

INTRODUCCIÓN

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparece una función incógnita y alguna de sus derivadas. En física surgen continuamente:

Demagnetización inductiva: velocidad proporcional a la cantidad de magnetización existente en cada instante t : (1) $\frac{dm(t)}{dt} = -k m(t)$ (k constante > 0)

O el muelle:  con fuerzas externas y rozamiento $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = F(t)$

O la ecuación de ondas unidimensional (cuerda vibrante)  $\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = F(t,x)$

Las dos primeras son ecuaciones diferenciales ordinarias (la función incógnita es de una variable). La tercera es ecuación en derivadas parciales.

Se llama orden de una ecuación al grado más alto de las derivadas de la función desconocida que aparece en la ecuación:

$f''(x) + \cos^3 f(x) = x^5$ es de segundo orden.

Solución de una ecuación es una función que al ser sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

$m(t) = e^{-kt}$ es solución de la primera ecuación: $\frac{dm(t)}{dt} = -k e^{-kt} = -k m(t) = -k m(t)$.

Consideremos una ecuación ordinaria de primer orden $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$. Un primer problema que se plantea es buscar sus soluciones. En general, existen infinitas soluciones de esta ecuación de este tipo. Cualquier función $m(t) = C e^{-kt}$ con C constante es solución de nuestra ecuación (1). Si queremos saber cuánta materia existe en cualquier instante necesitamos saber la que existía en el instante t_0 , por ejemplo: $m(0) = m_0$. Entonces $m(0) = m_0 = C e^0 = C$. Entonces ya tenemos una solución perfectamente definida.

En general:

Solución general de una ED es una expresión que recoge todas las soluciones de la ED.

(2) $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t))$ es un problema de valores iniciales. La solución que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$ se llama solución particular.

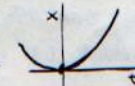
En general, la solución general de una ecuación de orden n $\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) = 0$ contiene n constantes y se precisas n condiciones iniciales para determinar una solución particular.

¿Cómo buscar las soluciones de una ED? Solo para unos pocos tipos de ecuaciones muy particulares es posible obtener explícitamente las soluciones. Por eso gran parte de la teoría de ED está dedicada a la búsqueda de información sobre las soluciones sin resolver la ecuación.

Un primer camino es el cálculo aproximado. Con ayuda de ordenadores es posi-

ble encontrar la solución exacta de una ecuación y unicidad de soluciones. Para la ecuación (1) había una única solución si fijásemos la condición inicial. En general esto no es cierto. $\begin{cases} (x'(t))^2 + x(t) + 1 = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ no tiene solución.

$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^{3/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ tiene dos soluciones $x(t) = 0$ y $x(t) = \frac{t^3}{24}$.



Hay terrenos que nos precisan según las propiedades de la f : el problema (2) tiene solución y caso de tenerla, si es única. El problema para abordar estos problemas (y otros otros en ED) es convertirlo en un problema de análisis funcional y utilizar entonces herramientas de análisis funcional para sacar conclusiones sobre la ecuación. Se plantea el estudio de puntos fijos en que no haya existencia o unicidad.

Otros problemas: ¿qué ocurre con las soluciones cuando $t \rightarrow \infty$? ¿van a tender a cero? ¿se acotan o no? Son problemas de propiedades de funciones, de estabilidad. O también: ¿existen soluciones periódicas? Sobre todo ello se puede decir algo sin necesidad de resolver la ecuación.

~~El problema de encontrar explícitamente las soluciones es para una ecuación de orden n aún más difícil que para una de primer orden.~~

El problema de encontrar explícitamente las soluciones es para una ecuación de orden n aún más difícil que para una de primer orden. Pídicamente solo existe una teoría acabada para las ecuaciones lineales de coeficientes constantes:

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t)$$

Una solución semejante se da para los sistemas de ecuaciones. Se pueden atacar los.

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad \text{o en notación matricial } \dot{x} = Ax + f(t)$$

La resolución utiliza teoría de matrices o bien la transformada de Laplace.

Para estas ecuaciones más complicadas se generalizan los terrenos sobre existencia, unicidad, de las de primer orden.

Otro camino para atacar una ecuación es descomponiendo las funciones en serie identificando coeficientes y considerando los problemas de convergencia.

