el signo de los coeficientes, no AE si $c\le 0$. R-H: $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\2c&c&2\\0&0&2c\end{pmatrix}\to\ 2\,,\,0\,,\,0\to$ **nunca es AE**.

Con un poco de vista: $P(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda^2+c)\to\lambda=-1,\pm\sqrt{-c}\to$ **EnoA** si $c>0$, **I** si $c<0$, y si $c=0$ también **I** pues hay un único v.p. asociado a $\lambda=0$ doble)].

b] Por matrices hallamos primero los vectores propios:

$$\lambda=1:\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-3&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\quad \lambda=-1:\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \lambda=-2:\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},$$

Para ahorrarnos calcular $\mathbf{P}^{-1}$ y las integrales buscamos ($\lambda=0$ no autovalor):

$$\mathbf{x}_p=\begin{pmatrix}a\\b\\d\end{pmatrix}\to\left\{\begin{array}{l}0=2-b\\0=-2b-d\\0=2a-b\end{array}\right.\to\begin{array}{l}a=1\\b=2\\d=-4\end{array}.\quad \mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}e^{-2t}+\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{d.i.}}\boxed{\begin{pmatrix}1-e^{-2t}\\2-2e^{-2t}\\-4\end{pmatrix}}$$

Convirtiendo en ecuación: $y=2-x'\to\ \begin{array}{l}z=x''+2x'-4\\z'=2x+x'-2\end{array}\ \to x'''+2x''-x'-2=-2\to$

$$\left\{\begin{array}{l}x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3e^{-2t}+1\\x(0)=0,x'(0)=2,x''(0)=-4\end{array}\right.\to\ x=1-e^{-2t},\ \ y=2-x',\ \ z=-2y-2y'\,.$$

Laplace: $\left\{\begin{array}{l}sX=\frac{2}{s}-Y\\ sY=-2Y-Z\ \to Z=-(s+2)Y\searrow\\ sZ+4=2X-Y\end{array}\right.$ $\quad 2X=4+(1-2s-s^2)Y\uparrow\quad (s^3+2s^2-s-2)Y=4s-\frac{4}{s}=\frac{4(s+1)(s-1)}{s}\to Y=\frac{4}{s(s+2)}\downarrow\quad Z=-\frac{4}{s}$

$$z=-4\,,\ \ Y=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}=\cdots=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+2}\to y=2-2e^{-2t}\,,\ \ x=\frac{y-z'}{2}=1-e^{-2t}\,.$$

2.15 $\boxed{\begin{array}{l}x'=-3x+4y+cz\\ y'=-x+y-z\\ z'=x-2y\end{array}}$ $-\begin{vmatrix}-3-\lambda&4&c\\-1&1-\lambda&-1\\1&-2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+2\lambda^2-(c+1)\lambda-(c+2)\overset{c=-2}{=}\lambda(\lambda+1)^2\,.$

a] $\lambda=0:\begin{pmatrix}-3&4&-2\\-1&1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\lambda=-1:\begin{pmatrix}-2&4&-2\\-1&2&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{0}\to\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\to\mathbf{x}=c_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t}\underset{\text{d.i.}}{\to}\begin{array}{ll}2c_1+2c_2+c_3&=0\\c_1+c2&=1\\-c_1-c3&=2\end{array}\ \to c_1=0,c_2=1,c_3=-2\,,\ \boxed{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}}\,.$$

Más largo: $\mathbf{x}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ con $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{-t}\end{pmatrix}$.

O bien, $x=z'+2y\to\ \left.\begin{array}{ll}z''+2y'=-3z'-2y-2z\,,&z''+3z'+2z+2(y'+y)=0\\y'=-z'-y-z&z'+z+y'+y=0\end{array}\right\}\to z''+z'=0\to z=c_1+c_2e^{-t}$

$$\xrightarrow{z(0)=2,z'(0)=-2}\boxed{z=2e^{-t}}\xrightarrow{z'+z=0}y'+y=0\to y=Ce^{-t}\xrightarrow{y(0)=1}\boxed{y=e^{-t}}\to x=z'+2y=-2e^{-t}+2e^{-t}\to\boxed{x=0}$$

O Laplace: $\left\{\begin{array}{l}sX=-3X+4Y-2Z\\sY-1=-X+Y-Z\\sZ-2=X-2Y\to Y=\frac{1}{2}X-\frac{s}{2}Z+1\nearrow\end{array}\right.$ $\begin{array}{l}(s+1)X=4-2(s+1)Z\quad\searrow\\(s+1)X=4-2s+(s^2-s-2)Z\to\end{array}\ 2s=(s^2+s)Z\to Z=\frac{2}{s+1}\to X=0\to Y=\frac{1}{s+1}\,.$

b] Si $c>-2$ algún coeficiente es negativo y el sistema es **I**. Si $c=-2$ no es **AE** y si $c<-2$ aún no lo sabemos.

R-H: $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-c-2&-c-1&2\\0&0&-c-2\end{pmatrix}\to$ Si $2>0$, $c<0$ y $c+2<0$ es **AE** $\to$ **AE** $\Leftrightarrow c<-2$ e **I** si $c>-2$.
Si $c=-2$ (el caso de a]) es **EnoA** [$\lambda=-1$ doble y $\lambda=0$ simple].

2.16 $\boxed{\begin{array}{l} x'=z-t^2 \\ y'=-2ay-w \\ z'=-x+ay \\ w'=y+az \end{array}}$, $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & a & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4+2a\lambda^3+2\lambda^2+a(a+2)\lambda+1 \;\; [=(\lambda^2+1)^2 \text{ si } a=0\,]$.

i) Evitando **P** complejas: $\begin{cases} x'=z \\ z'=-x \end{cases} \to \begin{cases} x=c_1\cos t+c_2\,\text{sen}\,t \\ z=-c_1\,\text{sen}\,t+c_2\cos t \end{cases}$, $\begin{cases} y'=-w \\ w'=y \end{cases} \to \begin{cases} w=c_3\cos t+c_4\,\text{sen}\,t \\ y=-c_3\,\text{sen}\,t+c_4\cos t \end{cases}$

$\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & c \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{pmatrix}$, $\mathbf{W}^{-1}(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{W}_c(t)=\mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(0)=\boxed{\begin{pmatrix} \cos t & 0 & \text{sen}\,t & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & -\text{sen}\,t \\ -\text{sen}\,t & 0 & \cos t & 0 \\ 0 & \text{sen}\,t & 0 & \cos t \end{pmatrix}}$.

Más corto que la f.v.c.: $\begin{cases} x'=z-t^2 \\ z'=-x \\ x(0)=1,\, z(0)=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} x''+x=-2t \\ x(0)=1,\, x'(0)=-2 \end{cases}$, $\boxed{x=\cos t-2t}\downarrow$ $\boxed{z=t^2-2-\text{sen}\,t}$ $\begin{cases} y'=-w \\ w'=y \\ y(0)=w(0)=0 \end{cases}$, $\boxed{y=w=0}$ (evidente)

ii) 1 es raíz de $\lambda^4-4\lambda^3+2\lambda^2+1$ (única calculable), $(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0} \to \mathbf{x}=\mathbf{v}\text{e}^t=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\text{e}^t$ solución.

iii) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ a(a+2) & 2 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & a(a+2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to a>0$, $a(2-a)>0$, $a^2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a+2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix}=-a^4>0$ imposible. Nunca es AE.

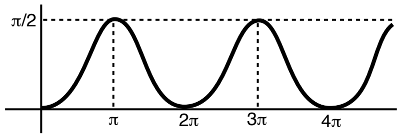
2.17 $|\text{sen}\,t|=\text{sen}\,t+2u_\pi\,\text{sen}(t-\pi)+2u_{2\pi}\,\text{sen}(t-2\pi)+\cdots$, π-periódica.

i) $\boxed{\ddot{x}+x=|\text{sen}\,t|}$, $X=\frac{1}{(s^2+1)^2}[1+2\text{e}^{-\pi s}+2\text{e}^{-2\pi s}+\cdots]$,

$x=\frac{1}{2}[\text{sen}\,t-t\cos t]+u_\pi[-\text{sen}\,t+(t-\pi)\cos t]+u_{2\pi}[\text{sen}\,t+(t-2\pi)\cos t]+\cdots$

$=\begin{cases} \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t-\frac{t}{2}\cos t & [0,\pi] \\ -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t+(\frac{t}{2}-\pi)\cos t & [\pi,2\pi] \\ \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t-(\frac{t}{2}+\pi)\cos t & [2\pi,3\pi] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{cases}$

Es 2π-periódica.
Hay única solución π-periódica.
Todas son 2π-periódicas.



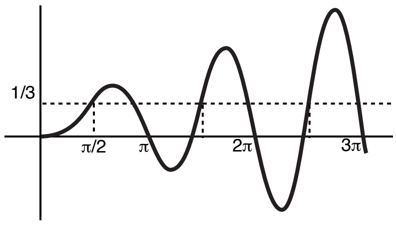
[La única π-periódica cumple $x(0)=x(\pi) \to x=\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t-(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4})\cos t$]

ii) $\boxed{\ddot{x}+4x=|\text{sen}\,t|}$, $X=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}[1+2\text{e}^{-\pi s}+2\text{e}^{-2\pi s}+\cdots]$,

$x=[\frac{\text{sen}\,t}{3}-\frac{\text{sen}\,2t}{6}]+2u_\pi[-\frac{\text{sen}\,t}{3}-\frac{\text{sen}\,2t}{6}]+u_{2\pi}[\frac{\text{sen}\,t}{3}-\frac{\text{sen}\,2t}{6}]+\cdots$

$=\begin{cases} \frac{1}{3}\,\text{sen}\,t-\frac{1}{6}\,\text{sen}\,2t & [0,\pi] \\ -\frac{1}{3}\,\text{sen}\,t-\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t & [\pi,2\pi] \\ \frac{1}{3}\,\text{sen}\,t-\frac{5}{6}\,\text{sen}\,2t & [2\pi,3\pi] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{cases}$

No es periódica.
Ninguna solución lo es.



Soluciones problemas 3. Ecuaciones I (C). 09/10

3.1 a) $\boxed{x''+tx=0}$ $t=0$ regular, $x=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k \to \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kt^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+1}=0$; $c_k=-\frac{c_{k-3}}{(k-1)k}$, $k=3,4,\dots$;

t^0: $c_2=0=c_5=c_8=\cdots$; $c_3=-\frac{c_0}{2\cdot3}$, $c_4=-\frac{c_1}{3\cdot4}$, ... ; $\boxed{x=c_0\big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{3n}}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)\,3^nn!}\big]+c_1\big[t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{3n+1}}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)\,3^nn!}\big]}$

b) $\boxed{(1+t^2)x''-2x=0}$, $x=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$, $c_k=-\frac{k-4}{k}c_{k-2}$, $c_2=c_0$, $c_4=c_6=\cdots=0$, $c_3=\frac{c_1}{3}$, $c_5=-\frac{c_1}{3\cdot5}$, $c_7=\frac{c_1}{5\cdot7}$,...

