

## 2.6. sistemas autónomos de segundo orden

Estudiamos sistemas de la forma

$$(1) \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad X' = F(X) \quad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

que incluyen en particular las ecuaciones de segundo orden

$$x'' = g(x, x'), \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

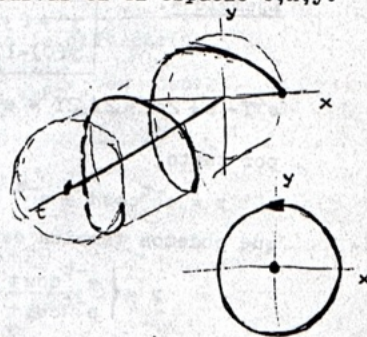
Suponemos que  $f$  y  $g$  son continuas y con derivadas continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ . Los siguientes resultados, semejantes a los vistos para ecuaciones autónomas de primer orden, se prueban fácilmente:

**Teor 1.** Dados  $(t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})$  existe una única solución  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  de (1) tal que  $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .  
Si  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  es tal que  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$  entonces  $X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  es solución de (1) (solución constante o de equilibrio).  
Sea  $X(t)$  solución de (1) y sea  $C \in \mathbb{R}$ ; entonces  $Z(t) = X(t+C)$  es también solución de (1)

Nuestra intención es encontrar información sobre las soluciones de (1) (no lineal en general y por tanto no resoluble). Esta información la obtendremos a partir de su representación aproximada.

Las soluciones de (1) representan curvas en el espacio  $t, x, y$ .

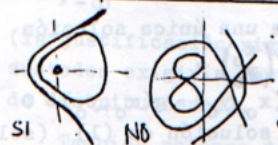
Por ejemplo las soluciones de  $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$  que satisfacen  $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ) y  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ( $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ) están representadas en el dibujo. Sin embargo para los sistemas autónomos es preferible dibujar solo la proyección sobre el plano  $xy$  (plano de fases). La proyección de una curva solución sobre el plano de fases se llama órbita de esa solución (la órbita de las soluciones anteriores son el punto y la circunferencia del dibujo inferior). Si  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  es solución está claro que  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  son ecuaciones paramétricas de la órbita correspondiente y que  $\begin{cases} x = x(t+C) \\ y = y(t+C) \end{cases}$  son otras ecuaciones paramétricas de la misma órbita. Si imaginamos una órbita como la trayectoria de un punto  $P$  cuya posición en el instante  $t$  está dada por  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  la



segunda parametrización corresponde a otro punto cuyo movimiento es igual al de  $P$  pero que alcanza la misma posición en instantes distintos. Así pues, para estos sistemas autónomos la órbita que pasa por  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  es independiente del instante  $t_0$  en que empezamos a contar el tiempo. Observemos que a cada órbita podemos asignarle un sentido: el correspondiente al aumento de  $t$ .

Basándose en la unicidad y en lo visto hasta ahora no es difícil probar:

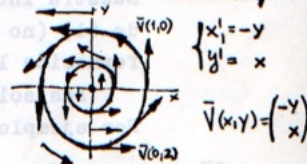
**Teor 2.** Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita que puede ser un punto, una curva simple cerrada o un arco simple (que corresponde a una solución constante, periódica o no periódica respectivamente).



Queremos representar los más aproximadamente posible el conjunto de las órbitas de (1) en el plano de fases (mapa de fases), basándonos en el estudio de  $f$  y  $g$  ya que normalmente no podremos resolver el sistema. Un

primer camino, generalización de la idea de campo de direcciones, se basa en la imagen dada anteriormente del punto móvil  $P$ . Dibujemos en cada punto del plano  $x, y$  el vector  $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ .

El vector velocidad del imaginario punto móvil  $P$  en cada instante  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  coincide con  $\vec{V}(x, y)$ . Las órbitas serán por tanto en cada punto tangentes a  $\vec{V}$ . Esto nos permite hacer una primera aproximación al mapa de fases.



Sin embargo la mejor información que vamos a obtener de un sistema autónomo va a ser (como ocurría en las de primer orden) el conocimiento de las órbitas en las proximidades de los puntos correspondientes a las soluciones de equilibrio (puntos singulares del mapa de fases). Además esto es lo que más suele interesar físicamente.