Otro tipo de problemas son los de condiciones de contorno: por ejemplo $\begin{cases} x''(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$ las condiciones se dan en dos puntos diferentes. Los terrenos sobre existencia y los métodos de atacar son diferentes.

Con técnicas de ecuaciones diferenciales se estudia el cálculo variacional, del que venimos una introducción en el curso. Se trata de encontrar los valores máximos de un funcional (asigna a cada función un número). El ejemplo clásico (casi el origen) del cálculo en variaciones es buscar qué camino y qué punto material se desliza desde A hasta B en un tiempo mínimo (la braquistócrona).



1.1 La ecuación $x' = f(t, x)$: MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

Consideremos ecuaciones de primer orden que la x' se puede despejar: $x' = f(t, x)$. Estudiaremos los métodos de encontrar las soluciones para unos tipos particulares de ecuaciones. No entraremos en los problemas de existencia o unicidad todavía. La solución general dependerá de una constante y será necesaria una condición inicial si queremos fijar una solución particular. En concreto, estudiaremos: variables separables, diferenciales exactas, factores integrantes, ecuaciones lineales, algunos cambios de variables. (Más adelante resolveremos algunos otros tipos de ecuaciones con otras técnicas).

Variables separables. Es de variable separable una ecuación que puede escribirse en la forma $\frac{dx}{dt} = \frac{p(t)}{q(x)}$, que $\frac{dx}{dt} = p(t)$, e integrando $\int q(x) \frac{dx}{dt} dt = \int p(t) dt + C$. En caso de que podamos encontrar primitivas de las funciones q y p (con $q \neq 0$), será $Q(x) = P(t) + C$. Si podemos despejar la x tendríamos la solución explícitamente (una vez expresada en términos de primitivas, aunque en la práctica no nos sea muy útil, se suele considerar integrada la ecuación y la solución viene dada implícitamente). La constante C se determinará con una condición inicial.

Obs. Por brevedad se suele escribir (al menos planteamos la duda si lo ~~debemos~~ ~~hacer~~ ~~así~~) $q(x) \frac{dx}{dt} = p(t)$, $q(x) dx = p(t) dt$ y luego se integra.

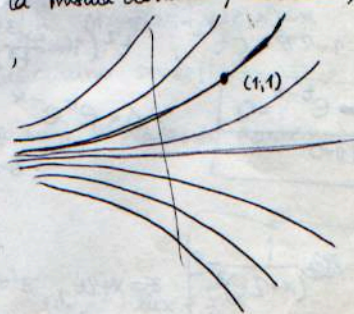
Por ejemplo: $\frac{dx}{dt} = tx$, $\int \frac{dx}{x} = \int t dt + C^*$, $\ln x = \frac{t^2}{2} + C^*$, $x = e^{\frac{t^2}{2} + C^*} = e^{\frac{t^2}{2}} e^{C^*} = C e^{\frac{t^2}{2}}$.

Generalmente las constantes en las exponenciales se escriben $x = e^{\frac{t^2}{2} + C}$ (observamos que con la anterior expresión no teníamos las curvas correspondientes a $C \leq 0$, son problemas de que $\ln(x)$ y $\ln(-x)$ tienen la misma derivada; cuidado).

Si queremos la solución particular con $x(0) = 1$, $x(0) = C e^{\frac{0^2}{2}} = 1$, $C = e^{-\frac{0^2}{2}} = 1$, luego

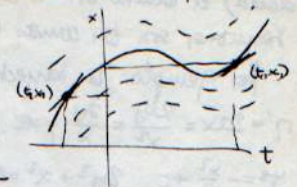
$$x = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(se prueba que la solución es única, pero por ahora no nos preocupamos).



1.2 DIBUJO APROXIMADO DE SOLUCIONES | Cálculo aproximado

Consideremos $x' = f(t, x)$. Geométricamente, encontrar soluciones de la ecuación equivale a buscar curvas cuyas tangentes en cada punto (t, x) tengan por pendiente la que le asigna la función f . Supongamos que tenemos dibujado el campo de direcciones de la ecuación dada: en cada punto (t, x) dibujamos un pequeño segmento de pendiente $f(t, x)$. Las soluciones serán curvas $x(t)$ tangentes en todos sus puntos a los segmentos del campo de direcciones. El campo lo podemos dibujar sin resolver la ecuación. Para construirlo conviene considerar las isoclinas, curvas en las que la pendiente asignada por f es constante: $f(t, x) = k$.