$\boxed{x=c_0\big[1+t^2\big]+c_1\Big[t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}\Big]}$ $\Big[x_1=1+t^2,\ x_2=(1+t^2)\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}\to x=c_0[1+t^2]+c_1\big[t+(1+t^2)\arctan t\big]\Big]$.

c) $\boxed{\cos t\,x''+(2-\operatorname{sen}t)x'=0}$ Resoluble, $v=-\frac{C\cos t}{(1+\operatorname{sen}t)^2}$ $\big[\int\frac{-2}{\cos t}=2\log\frac{1+\operatorname{sen}t}{\cos t}\big]$, $x=K+\frac{C}{1+\operatorname{sen}t}\to$

$x=K+C[1-\operatorname{sen}t+\operatorname{sen}^2t-\operatorname{sen}^3t+\operatorname{sen}^4t-\cdots]=\boxed{K+C\big[1-t+t^2+(\frac{1}{6}-1)t^3+(1-\frac{1}{3})t^4+\cdots\big]}$

O bien, $\big[1-\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{24}+\cdots\big]\big[2c_2+6c_3t+12c_4t^2+\cdots\big]+\big[2-t+\frac{t^3}{6}-\cdots\big]\big[c_1+2c_2t+3c_3t^2+\cdots\big]=0$,

t^0: $2c_2+2c_1=0$, $c_2=-c_1$; t^1: $6c_3+4c_2-c_1=0$, $c_3=-\frac{5}{6}c_1$; t^2: $12c_4+6c_3-3c_2=0$, $c_3=\frac{2}{3}c_1$; ...

O bien, $x''(0)=-2x'(0)$; $\cos t\,x'''+(2-2\operatorname{sen}t)x''-\cos t\,x'=0$, $x'''(0)=5x'(0)$; ...

3.2 $\boxed{x''+[2-2t]x'+[1-2t]x=0}$ $t=0$ regular $\to$ probamos $x=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$, sabiendo que $c_0=0$ y $c_1=1$.

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kt^{k-2}+\sum_{k=1}^{\infty}[2kc_kt^{k-1}-2kc_kt^k]+\sum_{k=0}^{\infty}[c_kt^k-2c_kt^{k+1}]=0\to$$

t^0 : $2c_2+2c_1+c_0=2c_2+2=0\to c_2=-1$; t^1 : $6c_3+4c_2-c_1-2c_0=6c_3-5=0\to c_3=\frac{5}{6}$;

t^2 : $12c_4+6c_3-3c_2-2c_1=12c_4+6=0\to c_4=-\frac{1}{2}$. Así: $\boxed{x=t-t^2+\frac{5}{6}t^3-\frac{1}{2}t^4+\cdots}$.

O bien: $x''(0)+2x'(0)+x(0)=0$, $x''(0)=-2$ $\nearrow$. Y derivando la ecuación:

$x'''+[2-2t]x''-[1+2t]x'-2x=0\to x'''(0)+2x''(0)-x'(0)-2x(0)=0$, $x'''(0)=5$ $\uparrow$

$x^{iv}+[2-2t]x'''-[3+2t]x''-4x'=0\to x^{iv}(0)+2x'''(0)-3x''(0)-4x'(0)=0$, $x^{iv}(0)=-12$ $\uparrow$

$x_1=\mathrm{e}^{-t}$, $\mathrm{e}^{-\int a}=\mathrm{e}^{t^2-2t}\to x=c\mathrm{e}^{-t}+k\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\mathrm{e}^{s^2}ds\xrightarrow{\text{d.i.}}\boxed{x=\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\mathrm{e}^{s^2}ds}=\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\big[1+s^2+\frac{1}{2}s^4+\cdots\big]ds$

$=\big[1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3+\cdots\big]\big[t+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{10}t^5+\cdots\big]=t-t^2+[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}]\,t^3-[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}]\,t^4+\cdots$ $\nwarrow$

3.3 $\boxed{(1-t)(1-2t)x''+2tx'-2x=0}$ $t=0$ regular, $x=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k\to c_k=\frac{3(k-2)}{k}c_{k-1}-\frac{2(k-3)}{k}c_{k-2}$,

$c_0=c_1=1\to c_2=1$, $c_3=1$,... Si $c_{k-2}=c_{k-1}=1\Rightarrow c_k=\frac{k}{k}=1\to$ $\boxed{x=1+t+t^2+\cdots=\frac{1}{1-t}}$.

[O bien, $x_1=t$, $\mathrm{e}^{-\int a}=\mathrm{e}^{-\int(\frac{2}{1-t}-\frac{2}{1-2t})}$, $x_2=t\int\frac{1-2t}{t^2(1-t)^2}=\int(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(1-t)^2})=-\frac{1}{1-t}$, $x=c_1t+\frac{c_2}{1-t}$ + d.i.]

La serie converge en $(-1,1)$ [el teorema aseguraba que lo hacía al menos en $(-1/2,1/2)$].

$t=\frac{1}{2}$ (con $r=2,0$) y $t=1$ (con $r=0,-1$) son singulares regulares.

En $t=1$ falla el TEU. Como $x=c_1t+\frac{c_2}{1-t}$ ninguna solución satisface esos datos.

3.4 $\boxed{2\sqrt{t}\,y''-y'=0}$ $t=0$ no es singular regular ($a^*(t)=-\frac{\sqrt{t}}{2}$ no es analiítica en $t=0$).

$t-1=s\searrow$ $2[1+s]^{1/2}y''-y'=0$, $2\big[1+\frac{s}{2}-\frac{s^2}{8}+\cdots\big][2c_2+6c_3s+\cdots]-[c_1+2c_2s+3c_3s^2+\cdots]=0$,

s^0: $4c_2-c_1=0$, $c_2=\frac{1}{4}$; s^1: $12c_3+2c_2-2c_2=0$, $c_3=0$; ... $\boxed{y=1+(t-1)+\frac{1}{4}(t-1)^2+\cdots}$.

O bien, $y''(1)=\frac{y'(1)}{2}=\frac{1}{2}$; $2\sqrt{t}\,y'''+(\frac{1}{\sqrt{t}}-1)\,y''=0$, $y'''(1)=0$; ... $y=y(1)+y'(1)(t-1)+\cdots$ $\uparrow$

[Solución calculable sin series: $v'=\frac{v}{2\sqrt{t}}$, $v=C\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$, $y=K+C(\sqrt{t}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\xrightarrow{\text{d.i.}}y=1+2(\sqrt{t}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$].

3.5 $\boxed{4t^2x''-3x=t^2}$ a) $t=s+1\to4(s^2+2s+1)x''-3x=0\to x=s+\frac{1}{8}s^3-\frac{1}{8}s^4+\cdots$ $\downarrow$

$x''(1)=0$; $4t^2x'''+8tx''-3x'=0$, $x'''(1)=\frac{3}{4}$; ... $\to$ $\boxed{x=(t-1)+\frac{1}{8}(t-1)^3-\frac{1}{8}(t-1)^4+\cdots}$.

b) Euler. $\lambda(\lambda-1)-\frac{3}{4}=0\to\lambda=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$, $x_p=At^2\to8A-3A=1\to$ $\boxed{x=c_1\,t^{3/2}+c_2\,t^{-1/2}+\frac{1}{5}t^2}$.

3.6 $\boxed{3(1+t^2)x''+2tx'=0}$ $v'=-\frac{2t}{3(1+t^2)}v\to$ $x=K+C\int(1+t^2)^{-1/3}dt$;

$x=\int_0^t(1-\frac{u^2}{3}+\frac{2u^4}{9}+\cdots)du=\boxed{t-\frac{t^3}{9}+\frac{2t^5}{45}+\cdots}$ se anula en $t=0$.

O bien $t=0$ regular, $c_0=0$, $c_1=1$ (para que se anule en $t=0$) $\Rightarrow c_2=0$, $c_3=-\frac{1}{9}$, $c_4=0$, ...

Como $\int_0^{\infty}\frac{du}{\sqrt[3]{1+u^2}}$ diverge ($\sim\frac{1}{u^{2/3}}$ en ∞) hay soluciones no acotadas.

O bien, $t=\frac{1}{s}\to$ $3s(1+s^2)\ddot{x}+(4+6s^2)\dot{x}=0$, con $r=0,-\frac{1}{3}$; $x_2=s^{-1/3}\sum$ no acotada en $s=0$.

3.7 $\boxed{2t^2x''+t(t+1)x'-(2t+1)x=0}$ $t=0$ singular regular, $r=1,-\frac{1}{2}$ ($x_2=t^{-1/2}\sum$ no está acotada).

Analítica es $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+1}\to\sum_{k=0}^{\infty}\big[2k(k+1)c_kt^{k+1}+(k+1)c_kt^{k+2}+(k+1)c_kt^{k+1}-2c_kt^{k+2}-c_kt^{k+1}\big]=0$,

t^1: $0\cdot c_0=0$ (c_0 indeterminado); $c_k=-\frac{k-2}{(2k+3)k}c_{k-1}$, $c_1=-\frac{1}{5}c_0$, $c_2=0=c_3=c_4=\cdots\to\boxed{x=t\left(1+\frac{t}{5}\right)}$.

3.8 $\boxed{3tx''+(2-6t)x'+2x=0}$ $t=0$ es singular regular con $\lambda(\lambda-1)+\frac{2}{3}\lambda=0\to\lambda=\frac{1}{3},0$. Es no analítica

$x_1=t^{1/3}\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k\to\sum_{k=0}^{\infty}\big[3(k+\frac{1}{3})(k-\frac{2}{3})c_kt^{k-2/3}+2(k+\frac{1}{3})c_kt^{k-2/3}-6(k+\frac{1}{3})c_kt^{k+1/3}+2c_kt^{k+1/3}\big]\to$

$t^{-2/3}:0c_0=0$; $t^{1/3}:4c_1=0$; $t^{k-2/3}:c_k=\frac{6(k-1)}{k(3k+1)}c_{k-1}\to c_2=c_3=\cdots=0\to\boxed{x_1=t^{1/3}}$.

$x_2=t^{1/3}\int\frac{e^{\int(2-\frac{2}{3t})}}{t^{2/3}}dt=t^{1/3}\int\frac{1+2t+2t^2+\frac{4}{3}t^3+\cdots}{t^{4/3}}dt=-3(1-t-\frac{2}{5}t^2-\frac{1}{6}t^4+\cdots)=-3\sum\frac{2^nt^n}{n!(1-3n)}$. O bien:

$x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k\to\sum_{k=0}^{\infty}[(3k-1)kb_kt^{k-1}-2(3k-1)b_kt^k]=0\to t^0:b_1=-b_0$; $t^1:b_2=\frac{2}{5}b_1=-\frac{2}{5}b_0$;

$t^{k-1}:b_k=\frac{2(3k-4)}{k(3k-1)}b_{k-1}\to b_3=\frac{5}{12}b_2=-\frac{1}{6}b_0$; ... $\to\boxed{x_2=1-t-\frac{2}{5}t^2-\frac{1}{6}t^3+\cdots}$.