A partir de ahora supondremos que  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es un punto singular de (1). Esto no representa ninguna pérdida de generalidad ya que si  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  es punto singular de (1) el cambio  $\begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \end{cases} (*)$  transforma el sistema en otro para el que el origen es punto singular.

Dada la existencia de derivadas parciales continuas de  $f$  y  $g$  podemos escribir:

$$\begin{cases} x' = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + R_f(x,y) = ax + by + R_f \\ y' = g_x(0,0)x + g_y(0,0)y + R_g(x,y) = cx + dy + R_g \end{cases} \quad \text{con } R_f, R_g = o(r) \\ \text{si } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$



(desarrollando en las variables  $u, v$  tras realizar el cambio  $(*)$ ) 53  
obtendríamos:

$$\begin{cases} u' = f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + R_f(u, v) \\ v' = g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + R_g(u, v) \end{cases}$$

En la práctica será más cómodo calcular solamente estas derivadas primeras de  $f$  y  $g$  en  $(x_0, y_0)$  y no realizar explícitamente  $(*)$ . Supondremos que el origen es punto singular aislado de (1) (existe un entorno suyo en que no hay otros puntos singulares) y que  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ . Diremos entonces que tenemos un punto singular elemental de (1) (son los de mayor interés).

Como en las cercanías de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  los términos  $R_f$  y  $R_g$  son pequeños es razonable esperar que las órbitas de (1) en un entorno del origen sean semejantes a las del sistema lineal homogéneo

$$(2) \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{es decir } X' = AX \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

De hecho así sucede en la mayoría de los casos (no en todos). Vamos, por tanto, a clasificar los sistemas lineales según la geometría de sus órbitas. Después sacaremos conclusiones sobre los sistemas no lineales (esta técnica de sacar conclusiones sobre una ecuación a partir del estudio de su aproximación lineal se utiliza en muchos otros problemas; es la técnica de la linealización).

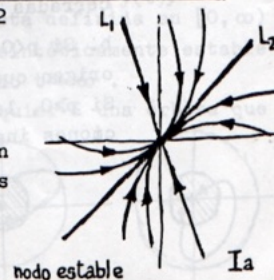
Como  $|A| \neq 0$  tenemos que el origen es el único punto singular de (2). Además sabemos que  $\lambda = 0$  no es autovalor de  $A$ . Clasificamos los puntos singulares de (2) según los autovalores de  $A$  en los siguientes tipos:

- I.  $A$  tiene valores propios reales y distintos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .
  - a.  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen el mismo signo (nodo)
  - b.  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen signos contrarios (punto silla)
- II.  $A$  tiene valor propio doble.
  - a.  $A$  es diagonal (nodo estelar)
  - b.  $A$  no es diagonal (nodo de una tangente)
- III.  $A$  tiene valores propios complejos  $p \pm iq$ .
  - a.  $p = 0$  (centro)
  - b.  $p \neq 0$  (foco)

Basándonos en el teorema 4 de la sección 2.2 vamos a dibujar el mapa de fases correspondiente a cada uno de los tipos anteriores:

I. La solución general es

$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \bar{v}_2$  donde  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$  son vectores propios asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  (podemos considerarlos unitarios).



El vector unitario tangente a la órbita

$$\frac{X'(t)}{\|X'(t)\|} = \frac{\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{v}_1 + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \bar{v}_2}{\sqrt{C_1^2 \lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} + C_2^2 \lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t} + 2\lambda_1 \lambda_2 C_1 C_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \cos \alpha}}$$

a. Sea  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Entonces este vector tangente tiende hacia  $\bar{v}_2$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (si  $C_2 \neq 0$ ). Si  $C_2 = 0$ ,  $X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{v}_1$  tiende a 0 sobre  $L_1$  (recta que contiene a  $\bar{v}_1$ ) cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ , las órbitas tienden hacia el origen cuando  $t \rightarrow -\infty$  y se comprueba que el vector unitario tangente tiende a coincidir con  $\bar{v}_1$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  (salvo si  $C_1 = 0$ ).

b.  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Si  $C_1 = 0$  la órbita correspondiente es  $L_2$  y la solución se aleja del origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $C_2 = 0$  se acerca sobre  $L_1$ . Las demás se aproximan asintóticamente a  $L_2$  o  $L_1$  según  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ .

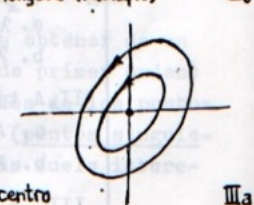
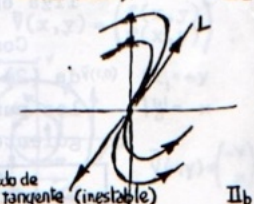
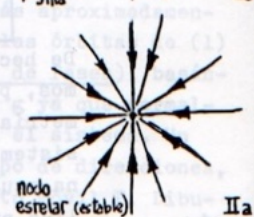
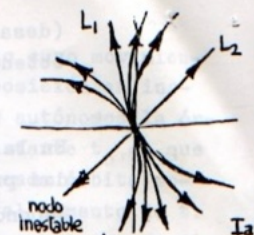
II.a. Solución general  $X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$ ; para cada  $C_1, C_2$  nos acercamos al origen según una recta diferente si  $\lambda < 0$ . Si  $\lambda > 0$  nos alejamos.

b. Solución  $X(t) = (C_1 \bar{v} + (C_1 t + C_2) \bar{v}) e^{\lambda t}$  con  $\bar{v}$  vector propio asociado a  $\lambda$ . Si  $C_1 = 0$  estamos sobre la recta  $L$  que contiene a  $\bar{v}$ . Se comprueba además que todas las demás órbitas son tangentes en el origen a  $L$ . El origen es estable o inestable según  $\lambda$  es menor o mayor que 0.

III. La solución general es de la forma  $X(t) = e^{pt} \begin{pmatrix} C_1 \cos qt + C_2 \sin qt \\ C_3 \cos qt + C_4 \sin qt \end{pmatrix}$  donde  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  son constantes de las cuales sólo dos son arbitrarias.

a. Si  $p = 0$ , las soluciones son periódicas y las órbitas correspondientes son curvas cerradas que rodean el origen.

b. Si  $p < 0$ , las curvas se cierran hacia el origen cuando  $t \rightarrow \infty$ : espirales estables. Si  $p > 0$ , las espirales corresponden a soluciones inestables.





A partir de esta clasificación se puede afirmar lo siguiente para el sistema (1) inicial:

**Teor 3.** Si  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es un nodo, un punto silla o un foco del sistema lineal (2) entonces  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  también es un punto singular del mismo tipo del sistema no lineal (1) (con el mismo carácter de estabilidad). Si  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es un centro de (2) entonces  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  puede ser un centro o un foco de (1). Si  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es un nodo estelar o de una tangente de (2) y  $f$  y  $g$  tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, entonces  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sigue siendo un nodo del mismo tipo de (1) con el mismo carácter de estabilidad (sin la regularidad de  $f$  y  $g$  podría ser un foco o un nodo de otro tipo).

Por tanto, salvo en el caso del centro, analizando la aproximación lineal podemos decir cual es la forma aproximada del mapa de fases en las cercanías del origen del sistema no lineal (lejos del origen las órbitas pueden ser totalmente diferentes). La demostración del teorema es complicada. Damos solamente una justificación intuitiva: una pequeña perturbación de los autovalores puede apartarlos del eje imaginario o puede separar dos autovalores (si  $f$  y  $g$  son regulares esto no sucede); pero esa perturbación pequeña mantendrá alejado del eje imaginario un autovalor y mantendrá separados autovalores distintos.



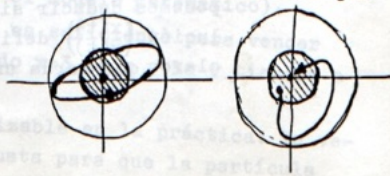
Extraigamos del teorema anterior lo relativo a estabilidad:

**Teor 4.** Si los valores propios de  $A$  tienen partes reales negativas el origen es un punto singular asintóticamente estable del sistema no lineal (1). Si alguno de los valores propios tiene parte real positiva, el origen es inestable.

(generalización del  $f'(a) < 0$  asintóticamente estable,  $f'(a) > 0$  inestable de las autónomas de primer orden).

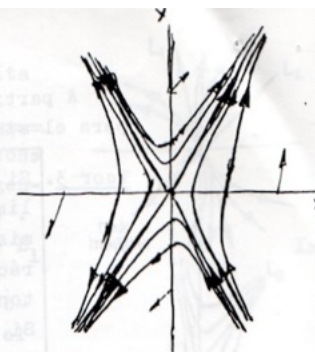
Observemos el significado geométrico de la estabilidad en el mapa de fases:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es estable si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  es una solución de (1) con  $\| \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \| < \delta$  entonces está definida en  $[0, \infty)$  y satisface  $\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \| < \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ . Es asintóticamente estable si además esta última norma tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ .

El significado geométrico: si para cualquier  $\epsilon$  una órbita que parte suficientemente cerca de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  no se sale del círculo de radio  $\epsilon$  hay estabilidad. Si además la órbita se acerca al origen cuando  $t \rightarrow \infty$  hay estabilidad asintótica.



**Ejemplo 1.**  $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$   $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$  punto silla

Los vectores propios: asociado a  $1 + \sqrt{3}$  está  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; a  $1 - \sqrt{3}$  lo está  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Para precisar damos algunos valores al campo  $\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+y \end{pmatrix}$ ;  $\bar{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}$ ;  $\bar{v}(0, y) = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ . Con estos datos tenemos el mapa de fases del dibujo.



**Ejemplo 2.**  $\begin{cases} x' = -x - y + xy + 1 \\ y' = -2x + xy \end{cases}$

Buscamos los puntos singulares;

para ello debe ser  $\begin{cases} -x - y + xy + 1 = 0 \\ -2x + xy = 0 \end{cases}$ ; de la segunda ecuación obtenemos  $x=0$  o  $y=2$ ; para estos valores obtenemos  $y=1$  y  $x=1$  respectivamente en la primera. Por tanto los dos puntos singulares son  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Para  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  el cambio  $\begin{cases} x=u \\ y=v+1 \end{cases}$  convierte

el sistema en  $\begin{cases} u' = -u+uv \\ v' = -u+uv \end{cases}$  para el que

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es punto singular. Para la aproximación lineal  $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = \pm i$  el origen es un punto silla; también lo es  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en nuestro sistema. Un vector propio asociado a  $i$  es  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; uno asociado a  $-i$  es  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Esto significa que las órbitas que llegan a  $y$  y parten de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  serán tangentes a las rectas que contienen a esos vectores.

Para  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  hacemos  $\begin{cases} x=u+1 \\ y=v+2 \end{cases}$  y queda  $\begin{cases} u' = u+uv \\ v' = v+uv \end{cases}$ ; linealizando:

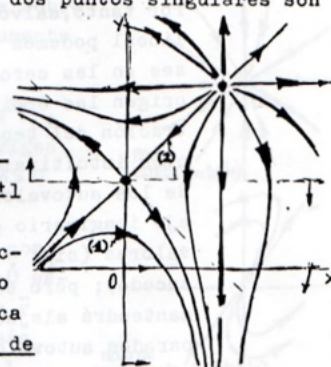
$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , nodo estelar inestable.

Demos además algunos valores al campo  $\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -x-y+xy+1 \\ -2x+xy \end{pmatrix}$

$\bar{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 1-x \\ -2x \end{pmatrix}$ ;  $\bar{v}(x, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}$ ;  $\bar{v}(x, 2) = \begin{pmatrix} x-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\bar{v}(0, y) = \begin{pmatrix} 1-y \\ y \end{pmatrix}$ ;  $\bar{v}(1, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y-2 \end{pmatrix}$

Algunos de estos vectores los dibujamos. Observamos que las rectas  $y=2$  y  $x=1$  son órbitas del sistema pues son tangentes al campo  $\bar{v}$ .

Con toda esta información está claro que el mapa de fases es más o menos el del dibujo. No sabemos resolver el sistema, pero tenemos a la vista las propiedades esenciales de las soluciones. No olvidemos que las órbitas sólo son proyecciones. Del dibujo no podemos deducir si una órbita como (1) corresponde o no a una solución  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  definida para todo  $t$  (para (2), sin embargo, sí está claro que tarda un tiempo infinito en ser recorrida).





Especial interés tiene el mapa de fases para el estudio de la ecuación  $(3) \quad \ddot{x} = g(x, \dot{x})$ ; es decir  $\begin{cases} \dot{x}' = v \\ \dot{v}' = g(x, v) \end{cases}$ .

En este caso  $v$  puede representar una velocidad (por eso hemos escrito  $v$  en vez de  $y$ ). La interpretación física de las órbitas tiene ahora un sentido más claro.