3.9 $\boxed{4tx''+2x'+x=0}$ $t=0$ singular regular, $r=\frac{1}{2},0$; $x_2=\sum_{n=0}^{\infty}c_kt^k$ analítica; $c_k=-\frac{1}{2k(2k-1)}c_{k-1}$,

$x_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^k=\cos\sqrt{t}$, $t\geq0$; $x_1=\cos\sqrt{t}\int\frac{t^{-1/2}}{\cos^2\sqrt{t}}=2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{t}\to\boxed{x=c_1\cos\sqrt{t}+c_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{t}}$.

$s=t^{1/2}\to\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{1}{2s}$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{ds^2}\frac{1}{4s^2}-\frac{dx}{ds}\frac{1}{4s^3}$, $\frac{d^2x}{ds^2}+s=0$, $x=c_1\cos s+c_2\,\mathrm{sen}\,s\uparrow$

3.10 $\boxed{tx''-2x'+4e^tx=0}$ $r(r-1)-2r=0\to r_1=3,\ r_2=0\to x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+3}$ se anula en $t=0$.

$t(6c_0t+12c_1t^2+20c_2t^3+30c_2t^4+\cdots)-2(3c_0t^2+4c_1t^3+5c_2t^4+6c_3t^5+\cdots)$
$+(4+4t+2t^2+\cdots)(c_0t^3+c_1t^4+c_2t^5+\cdots)=0\to$

$t^2:0c_0=0\to c_0$ cualquiera; $t^3:12c_1-8c_1+4c_0=0\to c_1=-c_0$; $t^4:20c_2-10c_2+4c_1+4c_0=0\to c_2=0$;

$t^5:30c_3-12c_3+4c_2+4c_1+2c_0=0\to c_3=\frac{1}{9}c_0$. Ya 3 no nulos: $\boxed{x_1=t^3-t^4+\frac{1}{9}t^6+\cdots}$.

Tanto x_1 como $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+d\,t^3(1-t+\cdots)\ln t$ acotadas en $t=0$ ($t^3\ln t\underset{t\to0}{\to}0$) $\Rightarrow$ **todas acotadas**.

3.11 $\boxed{t^2x''+t(4-t)x'+2(1-t)x=0}$ $t=0$ sing. regular, $r=-1,-2\to x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k-1}$, $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k-2}+dx_1\ln t$.

$\sum_{k=0}^{\infty}[(k-1)(k-2)c_kt^{k-1}+4(k-1)c_kt^{k-1}-(k-1)c_kt^k+2c_kt^{k-1}-2c_kt^k]=\sum_{k=0}^{\infty}[k(k+1)c_kt^{k-1}-(k+1)c_kt^k]=0\to$

$t^{k-1}:k(k+1)c_k-kc_{k-1}\to c_k=\frac{c_{k-1}}{k+1}$. t^{-1}: $0c_0=0$. Con recurrencia: $c_1=\frac{c_0}{2}$; $c_2=\frac{c_1}{3}=\frac{c_0}{3!}$; $c_3=\frac{c_2}{4}=\frac{c_0}{4!}$; ...

$c_k=\frac{c_0}{(k+1)!}\overset{c_0=1}{\to}\boxed{x_1=\frac{1}{t}[1+\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{3!}+\cdots+\frac{t^k}{(k+1)!}+\cdots]=\frac{e^t-1}{t^2}}$ $[\to x_1'=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{6}+\cdots]$.

x_2 por series: $x_2'=\sum_0^{\infty}(k-2)b_kt^{k-3}+dx_1'\ln t+\frac{dx_1}{t}$, $x_2''=\sum_0^{\infty}(k-2)(k-3)b_kt^{k-4}+dx_1''\ln t+\frac{2dx_1'}{t}-\frac{dx_1}{t^2}$

$\to\sum_0[k(k-1)b_kt^{k-2}-kb_kt^{k-1}]+2dtx_1'+d(3-t)x_1=0$. t^{-2}: b_0 indeterminado;

t^{-1}: $d=0$ (b_1 indeterminado, elegimos $b_1=0$); t^{k-2}: $b_k=\frac{b_{k-1}}{k}\to b_2=b_3=\cdots=0\to\boxed{x_2=\frac{1}{t^2}}$

Identificada x_1 : $x_2=\frac{e^t-1}{t^2}\int\frac{t^4t^{-4}e^t}{(e^t-1)^2}=-\frac{1}{t^2}$. Hallada x_2 : $x_1=\frac{1}{t^2}\int\frac{t^{-4}e^t}{t^{-4}}=\frac{e^t}{t^2}$. Solución general: $x=\frac{c_1e^t}{t^2}+\frac{c_2}{t^2}$

3.12 $\boxed{t(1+t)x''+(2+3t)x'+x=0}$ $t=0$ singular regular, $r=0,-1\to x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ acotada en $t=0$.

$\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kt^{k-1}+k(k-1)c_kt^k]+\sum_{k=1}^{\infty}[2kc_kt^{k-1}+3kc_kt^k]+\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k=0\to c_{k+1}=-\frac{k+1}{k+2}c_k\to$

$\boxed{x_1=1-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{4}t^3+\cdots+(-1)^k\frac{1}{k+1}t^k+\cdots}=\frac{\log(1+t)}{t}$, función no analítica en $t=-1$.

Si no se identifica la serie: $s=t+1\to s(s-1)x''+(3s-1)x'+x=0\to r=0$ doble $\to$

$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k$ analítica, pero $x_2=s\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^k+x_1\log s$ no analítica en $s=0$ ($t=-1$).

Utilizando que $x_1=\frac{1}{t}$: $e^{-\int\frac{2+3t}{t(1+t)}}=e^{-\int[\frac{2}{t}+\frac{1}{1+t}]}=\frac{1}{t^2(1+t)}$, $x_2=\frac{1}{t}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{\log(1+t)}{t}$,

solución acotada en $t=0$ con el desarrollo de arriba y claramente no analítica en $t=-1$.

3.13 $\boxed{tx''+(2t^2-1)x'-4\alpha tx=0}$ a] $t=0$ singular regular con $r=2,0$. Se anula en $t=0$:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2}\to\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_kt^{k+1}+2(k+2)c_kt^{k+3}-(k+2)c_kt^{k+1}-4\alpha c_kt^{k+3}\right]=0$$

t^1: $2c_0-2c_0=0$, c_0 indeterminado; t^2: $6c_1-3c_1=0$, $c_1=0$; t^3: $12c_2+4c_0-4c_2-4\alpha c_0=0$, $c_2=\frac{\alpha-1}{2}c_0$;

t^{k+1}: $(k+2)kc_k-(4\alpha-2k)c_{k-2}=0$, $c_k=\frac{4\alpha-2k}{(k+2)k}c_{k-2}\to c_3=c_5=\cdots=0$. $c_{2k}=\frac{\alpha-k}{(k+1)k}c_{2k-2}\to c_4=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{12}c_0,\dots$

Si $\alpha\notin\mathbf{N}$, $c_{2k}\neq0\,\forall k$, pero si $\alpha=1,2,\dots$, la serie es un polinomio de grado $2n$, pues $c_{2n}=0=c_{2n+2}=\cdots$.

$\Big[$En particular: $P_1=t^2$, $P_2=t^2+\frac{1}{2}t^4$, $P_3=t^2+t^4+\frac{1}{6}t^6$, $\dots\Big]$.

b] $x_1=t^2$ es solución analítica de $tx''+(2t^2-1)x'-4tx=0$ en $t=0$. Otra solución es:

$$x_2=t^2\int\frac{e^{\log t-t^2}}{t^4}=t^2\int\frac{e^{-t^2}}{t^3}=t^2\int\left[\tfrac{1}{t^3}-\tfrac{1}{t}+\tfrac{t}{2}-\tfrac{t^3}{6}+\cdots\right]=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{t^4}{4}-\tfrac{t^6}{24}+\cdots-t^2\log t\,.$$

No todas las soluciones son analíticas en $t=0$. Se podría ver siguiendo con Frobenius:

$$x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+dt^2\ln t,\ x_2'=\sum_{k=1}^{\infty}kb_kt^{k-1}+2dt\ln t+dt,\ x_2''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kt^{k-2}+2d\ln t+3d$$

$$\to\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kt^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[2kb_kt^{k+1}-kb_kt^{k-1}\right]-\sum_{k=0}^{\infty}4b_kt^{k+1}+d\left[2t+2t^3\right]=0\to$$

t^0: $b_1=0$; t^1: $2b_2-2b_2-4b_0+2d=0\to d=2b_0\neq0$ (como antes; y b_2 indeterminado).

c] $x'=y\to y'=(\frac{1}{t}-2t)y\to y=Cte^{-t^2}\to$ $\boxed{x=K+Ce^{-t^2}}$. [Las series solución son las de $x_1=1-e^{-t^2}$ y $x_2=1$].

3.14 $\boxed{tx''+(1-t^2)x'+ptx=0}$ $r=0$ doble; $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$; recurrencia: $c_k=-\frac{p-k+2}{k^2}c_{k-2}$; $c_1=0=c_3=\cdots$

Si $\boxed{p=2n}$, $n=0,1,\cdots$, x_1 es un polinomio de grado $2n$. Si $p=4$, $\boxed{x_1=1-t^2+\frac{1}{8}t^4}$.

3.15 $\boxed{t^2y''+ty'+(t^2-\frac{1}{4})y=0}$ $\xrightarrow{y=t^ru}$ $t^{r+2}u''+(2r+1)t^ru'+\left[(r^2-\frac{1}{4})t^r+t^{r+2}\right]u=0$,

Eligiendo $r=-\frac{1}{2}$ se obtiene $u''+u=0\to u=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen}t$. Solución: $\boxed{y=c_1\frac{\cos t}{\sqrt{t}}+c_2\frac{\operatorname{sen}t}{\sqrt{t}}}$.

ii) $t=0$ singular regular, $r=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$; $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+1/2}$, $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k-1/2}+dx_1\ln t$. Probamos x_2 con $d=0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k-\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{3}{2})b_kt^{k-1/2}+(k-\tfrac{1}{2})b_kt^{k-1/2}-\tfrac{1}{4}b_kt^{k-1/2}+b_kt^{k+3/2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[k(k-1)b_kt^{k-1/2}+b_kt^{k+3/2}\right]=0\,;$$

$t^{-1/2}$: $0b_0=0$, b_0 indeterminado; $t^{1/2}$: $0b_1=0$, b_1 también indeterminado; $t^{3/2}$: $b_2=-\frac{1}{2}b_0$; $t^{5/2}$: $b_3=-\frac{1}{6}b_1$;

$$b_k=-\frac{1}{k(k-1)}b_{k-2}=\frac{1}{k(k-1)(k-2)(k-3)}b_{k-4}=\cdots;\quad\boxed{x=t^{-1/2}\left[b_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n)!}+b_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]}$$

3.16 $\boxed{t^2(1+t)x''+t(3+2t)x'+x=0}$ $t=0$ singular regular, $r=-1$ doble; $x_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_kt^{k-1}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k-1)(k-2)c_kt^{k-1}+(k-1)(k-2)c_kt^k+3(k-1)c_kt^{k-1}+2(k-1)c_kt^k+c_kt^{k-1}\right]=0\to$$

t^{-1}: c_0 indeterminado; t^0: $2c_0-2c_0+c_1=0$, $c_1=0$; c_k en función del anterior $\to$ $\boxed{x_1=\frac{1}{t}}$.