A la vista del campo  $\vec{V}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ g(x, v) \end{pmatrix}$  está claro que las órbitas se dirigen hacia la derecha en el semiplano superior y hacia la izquierda en el inferior. Las órbitas que corten el eje  $v=0$  lo harán perpendicularmente. También está claro que todos los puntos singulares están sobre el eje  $v=0$ .

Observemos además que podemos encontrar la ecuación de las órbitas de (3) si podemos resolver  $(4) \quad \frac{dv}{dx} \cdot v = g(x, v)$  (sección 2.1)

**Ejemplo 3.**  $\ddot{x} = x^2 - 3x - 2\dot{x}$

Puede describir el movimiento de un punto sobre el eje de las  $x$ , sometido a una fuerza que sólo depende de su posición ( $F(x) = x^2 - 3x$ ) y con un rozamiento proporcional a su velocidad ( $-2\dot{x}$ ). Dibujemos e interpretemos físicamente su mapa de fases:

$\begin{cases} \dot{x}' = v \\ \dot{v}' = x^2 - 3x - 2v \end{cases}$ ; dos puntos singulares: el origen, foco estable, y el p.silla  $(3, 0)$  con  $\lambda = 1, -3$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  vectores propios.

$\vec{V}(0, v) = \vec{V}(3, v) = v \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{V}(x, 0) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 - 3x \end{pmatrix}$

$\vec{V}(x, x-3) = (x-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{V}(x, 9-3x) = (x-3) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; la segunda componente de  $\vec{V}$  se anula sobre la parábola  $v = \frac{x^2 - 3x}{2}$

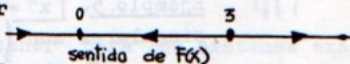
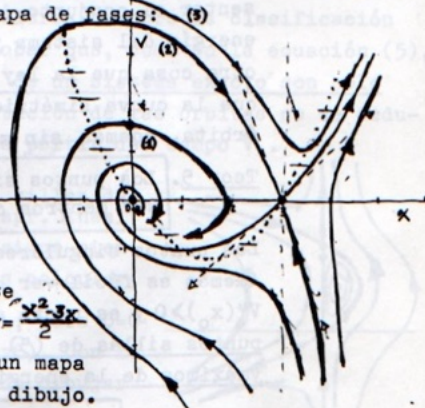
Los datos anteriores conducen a un mapa de fases más o menos como el del dibujo.

Las órbitas más fáciles de interpretar son  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ , que corresponden a dos posiciones de equilibrio, la segunda de ellas inestable.

Interpretemos (1): la partícula parte del origen con una velocidad positiva; esta velocidad decrece (debido a  $F(x)$ ) hasta hacerse cero; a partir de entonces viaja hacia la izquierda, cruza el origen, se para y vuelve a 0 con  $v$  positiva pero mucho más pequeña que la inicial (amortiguamiento debido al rozamiento); y así continúa indefinidamente (según el modelo matemático).

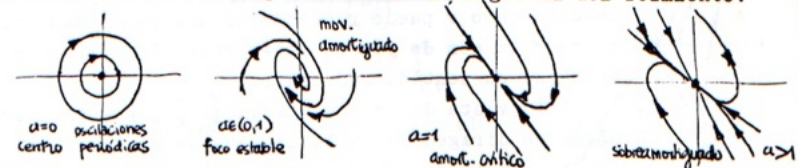
La órbita (3): la velocidad inicial es suficiente para vencer la oposición de  $F(x)$ ; una vez cruzado  $x=3$  la  $x$  y la  $v$  tienden a infinito (¿en tiempo infinito?).

(2) representaría una órbita irrealizable en la práctica: la velocidad inicial es exactamente la justa para que la partícula avance indefinidamente hacia  $x=3$ .



**Ejemplo 4.**  $\ddot{x} + 2a\dot{x} + x = 0, a \geq 0$ . Sistema muelle-masa.

Es lineal y podríamos resolverlo, pero nos limitamos al mapa de fases.  $\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ . Dependiendo de la magnitud del rozamiento:



Todas las órbitas son fáciles de interpretar y coinciden con lo ya conocido.