$-\int\frac{3+2t}{t(1+t)}dt=\int\left[\frac{1}{t+1}-\frac{3}{t}\right]dt$, $x_2=\frac{1}{t}\int\frac{t+1}{t}dt=1+\frac{\ln t}{t}$. x_1 y x_2 acotadas cuando $t\to\infty$.

O bien, $t=\frac{1}{s}\to s(1+s)\ddot{x}-s\dot{x}+x=0$, $r=1,0$, $x_1=s\sum\cdot$ y $x_2=\sum\cdot+dx_1\ln s$ acotadas en $s=0$.

3.17 $\boxed{[t^4+t^2]x''+[5t^3+t]x'+[3t^2-1]x=0}$ $\xrightarrow{s=1/t}$ $[e^{\infty}]$ $s^2[1+s^2]\ddot{x}+s[s^2-3]\dot{x}+[3-s^2]x=0$. $\to r=3,1$.

$t=0$ sing. regular, $r=1,-1\Rightarrow$ hay soluciones que $\to0$: $x_1=t\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$. $[x_2=t^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+dx_1\log t$ no acotada$]$.

Y todas tienden a 0 cuando $t\to\infty$, pues $x_1^{\infty}=s^3\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k$, $x_2^{\infty}=s\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^k+dx_1\log s\to0$ cuando $s\to0$.

Hay una solución sencilla de $[e^{\infty}]$: $x_1=s\to$ $x_2=s\int\frac{e^{\int\frac{3-s^2}{s(1+s^2)}}}{s^2}=s\int\frac{s}{(1+s^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{s}{1+s^2}=-\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$

$\to$ solución general: $x=\frac{c_1}{t}+\frac{c_2t}{1+t^2}$, y la segunda tiende a 0 tanto si $t\to0$ como si $t\to\infty$.

O bien, resolviendo por series directamente en $t=0$: $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+1}\to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[(k+1)k+(k+1)-1\right]c_kt^{k+1}+\left[(k+1)k+5(k+1)+3\right]c_kt^{k+3}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)k\,c_kt^{k+1}+(k+4)(k+2)\,c_kt^{k+3}\right]=0$$

$\to c_0$ indeterminado; $c_1=0$; $c_k=-c_{k-2}\to c_2=-c_0$, $c_4=-c_2=c_0,\dots$, $c_3=c_5=\cdots=0\to$

$x_1=c_0[t-t^3+t^5-\cdots]=\frac{c_0t}{1+t^2}\to0$ si $t\to0$ ó $t\to\infty$ [la serie sólo converge si $|t|<1$, pero la función está definida $\forall t$].

Para responder la última pregunta no era necesario resolver ninguna ecuación: el polinomio indicial en 0 dice que hay soluciones x que se anulan en 0 y [como en toda lineal con coeficientes continuos en $(0,\infty)$] estas soluciones llegan hasta infinito, y tienden a 0 si $t\to\infty$, porque todas las soluciones lo hacen, según asegura el polinomio indicial de $[e^{\infty}]$.

3.18 $\boxed{t^4x''+2t^3x'-x=1}$ $t=0$ singular no regular; $t=\frac{1}{s} \to \ddot{x}-x=1 \Rightarrow s=0$ ($t=\infty$) regular.

$x=c_1e^s+c_2e^{-s}+1 \to x=c_1e^{1/t}+c_2e^{-1/t}+1 \xrightarrow{x(1)=0,x'(1)=1} \boxed{x=e^{1-\frac{1}{t}}-1}$.

3.19 $\boxed{(1-t^2)x''-2tx'+2x=0}$ $P_1=t \to x_1=t\int \frac{e^{\int[2t/(1-t^2)]}}{t^2}=t\int\left[\frac{1}{t^2}+\frac{1/2}{1+t}+\frac{1/2}{1-t}\right]=\boxed{\frac{t}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-1}$

$1-\frac{t}{2}[\ln(1+t)-\ln(1-t)] \underset{t\leq 1}{=} 1-\sum_1 \frac{t^{2n}}{2n-1}=1-\sum_1 \frac{1\cdot3\cdots(2n-3)\cdot2\cdot4\cdots2n}{(2n)!}t^{2n}$ (serie de los apuntes con $p=1$).

$t=\frac{1}{s} \to s^2(s^2-1)\ddot{x}+2s^3\dot{x}+2x=0$, $s=0$ sing. regular, $r=2,-1$; $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^{k+2}$, c_0 indet., $c_1=0$,

$c_k=\frac{k+1}{k+3}c_{k-2} \to c_3=c_5=\cdots=0$, $c_2=\frac{3}{5}c_0$, $c_4=\frac{3}{7}c_0$, ... $x_1=\frac{s^2}{3}+\frac{s^4}{5}+\frac{s^6}{7}+\cdots=\frac{1}{3t^2}+\frac{1}{5t^4}+\frac{1}{7t^6}+\cdots$ $|s|<1$ $|t|>1$

$1-\frac{1}{2s}\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|=1-\frac{s+s^3/3+\cdots}{s}=-\frac{s^2}{3}-\frac{s^4}{5}-\cdots$ casi la misma. $x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^k+d\ln x_1$ dará $x_2=\frac{1}{s}=t$.

3.20 $\boxed{(t^2-1)x''-4tx'+6x=0}$ Como $t=0$ es regular (a y b son analíticas para $|t|<1$), probamos:

$\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k \to \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kt^k-k(k-1)c_kt^{k-2}]+\sum_{k=1}^{\infty}-4kc_kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}6c_kt^k=0 \to$

t^0: $-2c_2+6c_0=0 \to c_2=3c_0=-3$ $[c_0=x(0)]$; t^1: $-6c_3-4c_1+6c_1=0 \to c_3=\frac{c_1}{3}=1$ $[c_1=x'(0)]$;

$t^k \to c_{k+2}=\frac{(k-2)(k-3)}{(k+2)(k+1)}c_k \to c_4=0=c_6=\cdots$, $c_5=0=c_7=\cdots \to \boxed{x=-1+3t-3t^2+t^3=(t-1)^3}$.

De otra forma: $-x''(0)+6x(0)=0 \to x''(0)=-6$. Y derivando:
$(t^2-1)x'''-2tx''+2x'=0 \to x'''(0)=2x'(0)=6$, $(t^2-1)x^{IV}=0 \to x^{IV}=0 \to x^V=x^{VI}=\cdots=0$.

Haciendo $t=s+1$ obtenemos $(2s+s^2)x''-4(1+s)x'+6x=0$, $s^2x''-s\frac{4(1+s)}{2+s}x'+\frac{6s}{2+s}x=0$

$\to$ singular regular con $r=3,0 \to$ se anula en $s=0$ la $x_1=s^3\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k=c_0s^3+c_1s^4+\cdots$

$\sum_{k=0}^{\infty}\left[2(k+3)(k+2)c_ks^{k+2}+(k+3)(k+2)c_ks^{k+3}-4(k+3)c_ks^{k+2}-4(k+3)c_ks^{k+3}+6c_ks^{k+3}\right]$

$=\sum_{k=0}^{\infty}[2k(k+3)c_ks^{k+2}+k(k+1)c_ks^{k+3}]=0 \to s^{k+2}$: $2k(k+3)c_k+(k-1)kc_{k-1}=0 \to c_k=-\frac{k-1}{2(k+3)}c_{k-1}$, $k\geq1$.

A partir de la serie: s^2: $0c_0=0 \to c_0$ indeterminado; s^3: $8c_1+0c_0=0 \to c_1=0$ [coincide con $\uparrow$].

Como cada c_k queda en función del anterior, $c_2=c_3=\cdots=0 \to \boxed{x_1=s^3}$ $[=(t-1)^3]$.

Como la solución general es $x=c_0[1+3t^2]+c_1[t+\frac{1}{3}t^3]$, es claro que no hay soluciones no triviales que tiendan a 0 si $t\to\infty$, pero lo podemos ver directamente analizando el punto del infinito:

$t=\frac{1}{s} \to \left[\frac{1}{s^2}-1\right][s^4\ddot{x}+2s^3\dot{x}]-\frac{4}{s}[-s^2\dot{x}]+6x=s^2[1-s^2]\ddot{x}+s[6-2s^2]\dot{x}+6x=0$,

ecuación para la que $s=0$ es singular regular con $r=-2,-3$. Sus soluciones $x_1=\frac{1}{s^2}\sum$ y $x_2=\frac{1}{s^3}\sum+dx_1\ln s$ se van al infinito cuando $s\to0^+$ ($t\to\infty$).

$\Big[$De $x_1=s^3$ saldría esta solución general: $x_2=s^3\int\frac{e^{2\int\frac{2s+2}{s^2+2s}}}{s^6}=s^3\int\frac{(s+2)^2}{s^4}=s^3\left[-\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{4}{3s^3}\right] \to x=k_1s^3+k_2(\frac{4}{3}+2s+s^2)\Big]$.

3.21 $\boxed{t(t-1)x''+x'-px=0}$ $t=0$ singular regular, $r=2,0$; $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k+2}$; $c_k=\frac{(k+1)k-p}{k(k+2)}c_{k-1}$;

x_1 será polinomio si $\boxed{p=n(n+1)}$, $n=1,2,\ldots$ $P_1=t^2$, $P_2=t^2-\frac{4}{3}t^3$, ...

Si $\boxed{p=0}$, x_1 no lo es, pero lo será $x_2=1$ (será $d=0$ en el teorema de Frobenius).