Un caso especial de (3) en que se obtiene gran información sobre el mapa de fases es  $(5) \quad \ddot{x} = g(x)$  (sistemas conservativos, sin rozamiento)

La ecuación (4) se convierte aquí en  $\frac{dv}{dx} v = g(x)$ , así que  $\frac{v^2}{2} - \int g(x) dx = C$  es la ecuación de las órbitas. Llamemos  $V(x) = -\int g(x) dx$  y  $H(x, v) = \frac{v^2}{2} + V(x)$ . Se trata pues de representar el conjunto de curvas  $H(x, v) = C$  (si consideramos  $H$  como la energía del sistema y  $V$  la potencial esta última igualdad no es otra cosa que la ley de conservación de la energía). Observemos que la curva simétrica respecto del eje  $x$  de una órbita es otra órbita. Además sin más que escribir la aproximación lineal se ve:

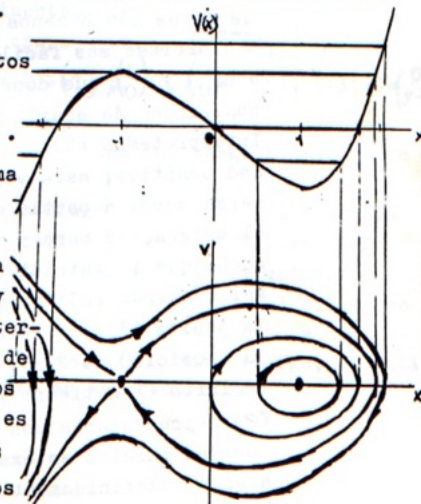
**Teor. 5.** Los puntos singulares elementales de (5) sólo pueden ser centros o puntos silla.

Los puntos singulares son aquellos del eje  $x$  en que  $g(x_0) = -V'(x_0) = 0$ . Además es fácil ver que  $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es centro de la aproximación lineal si  $V''(x_0) > 0$  y es punto silla si  $V''(x_0) < 0$ . Por tanto: los centros y puntos sillan de (5) corresponden respectivamente a los mínimos y máximos de la energía potencial.

**Ejemplo 5.**  $\ddot{x} = 1 - x^2$ ; los puntos singulares son  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$H(x, v) = \frac{v^2}{2} - x + \frac{x^3}{3}$ ;  $V(x) = -x + \frac{x^3}{3}$ .

Veamos que para encontrar la forma aproximada de  $H(x, v) = C$  nos basta conocer la gráfica de  $V(x)$ . Para cada  $C$  la órbita  $\frac{v^2}{2} + V(x) = C$  corta  $v=0$  en los puntos en que  $V(x) = C$  y la curva está definida en los intervalos en que  $V = C$  está por encima de la gráfica de  $V(x)$ . Además sabemos que  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  es punto silla y que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  es centro. Las soluciones periódicas corresponden a los segmentos cuyos extremos no son máximos.





La ecuación (5) es un caso particular de los sistemas exactos cuyas órbitas son también las curvas de nivel de una función  $H$ .

Un sistema del tipo (1) es exacto si  $f_x + g_y = 0$

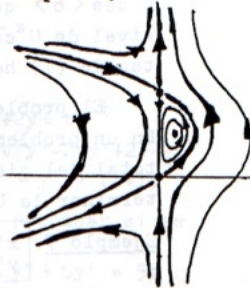
Teor 6. Si (1) es exacto existe  $H$  tal que  $H_y = f$  y  $H_x = -g$ . Las órbitas de (1) vienen dadas por  $H(x,y) = C$ .

Como  $(-g)_y = f_x$  el campo  $(-g, f)$  es gradiente de algún campo escalar  $H$ , es decir, existe  $H$  tal que  $H_x = -g$  y  $H_y = f$ . Además, si  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  es solución de (1):

$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = H_x(x,y)x' + H_y(x,y)y' = -g(x,y)f(x,y) + f(x,y)g(x,y) = 0$  así que  $H$  es constante sobre las soluciones de (1) lo que evidentemente es una condición necesaria y suficiente para que las órbitas de (1) sean las curvas de nivel de  $H$ .

El cálculo de  $H$  se realiza como en las ecuaciones exactas de primer orden. Aunque en general el dibujo de las curvas  $H(x,y) = C$  es complicado el conocimiento de  $H$  siempre nos puede dar información sobre algunas órbitas particulares o sobre la clasificación de puntos singulares. Se puede probar que, como en la ecuación (5), los puntos singulares elementales de un sistema exacto son sólo centros o puntos sillar. La orientación de las órbitas no se deduce de  $H$  pero se tiene fácilmente a partir del campo  $\vec{V}$ .