Para $p=2$, $x_2=t^2\int\frac{e^{-\int[1/(t^2-t)]}}{t^4}=t^2\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+t+\frac{1}{2} \underset{t\to\infty}{\to} 0$ $\left[\frac{\ln(1-s)+s+\frac{s^2}{2}}{s^2} \underset{s\to0^+}{\to} 0\right]$

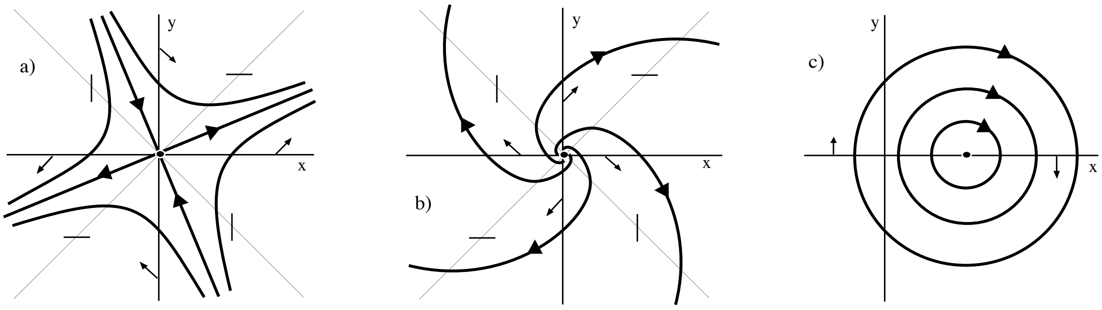
O bien, $t=\frac{1}{s} \to s^2(1-s)\ddot{x}+s(2-3s)\dot{x}-2x=0$, $r=1,-2$, hay soluciones $x_1=s\sum c_ks^k \underset{s\to0}{\to} 0$.

Soluciones problemas 4. Ecuaciones I (C). 09/10

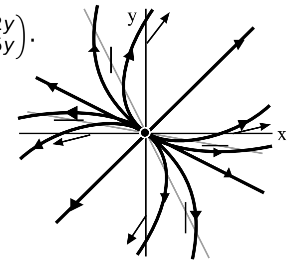
4.1 a) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x+y \\ y'=x-y \end{array}}$ $\lambda=\pm\sqrt{2}\to\begin{pmatrix}1\\ \pm\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$, silla. Horizontal: $y=x$ Vertical: $y=-x$. $\mathbf{v}(x,0)=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. $\mathbf{v}(0,y)=y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

b) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x+y \\ y'=y-x \end{array}}$ $\lambda=1\pm i$, foco I. Horizontal: $y=-x$ Vertical: $y=x$. $\mathbf{v}(x,0)=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. $\mathbf{v}(0,y)=y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

c) $\boxed{\begin{array}{l} x'=y \\ y'=-x+1 \end{array}}$ Punto crítico $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. $\lambda=\pm i$, centro (lineal). Órbitas: $y^2+(x-1)^2=C$. $\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}0\\1-x\end{pmatrix}$.



4.2 $\boxed{\begin{array}{l} x'=4x+2y \\ y'=x+5y \end{array}}$ Lineal. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$: $6,3\to\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ H: $x=-5y$ V: $y=-2x$, $\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}4x\\x\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0,y)=\begin{pmatrix}2y\\5y\end{pmatrix}$.



Solución: Órbita $y=-\frac{x}{2}\to\left\{\begin{array}{l} x'=3x \\ x(0)=2\end{array}\right.\to x=2e^{3t},\ y=-e^{3t}$.

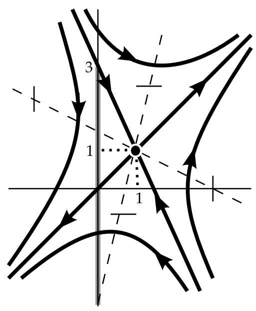
[O imponiendo datos a la solución general $x=c_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{6t}$, o por Laplace].

Órbitas: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+5y}{4x+2y}\overset{z=y/x}{\to}\int\frac{(2z+4)\,dz}{1+z-2z^2}=\int\left[\frac{2}{2z+1}-\frac{2}{z-1}\right]dz=\ln x+C\to\frac{2y+x}{(y-x)^2}=C$.

4.3 $\boxed{\begin{array}{l} x'=x+2y-3 \\ y'=4x-y-3 \end{array}}$ El sistema (además de claramente **lineal**) es exacto:

$\to\begin{array}{l} H_y=x+2y-3 \\ H_x=y-4x+3 \end{array}\to H=y^2+xy-2x^2-3y+3x=C$.

O con un poco de vista, $\boxed{(y-x)(y+2x-3)=C}$, órbitas.



El punto crítico: $\begin{array}{l} x=3-2y\searrow \\ \quad 9-9y=0\to \end{array}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ha de ser silla o centro.

$\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix}\to\lambda=\pm3$ silla, con $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, respectivamente.

$\mathbf{v}$ es vertical si $x=3-2y$ y horizontal si $y=4x-3$.

A la vista del mapa de fases, las soluciones (definidas $\forall t$ por ser lineal con coeficientes continuos) tales que su $y(t)\to-\infty$ si $t\to\infty$ son las situadas a la izquierda de la separatriz estable: $y=3-2x$ [recta de pendiente -2 por $(1,1)$]. Como esta separatriz corta $x=0$ en $y=3$, los α pedidos son los $\boxed{\alpha<3}$.

4.4 $\boxed{(1+x^3y)+(x^4+x^3y)\frac{dy}{dx}=0}$ $g(x)=\frac{1}{x^3}$ f.int. $\frac{1}{x^3}+y+(x+y)\frac{dy}{dx}$ exacta.

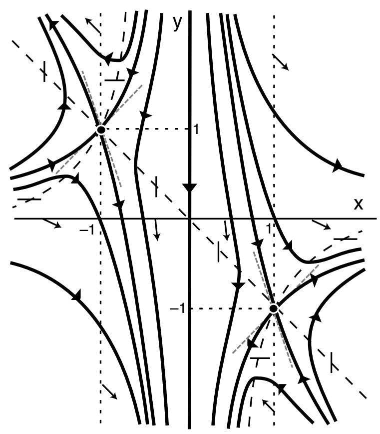
$y^2+2xy-\frac{1}{x^2}=C\overset{y(1)=1}{\to}y=-x\pm(x+\frac{1}{x})\to y=\frac{1}{x}$ ($y=-2x-\frac{1}{x}$ no lo cumple)

Solución única, pues $f\equiv\frac{-1-x^3y}{x^4+x^3y}$ y f_y continuas en entorno de $(1,1)$.

$\boxed{\begin{array}{l} x'=x^4+x^3y \\ y'=-1-x^3y \end{array}}$ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}:\pm2\to\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}:\pm2\to\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sillas.

Separatrices: $\begin{array}{l}(1,-1)\\(-1,1)\end{array}\to C=-2\to y=-x\pm(x-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x},\ -2x+\frac{1}{x}$.

Vertical: $y=-x$, $y=0$ Horizontal: $y=-1/x^3$. $\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}x^4\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(\pm1,y)=(1\pm y)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

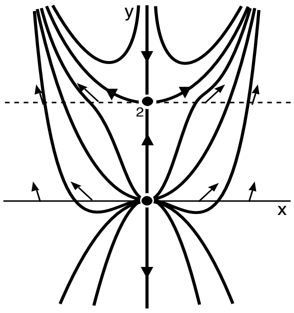


4.5 $\boxed{\begin{array}{l} x'=x \\ y'=2y-y^2+x^4 \end{array}}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}-\dfrac{y^2}{x}+x^3$ de Riccati. $y=z+x^2\to$

$z'=(\frac{2}{x}-2x)z-\frac{z^2}{x}\xrightarrow{z=1/u}u'=(2x-\frac{2}{x})z+\frac{1}{x}\to y=x^2+\dfrac{2x^2}{Ce^{x^2}-1}$.

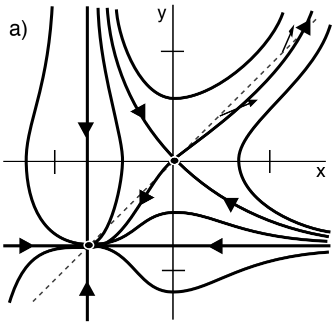
Aproximación lineal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4x^3 & 2-2y \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\to 1,2\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, nodo I. $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\to 1,-2\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, silla.

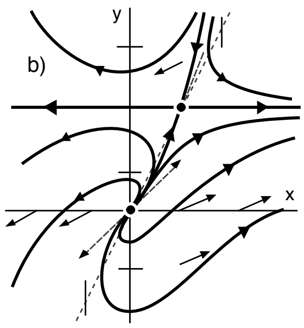
Vertical si $x=0$ (órbita). Horizontal si $y=1\pm\sqrt{1+x^4}$. $\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}(x,2)=\begin{pmatrix}x\\x^4\end{pmatrix}$.



4.6 a) $\boxed{\begin{array}{l} x'=y(x+1) \\ y'=x(y^3+1) \end{array}}$ $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}:-1\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},-3\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, nodo E. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}:\pm1\to\begin{pmatrix}\pm1\\1\end{pmatrix}$, silla. $\mathbf{v}(x,x)=x\begin{pmatrix}1+x\\1+x^3\end{pmatrix}$.

Órbitas complicadas. Horizontal: $x=0$, $y=-1$. Vertical: $y=0$, $x=-1$.





b) $\boxed{\begin{array}{l} x'=4x-2y \\ y'=2x-xy \end{array}}$ H: $x=0$, $y=2$. V: $y=2x$ Órbitas no calculables .

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$: 2 doble $\to\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, nodo1tgI.

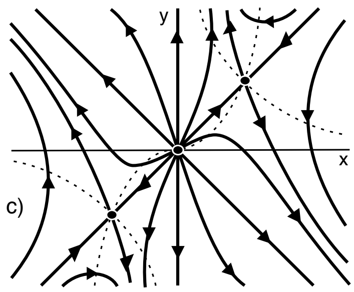
$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$: $4\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $-1\to\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, silla. $\mathbf{v}(x,0)=2x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

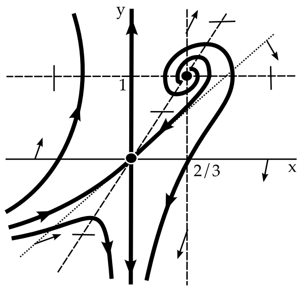
$\mathbf{v}(1,y)=(2-y)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. $\mathbf{v}(x,\frac{5x-1}{2})=(1-x)\begin{pmatrix}1\\5x/2\end{pmatrix}$.

c) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x-x^2y \\ y'=y-x^3 \end{array}}$ $g(x)=\frac{1}{x^2}$ factor int. $\frac{y}{x^2}-x+(y-\frac{1}{x})\frac{dy}{dx}$ exacta. Órbitas: $y=\frac{1}{x}\pm\sqrt{\frac{1}{x^2}+2C+x^2}$.

$C=\pm1\to y=\mp x$, $y=\pm x+\frac{2}{x}$,

Horizontal: $y=x^3$. Vertical: $x=0$, $y=\frac{1}{x}$.





d) $\boxed{\begin{array}{l} x'=xy-x \\ y'=2y-3x \end{array}}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$: -1 , $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; 2 , $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Silla.

$\begin{pmatrix}2/3\\1\end{pmatrix}\to\lambda=1\pm i$, foco I.

H: $y=\frac{3}{2}x$. V: $y=1$ y $x=0$ [órbita].

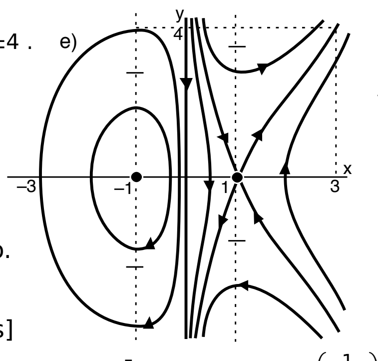
$\mathbf{v}(x,0)=-x\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2/3,y)=\frac{2}{3}(y-1)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

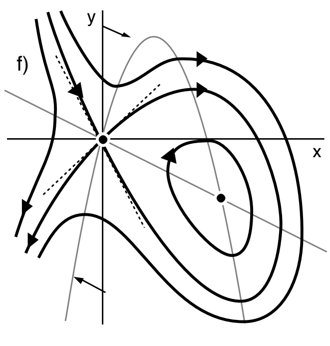
$\mathbf{v}(x,x)=-x\begin{pmatrix}1-x\\1\end{pmatrix}$ [separatriz estable se deforma ⌣].

e) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x^2y \\ y'=x^4-1 \end{array}}$ $\begin{pmatrix}2xy & x^2\\4x^3 & 0\end{pmatrix}_{\begin{pmatrix}\pm1\\0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}0&1\\\pm4&0\end{pmatrix}$ + silla, $\pm2\to\begin{pmatrix}1\\\pm2\end{pmatrix}$ – centro de la AL $\begin{array}{c} f(x,-y)=-f(x,y) \\ g(x,-y)=g(x,y) \end{array}\Rightarrow$ Centro. V: $y=0$, $x=0$. H: $x=\pm1$.

$y^2=\frac{2x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$. Separatrices: $y=\pm\sqrt{\frac{2x^3}{3}+\frac{2}{x}-\frac{8}{3}}\Big|_{x=3}=\pm4$.

Por $(-3,0)$ y $(-1,4)$ pasa la órbita cerrada de $C=\frac{56}{3}$.





f) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x+2y \\ y'=4x-y-3x^2 \end{array}}$ Horizontal: $y=4x-3x^2$ Vertical: $y=x/2$ Exacto.

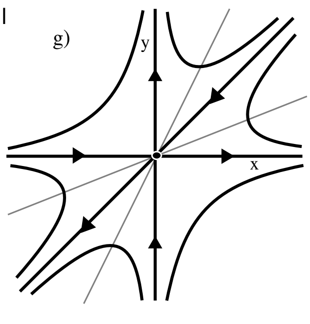
$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$: $\pm3\to\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, silla. $\begin{pmatrix}3/2\\-3/4\end{pmatrix}$: $\pm3i$, centro.

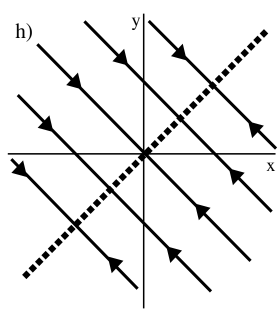
$y^2+xy-2x^2+x^3=C\to$ separatrices: $y=\frac{x}{2}(-1\pm\sqrt{9-4x})$ [s]

[Puntos de [s] : $(\frac{9}{4},-\frac{9}{8})$, $(2,0)$, $(2,-2)$, $(-4,-8)$, $(-4,12)$] . $\mathbf{v}(x,x)=3x\begin{pmatrix}1\\1-x\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(x,-2x)=3x\begin{pmatrix}-1\\2-x\end{pmatrix}$.

g) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x^2-2xy \\ y'=y^2-2xy \end{array}}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ no elemental. $y=2x$ horizontal $y=\frac{x}{2}$ vertical

Exacto. $x^2y-xy^2=C$. $C=0\to\begin{array}{c}x=0\\y=0\\y=x\end{array}$. $\frac{dy}{dx}\Big|_{y=mx}=\frac{m^2-2m}{1-2m}$.



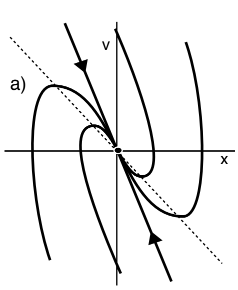


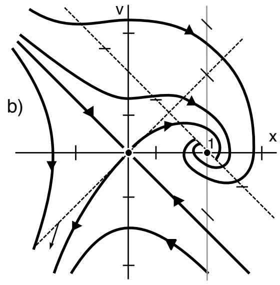
h) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x-y \\ y'=y-x \end{array}}$ $\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$ infinitos puntos no elementales.

Órbitas: $y+x=C$. $\mathbf{v}(x,y)=(x-y)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

4.7 a) $\boxed{x''=-4x'-4x}$ $\begin{cases}x'=v\\ v'=-4x-4v\end{cases}$ lineal.

$\binom{0}{0}\to\lambda=-2$ doble, $\binom{1}{-2}$ nodo 1tgE. H: $v=-x$.





b) $\boxed{x''=x(1-x-x')}$ $\begin{cases}x'=v\\ v'=-x-x^2-xv\end{cases}$

$\binom{0}{0}$: ±1 silla; $\binom{1}{0}$: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, focoE. Horizontal: $x=0\,,v=1-x$.

$\mathbf{v}(x,x)=\binom{x}{x-2x^2}$, $\mathbf{v}(x,-x)=\binom{-x}{x}$, $\mathbf{v}(1,v)=\binom{v}{-v}$.

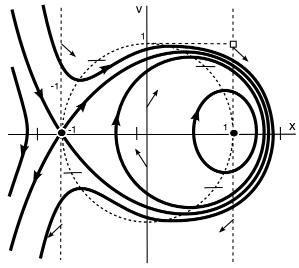
c) $\boxed{x''=1-x^2-(x')^2}$ $\frac{dv}{dx}=\frac{1-x^2}{v}-v \xrightarrow{z=v^2} \frac{dz}{dx}=-2z+2-2x^2 \xrightarrow{z_p=Ax^2+Bx+C} z=\boxed{Ce^{-2x}-x^2+x+\frac{1}{2}=v^2}$.

$\begin{pmatrix}0&1\\-2x&-2y\end{pmatrix}\xrightarrow{(\pm1,0)}\begin{pmatrix}0&1\\\mp2&0\end{pmatrix}\to\lambda^2\pm2=0\to$ $\binom{-1}{0}$ silla con $\lambda=\pm\sqrt{2}$ [$\mathbf{v}=\binom{1}{\lambda}$, en toda ecuación]. $\binom{1}{0}$ centro de la AL. Como g es par en v se conserva.

Campo horizontal sobre $x^2+v^2=1$ [vertical sobre el eje x (ecuación)].

La separatriz pasa por $(-1,0)\to v^2=\frac{3}{2}e^{-2x-2}-x^2+x+\frac{1}{2}$

[El 2^o miembro anula para un $x>1$ $(\to-\infty)$, y $\underset{x\to-\infty}{\sim} ke^{-2x}$].



Órbita circular sencilla: $v^2+(x-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$ [$v=0$ si $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\approx1.4,$–$0.4$].

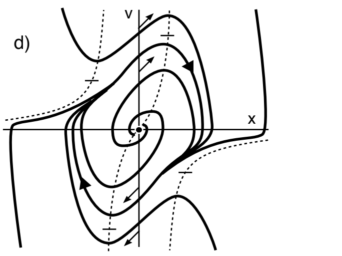
$\mathbf{v}(0,v)=\binom{v}{1-v^2}$, $\mathbf{v}(\pm1,v)=\binom{v}{-v^2}$.

d) $\boxed{x''=(1-x^2)x'-x}$ $\begin{cases}x'=v\\ v'=(1-x^2)v-x\end{cases}$.

0, único punto crítico, es un focoI. Órbitas no calculables.

Campo horizontal si $v=\frac{x}{1-x^2}$. Isoclina sencilla: $\frac{dv}{dx}=1\to v=-\frac{1}{x}$.

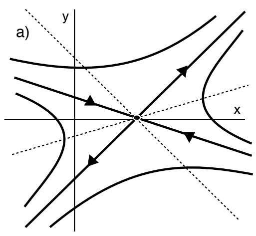
$\mathbf{v}(x,0)=\binom{0}{-x}$, $\mathbf{v}(0,v)=\binom{v}{v}$, $\mathbf{v}(\pm1,v)=\binom{v}{\mp1}$.

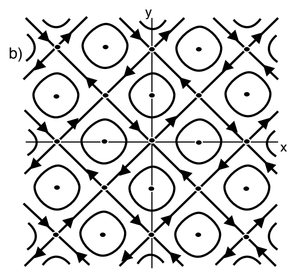


[Las órbitas parecen acercarse a una curva cerrada (solución periódica aislada; esta ecuación (de Van der Pol) es la más famosa con ciclos límite].

4.8 a) $\boxed{\begin{array}{l}x'=1-x+3y\\ y'=x+y-1\end{array}}$ Lineal. Todas las soluciones definidas para todo t. $\binom{1}{0}$: $\pm2\to\binom{1}{1},\binom{3}{-1}$, silla. Horizontal: $y=1-x$ Vertical: $y=(x-1)/3$.

Órbitas (exacta): $3y^2-(x-1)^2-2y(x-1)=C$, hipérbolas.



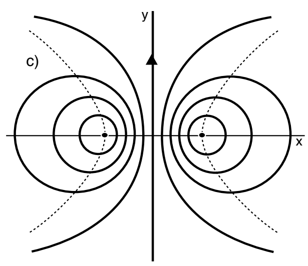


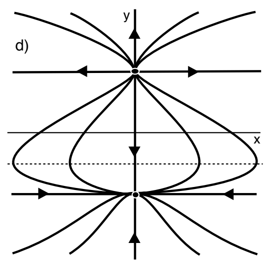
b) $\boxed{\begin{array}{l}x'=\operatorname{sen}y\\ y'=\operatorname{sen}x\end{array}}$ $\binom{k\pi}{n\pi}:\lambda^2=(-1)^{k+m}$ $k+m$ impar, centro. $k+m$ par, silla.

Exacta. $\cos y-\cos x=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}=C$. $y=2n\pi\pm x$ órbitas rectas.

$\mathbf{v}(x,0)=\binom{0}{\operatorname{sen}x}$. Órbitas acotadas $\Rightarrow$ soluciones definidas $\forall t$.

c) $\boxed{\begin{array}{l}x'=2xy\\ y'=1-x^2+y^2\end{array}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{1-x^2}{2xy}$ Bernouilli. $y^2+(x-C)^2=C^2$.