Ejemplo 6.  $\begin{cases} x' = x - 2xy \\ y' = x - y + y^2 \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  son sillar de la apr. lineal  $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  es centro; como  $f_x + g_y = 0$  lo sigue siendo en la no lineal; además podemos calcular las órbitas  $H(x,y) = xy - xy^2 - \frac{x^2}{2} = C$ ; para  $C=0$  tenemos dos órbitas  $x=0$  y  $x=2(y-y^2)$ . Con lo anterior y un estudio de  $\vec{V}$  se puede dibujar ya, más o menos, el mapa de fases.



Las órbitas de (1) que podemos obtener para los sistemas exactos o para la ecuación (3) (si resolvemos (4)) se pueden buscar también en el caso general: eliminando formalmente  $dt$  del sistema (1) obtenemos la ecuación de primer orden (6)  $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$  cuyas curvas integrales (si podemos resolver) son las órbitas de (1); aunque (6) no sea resoluble podemos utilizar los métodos de la sección 1.2 para dibujar aproximadamente sus curvas integrales.

(recíprocamente, una ecuación como (6) se puede mirar como un sistema y utilizar las ideas de esta sección para dibujar sus curvas integrales).

Acabamos la sección con el método directo de Lyapunov (aplicable a situaciones más generales) que nos permitirá en ocasiones determinar la estabilidad de puntos singulares para los que la aproximación lineal no decide (centros o puntos con  $|A|=0$ ).

Supondremos que el origen es punto singular aislado de (1) y sea  $D$  un conjunto que lo contiene en su interior.

Decimos que una función  $U(x,y)$  es definida positiva en  $D$  si  $U(0,0)=0$  y  $U(x,y)>0$  para cualquier otro punto de  $D$ . Si sustituimos  $>$  por  $<$  ó  $\leq$  la  $U$  se dice definida negativa o semidefinida negativa, respectivamente. Por ejemplo,  $U(x,y) = x^2 + 2y^2$  es definida positiva y  $U(x,y) = -(x-y)^2$  semidefinida negativa en todo  $\mathbb{R}^2$ .



Dado un sistema (1) y una  $U$  de  $C^1$  denotaremos

$$\dot{U}(x,y) = U_x(x,y)f(x,y) + U_y(x,y)g(x,y)$$

Teor 7. Dado (1), si existen un conjunto  $D$  y una función  $U$  de  $C^1$  definida positiva en  $D$  tal que  $\dot{U}$  es definida negativa, semidefinida negativa o definida positiva en  $D$  entonces el origen es, respectivamente, asintóticamente estable, estable o inestable. A  $U$  se le llama función de Lyapunov.

Idea de la demostración: como  $\dot{U} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} U$  el hecho de que  $\dot{U} \leq 0$  que  $0$  en  $D$  implica que todas las curvas de nivel de  $U$  contenidas en  $D$  son cruzadas por las órbitas de (1) hacia dentro o hacia fuera.



El problema básico de este método es encontrar una  $U$  adecuada. En un problema físico se puede intentar probar como  $U$  la energía total del sistema. Pero en otras ocasiones deberemos intentar determinar la  $U$  mediante tanteos.

Ejemplo 7.  $\begin{cases} x' = y + x^3 - xy^2 \\ y' = -x + y^3 \end{cases}$  El origen es un centro de la aproximación lineal. La  $U$  más sencilla es  $U(x,y) = x^2 + y^2$ . Para ella  $\dot{U}(x,y) = 2x(y + x^3 - xy^2) + 2y(-x + y^3) = 2(x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2$  que es definida positiva en  $\mathbb{R}^2$ . El origen es foco inestable.

Ejemplo 8.  $x'' + x' + x^3 = 0$  El origen no es elemental. Podemos interpretar la ecuación como el movimiento con rozamiento de un punto sobre el eje  $x$  sometido a una fuerza  $-x^3$ . Esto nos hace suponer que el origen es asintóticamente estable y nos sugiere probar  $U = \frac{v^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ . Entonces  $\dot{U} = x^3v + v(-v - x^3) = -v^2$  semidefinida negativa. Es estable. Para la estabilidad asintótica necesitamos otra  $U$ . Tanteando, obtenemos  $U = 2(x+v)^2 + x^4 + v^4$ , para la que  $\dot{U} = -4x^4 - 4v^4 - 4x^3v^3$ , definida negativa en un entorno del origen (los términos de orden 6 son despreciables respecto a los de orden 4 cerca del origen).