$\binom{\pm1}{0}$ centro de AL y no lineal (circunferencias o simetría).

Vertical: $\begin{array}{c}x=0\\y=0\end{array}$. Horizontal: $x^2-y^2=1$. $\mathbf{v}(0,v)=\binom{0}{1+v^2}$.

Periódicas definidas $\forall t$. $x=0\to y'=1+y^2\to$ explotan.

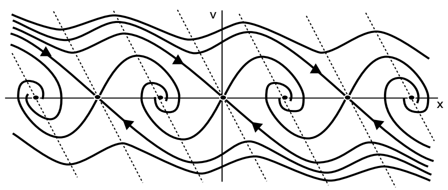
d) $\boxed{\begin{array}{l}x'=x+2xy\\ y'=y^2-1\end{array}}$ $\begin{array}{l}=0\to y=-\frac{1}{2}\,,x=0 \text{ órbita.}\\ =0\to y=\pm1 \text{ órbitas.}\end{array}$

Separable: $x=C(y-1)^{3/2}(y+1)^{1/2}$. $\binom{0}{1}$: $2,3\to\binom{0}{1},\binom{1}{0}$, nodoI. $\binom{0}{-1}$: $-1,-2\to\binom{1}{0},\binom{0}{1}$, nodoE.

No (sí) definidas $\forall t$ las soluciones asociadas a las órbitas con $|y|>1$ ($|y|\le1$).

4.9 $\boxed{x''=\operatorname{sen}(ax+x')}$ $\begin{cases}x'=v\\ v'=\operatorname{sen}(ax+v)\end{cases}$. $\binom{k\pi/a}{0}$ puntos críticos. Si k par: $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$, sillas.

Si k impar: $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\to$ nodos E si $0<a<1/4$; nodos 1tg E si $a=1/4$; focos estables si $a>1/4$



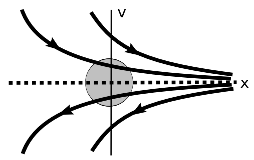
$\boxed{a=2}$ $\binom{n\pi}{0}$ sillas con $\lambda=2,-1$; $\binom{(2n-1)\pi/2}{0}$ focosE.

Pendiente horizontal si $v=k\pi-2x$.

$\boxed{\mathbf{4.10}}$ $\boxed{x''=ax-(x')^2}$ a) $\begin{cases} x'=v \\ v'=ax-v^2 \end{cases} \to \mathbf{M}=\begin{pmatrix}0&1\\a&0\end{pmatrix} \to \lambda=\pm\sqrt{a}$. Si $\boxed{a>0}$ es $\binom{0}{0}$ una silla y $x\equiv 0$ es **I**.

Si $\boxed{a<0}$ es $\binom{0}{0}$ centro de la aproximación lineal, y en principio $x\equiv 0$ puede ser AE, EnoA o I.
Como $g(x,v)=ax-v^2$ es par en v el centro lo sigue siendo del no lineal y $x\equiv 0$ es **EnoA**.

Si $\boxed{a=0}$ todo $v=0$ son puntos críticos (no elementales). $\frac{dv}{dx}=-v \to v=Ce^{-x}$.
Esto (y el sentido de las ecuaciones) da el mapa de fases. En él se ve que $\binom{0}{0}$ (y, por tanto, la solución $x\equiv 0$) es **I** [$x(t)$ (no constantes) cercanas tienden a + ó $-\infty$].



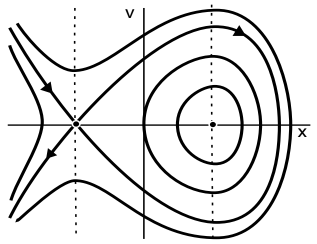
b) La órbita con $v(x=0)=1$ es $v=e^{-x}=\frac{dx}{dt} \to x=\log(t+K) \overset{x(1)=0}{\to} \boxed{x=\log t}$.

O como no aparece x: $x'=v \to v'=-v^2 \to v=\frac{1}{t+C} \overset{v(1)=1}{\to} v=\frac{1}{t} \to x=\log t+K \overset{x(1)=0}{\to} x=\log t$].

$\boxed{\mathbf{4.11}}$ $\boxed{\ddot{x}=1-x^2-k\dot{x}}$ $\begin{cases} x'=v \\ v'=1-x^2-kv \end{cases}$ $\binom{-1}{0}$, $\lambda=\frac{-k\pm\sqrt{k^2+8}}{2}$ silla $\forall k$. $\binom{1}{0}$, $\lambda=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-8}}{2}$ centro si $k=0$ (exacta), focoE si $0<k<2\sqrt{2}$, nodo1tgE si $k=2\sqrt{2}$, nodo1tgE si $k>2\sqrt{2}$.

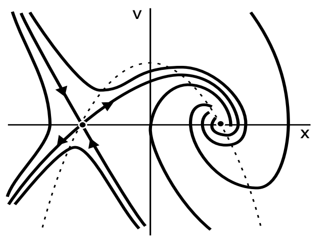
H: $x=\pm 1$ si $k=0$; $v=\frac{1-x^2}{k}$ si $k\neq 0$.

$\boxed{k=0}$ $\lambda=\pm\sqrt{2}$, $V(x)=\frac{x^3}{3}-x$



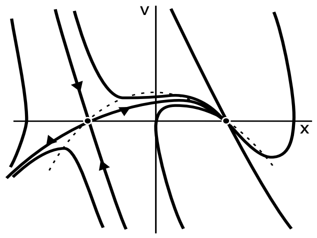
No rozamiento
(oscilaciones periódicas)

$\boxed{k=1}$ $\lambda=1,-2$



Poco rozamiento
(oscilaciones amortiguadas)

$\boxed{k=3}$ $\lambda\approx 0.5,3.5$ $\lambda=-1,-2$



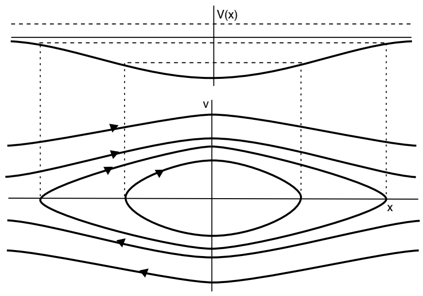
Mucho rozamiento
(imposible oscilar)

$\boxed{\mathbf{4.12}}$ $\boxed{\ddot{x}=-x(x^2+9)^{-2}}$ $V(x)=\int\frac{x\,dx}{(x^2+9)^2}=-\frac{1}{2(x^2+9)} \to v^2=C+\frac{1}{x^2+9}$.

Si tiene energía suficiente (si $C\geq 0$) llega hasta + ó $-\infty$ (la fuerza de recuperación es pequeña si x gordo). Si no, oscila.

Órbita con $v(0)=\frac{1}{3}$: $v(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}} \to$ velocidad cuando $x=4$: $v=\frac{1}{5}$.

Tiempo: $T=\int_0^4\sqrt{x^2+9}\,dx=10+\frac{9}{2}\ln 3$.



$\boxed{\mathbf{4.13}}$ $\boxed{\begin{matrix} x'=xy \\ y'=2-x+y^2 \end{matrix}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{x-2}{xy} \overset{z=x^2}{\longrightarrow} \frac{dz}{dx}=\frac{2z}{x}-\frac{2x-4}{x} \to z=\boxed{Cx^2+2x-2=y^2}$ (cónicas).

Puntos críticos: $\begin{matrix} x=0\downarrow \\ 2+y^2\neq 0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} y=0\downarrow \\ x=2 \end{matrix} \to \binom{2}{0}$. $\left.\begin{pmatrix}y&x\\-1&2y\end{pmatrix}\right|_{(2,0)}=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix} \to \lambda=\pm i\sqrt{2}$, centro de la AL.

f es impar en y y g par en y (o viendo la solución general) $\Rightarrow$ las órbitas son simétricas respecto a $y=0$ y el centro se conserva.

Horizontal: $x=2+y^2$ (parábola). Vertical: $x=0$ (órbita) e $y=0$.

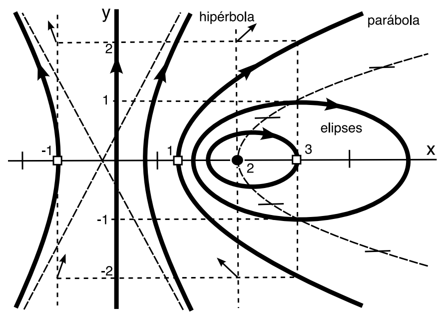
$\mathbf{v}(0,y)=\binom{0}{2+y^2}$, $\mathbf{v}(2,y)=\binom{2y}{y^2}$, $\mathbf{v}(-1,y)=\binom{-y}{3+y^2}$.

Para $a=-1$ el campo muestra que la órbita no es cerrada (solución no periódica). En concreto, es la de $C=4$ (es una hipérbola).

La órbita para $a=1$ es la parábola $x=1+\frac{1}{2}y^2 \to$ periódica.

$a=3 \to C=-\frac{4}{9}$, $y^2+\frac{4}{9}(x-\frac{9}{4})^2=\frac{1}{4} \to$ elipse (solución periódica).

[O del mapa: desde $(3,0)$ sigue $\swarrow$, luego $\nwarrow$, corta el eje, y es simétrica].



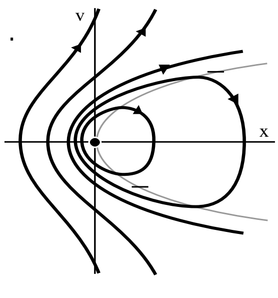
$\boxed{\mathbf{4.14}}$ $\boxed{x''=(x')^2-x}$ $\begin{cases} x'=v \\ v'=v^2-x \end{cases}$; $\binom{0}{0}$ centro de la AL. $\frac{dv}{dx}=v-\frac{x}{v} \to v^2=Ce^{2x}+x+\frac{1}{2}$.

Órbitas simétricas respecto a $v=0 \Rightarrow$ centro del no lineal. Horizontal si $x=v^2$.

Inflexión de las órbitas: $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{v^4-v^2-x}{v^3}=0 \to x=\pm v\sqrt{v^2-1}$. $\mathbf{v}(0,v)=\binom{v}{v^2}$.

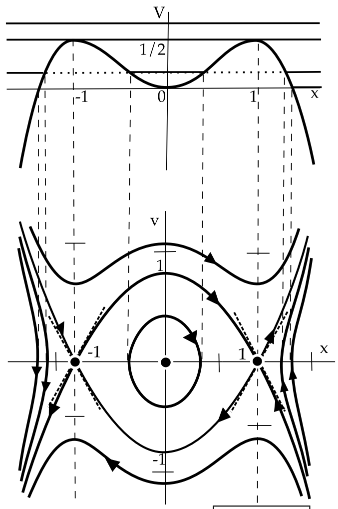
$x(2)=\frac{1}{2}, x'(2)=1 \underset{v(x=1/2)=1}{\to} v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{x+\frac{1}{2}}$, $\int\frac{dx}{2\sqrt{x+1/2}}=\sqrt{x+\frac{1}{2}}=\frac{t}{2}+K$,

$x=(\frac{t}{2}+K)^2-\frac{1}{2} \underset{x(2)=1/2}{\to}$ Solución: $\boxed{x=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}}$.



4.15 $\boxed{x''=2x^3-2x}$ Exacta. Conviene usar la función potencial $V(x)=x^2-\frac{x^4}{2}$, que tiene un mínimo en $x=0$ (centro del mapa de fases), y dos máximos en $x=\pm1$ (sillas). Es $V(0)=0$, $V(\pm1)=\frac{1}{2}$. Las órbitas vienen dadas por:

$$\frac{v^2}{2}+V(x)=C\to\ v=\pm\sqrt{x^4-2x^2+2C}\,.$$



Con las técnicas generales de mapas de fases:

$$\begin{cases}x'=v\\ v'=2x^3-2x\end{cases}\to \text{puntos críticos } \binom{0}{0},\ \binom{\pm1}{0},\ \text{con } \lambda=\pm i\sqrt{2}\,,\ \lambda=\pm2\,.$$

$\binom{0}{0}$ es centro (simetrías o exactitud) y los vectores de las sillas son $\binom{1}{\lambda}$.

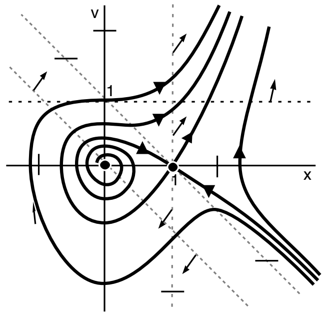
La pendiente es vertical si $v=0$ (en toda ecuación) y es horizontal si $x=0,\pm1$ (rectas por los puntos).

Las separatrices son las órbitas que pasan por $(\pm1,0)\ \to\ C=\frac{1}{2}$ $\to\ v=\pm(1-x^2)$, parábolas que cortan el eje v en ±1.

Por los cálculos anteriores y el mapa está claro que es periódica si $|b|<1$.

La órbita asociada a esos datos es $v=1-x^2=x'$ y la solución de esta autónoma con $x(0)=0$ es $\boxed{x=\operatorname{th}t}$.

4.16 $\boxed{x''+x+ax^2+bxx'=0}$ $\begin{cases}x'=v\\ v'=-x-ax^2-bxv\end{cases}$; $\binom{0}{0}\to\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ centro de la AL.



Centro seguro si $a=b=0$ lineal; si $b=0$ exacta (y simetría respecto a $v=0$); si $a=0$ simetría respecto a $x=0$. Si $a,b\neq0$ no sabemos. Polares no informan.

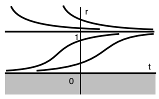
$\begin{cases}x'=v\\ v'=-x+x^2+xv\end{cases}$; $\binom{0}{0}$ centro o foco, $\binom{1}{0}\to\lambda_\pm=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\approx1.6,\text{–}0.6$, silla. $\mathbf{v}=\binom{1}{\lambda_\pm}$.

Horizontal: $x=0$, $v=1-x$. $\mathbf{v}(1,v)=\binom{v}{v}$, $\mathbf{v}(x,1)=\binom{1}{x^2}$, $\mathbf{v}(x,-x)=\binom{x}{-x}$.

Polares: $\begin{cases}r'=r^2(c+s)cs\\ \theta'=-1+r(c+s)c^2\end{cases}\Rightarrow r$ crece si $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{4},\pi)\cup(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4})$.

El dibujo sugiere que el origen, y por tanto $x=0$, es (foco) inestable.

4.17 a) $\boxed{\begin{aligned}x'&=y+x(1-x^2-y^2)\\ y'&=-x+y(1-x^2-y^2)\end{aligned}}$ $\binom{0}{0}$ focol. $\begin{cases}r'=r(1-r^2)\\ \theta'=-1\end{cases}$



Si $t\to\infty$, las órbitas tienden a $r=1$ girando como reloj. $r=1$ es ciclo límite.

b) $\boxed{\begin{aligned}x'&=-2x\\ y'&=x^2+y^2-2y\end{aligned}}$ Puntos críticos: $\binom{0}{0}$ y $\binom{0}{2}$. $\begin{pmatrix}-2&0\\2x&2y-2\end{pmatrix}$ $0\nearrow$ $\lambda=-2$ doble **M** diagonal $\to$ nodo estelar I. $2\searrow$ $\lambda=\pm2$ con $\binom{0}{1}$ y $\binom{1}{0}$ $\to$ silla.

Campo horizontal: $x^2+(y-1)^2=1$ (circunferencia). Vertical: $x=0$ (órbita). $\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}(x,2)=\binom{-2x}{x^2}$ (la separatriz estable se deforma). $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{2x}-\frac{x}{2}$ (Riccati sin y_p sencilla).

$$\begin{cases}r'=-2c^2r-2s^2r+sr^2=r(r\operatorname{sen}\theta-2)\\ \theta'=\frac{1}{r}[cr^2-2csr+2csr]=r\cos\theta\end{cases}\to\ \frac{dr}{d\theta}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}r-\frac{2}{\cos\theta}\ \to\ r=\frac{K}{\cos\theta}-\frac{2\theta}{\cos\theta}\,,\ x=K-2\arctan\frac{y}{x}\,,\ \boxed{y=x\tan\frac{K-x}{2}}$$

Del sistema en polares deducimos que: r crece si $y>2$; θ crece si $x>0$. Y de la expresión recuadrada:
Todas las órbitas tienen asíntotas verticales y es $y(0)=0$ excepto si $K=\pi$ pues entonces:

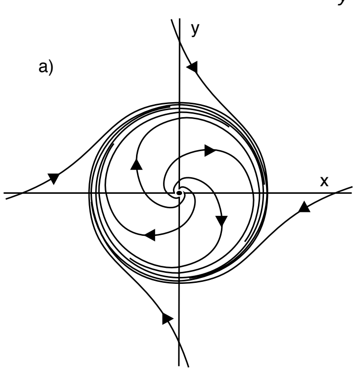
$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\cos\frac{\pi-x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi-x}{2}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2}{\operatorname{sen}\frac{\pi-x}{2}}\cdot1=2\to$$ la separatriz estable es $y=x\tan\frac{\pi-x}{2}$ [corta el eje en $x=\pm\pi$ y sus asíntotas son $x=\pm2\pi$].

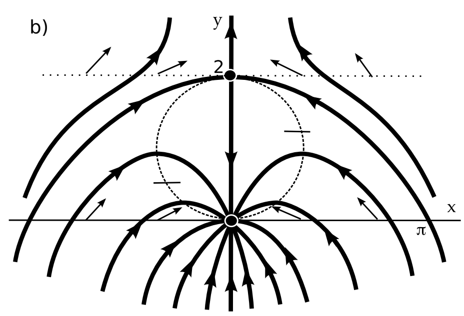
Sorprendentemente salen sencillos los puntos de inflexión: $\frac{d^2y}{dx^2}=\cdots=\frac{(y-2)(x^2+y^2)}{2x^2}\to y=2$.

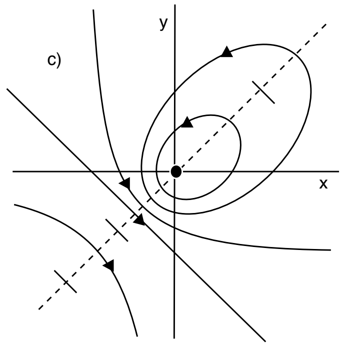
c) $\boxed{\begin{aligned}x'&=x^2-xy-2y\\ y'&=xy-y^2+2x\end{aligned}}$ $\binom{0}{0}$ centro de la AL $\begin{cases}r'=r^2(c-s)\\ \theta'=2\end{cases}$, $\frac{dr}{d\theta}=\frac{r^2(c-s)}{2}\to r=\frac{2}{c-\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$, $C\sqrt{x^2+y^2}=2+x+y$.

El centro se conserva: Las órbitas son cónicas: $C^2(x^2+y^2)=(2+x+y)^2$. Las órbitas son simétricas respecto a $y=x$. r depende periódicamente de θ .
r crece si $y<x$. θ siempre crece.

$C=0\to$ órbita recta. H: $x=\frac{y^2}{y+2}$. V: $y=\frac{x^2}{x+2}$. $\mathbf{v}(x,0)=\binom{x^2}{2x}$, $\mathbf{v}(0,y)=\binom{-2y}{y^2}$, $\mathbf{v}(x,x)=\binom{-2x}{2x}$.







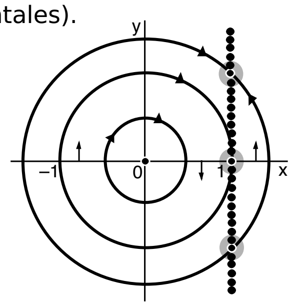
4.18 a) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x \\ y'=x^2-y \end{array}}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \to$ $\lambda=\pm 1 \to$ **Inestable** (silla).

b) $\boxed{\begin{array}{l} x'=y+x^3+xy^2 \\ y'=-x+x^2y+y^3 \end{array}}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ centro de la AL . Polares: $\begin{cases} r'=r^3 \\ \theta'=-1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Inestable** (focol del no lineal).

c) $\boxed{\begin{array}{l} x'=x^2-y \\ y'=x\,e^y \end{array}}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ centro de AL. $\begin{array}{l} f(-x,y)=x^2-y=f(x,y) \\ g(-x,y)=-xe^y=-g(x,y) \end{array}$ $\Rightarrow$ Centro también del no lineal. Origen **EnoA**.

4.19 $\boxed{\begin{array}{l} x'=y-xy \\ y'=x^2-x \end{array}}$ $\begin{array}{l} =y(1-x) \\ =-x(1-x) \end{array}$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ centro de AL. $x=1$ recta de puntos críticos (no elementales).

Órbitas: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \to x^2+y^2=C$. $\mathbf{v}(x,0)=\begin{pmatrix}0\\x(x-1)\end{pmatrix}$.



$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es estable no A. $\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$, $y\leq 0$ son inestables. $\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$, $y\geq 0$ son estables no A.

Son periódicas las soluciones asociadas a las circunferencias de radio $a<1$.

$y=\pm\sqrt{a^2-x^2} \to x'=\pm(1-x)\sqrt{a^2-x^2}=\frac{dx}{dt}$, $T_a=2\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(1-x)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.

[Cuando $a\to 0$ el periodo T_a tiende al de la AL y si $a\to 1$ tiende a ∞].