Por ejemplo $x' = -\frac{t}{x}$; $f(t, x) = -\frac{t}{x} = 1$. En todos los puntos de $x = t$ la pendiente de los segmentos será 1.

$$-\frac{t}{x} = 0 \rightarrow t = 0, -\frac{t}{x} = 1 \rightarrow x = -t; -\frac{t}{x} = 2 \rightarrow x = -\frac{t}{2}$$

Las curvas tangentes en todos sus puntos a los segmentos del campo de direcciones serán circunferencias.

Lo comprobamos (este no es ejemplo práctico) aproximadamente cuando no podemos resolver $x' = -t/x$; $x^2 = -t^2 + C$, $x^2 + t^2 = C$ circunferencias como habíamos previsto.



estrictamente $x^2 + t^2 = C$ no es una función (son dos $x = \sqrt{C - t^2}$ y $x = -\sqrt{C - t^2}$). Hasta ahora hemos hablado de soluciones. Un concepto más general será el de curva integral, curva tangente en cada punto al campo de direcciones (que no siempre vendrá dada por una única función $x(t)$; tal vez se podrá ~~expresar~~ expresar en forma paramétrica $x = \phi(s)$, $t = \psi(s)$) (En los libros se usa una por la otra (curva, solución)).

Para la ecuación $x' = \frac{x}{t}$ es fácil comprobar que las curvas integrales son rectas que pasan por el origen. En este caso $t = 0$ no es solución (ni es función) y sin embargo debería ser una curva integral. En muchos problemas (lo geométrico sobre todo) las variables x y t son intercambiables. Por eso consideraremos que son curvas integrales de la ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ también las soluciones integrales de la ecuación equivalente $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t, x)}$ con lo que recuperamos algunos ~~casos~~ para los que la ecuación inicial no tiene sentido. Por ejemplo, $t = 0$ es solución de $\frac{dt}{dx} = \frac{t}{x}$ con lo que ya la incluimos entre las curvas integrales de (1).

Observemos que $\frac{x}{t} \left(-\frac{t}{x}\right) = -1$ con lo que las curvas de las dos ecuaciones son ortogonales ($m_1 \cdot m_2 = -1$ son las pendientes de dos rectas perpendiculares), en cada punto.



Ecuaciones no resueltas respecto de la derivada

Hasta ahora hemos resuelto $x' = f(t, x)$. Resolveremos después $F(t, x, x') = 0$ que lo sea elementalmente. Cambiamos notación (hacemos consideraciones geométricas) $F(x, y, y') = 0$.

Si podemos descomponer $F(x, y, y') = f_1(x, y, y') \cdots f_n(x, y, y') = 0$ donde cada $f_i(x, y, y') = 0$ sea integrable, las soluciones de estas lo son de la ecuación inicial. Esto ocurre, por ejemplo

si $F(x, y, y') = a_0(x, y) + a_1(x, y)y' + \cdots + a_n(x, y)(y')^n = 0$ (ecuación de grado n)

y se pueden encontrar las raíces de este "polinomio" en x' :

Por ejemplo $(y')^2 - (x + \frac{y}{x})y' + y = 0$; $y' = \frac{x + \frac{y}{x} \pm \sqrt{x + \frac{y}{x}}}{2}$

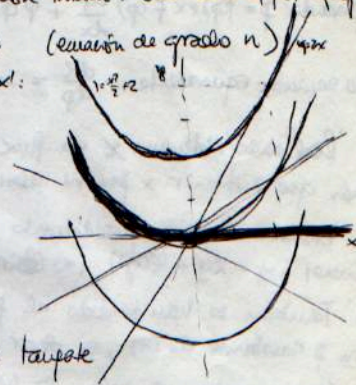
la ecuación equivale a $(y' - x)(y' - \frac{y}{x}) = 0$
(en general las raíces no tendrán esta expresión tan sencilla)

las soluciones $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + C \\ y = Cx \end{cases}$

Por cada punto pasan dos soluciones (aquí no hay unicidad). Podemos encontrar otras "empalmados" parabolas y rectas en puntos donde la tangente

es horizontal, por ejemplo $y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(una $\checkmark$ no es solución, ni siquiera derivable; prescindamos el requisito de solución).



Si podemos despejar la x o la y conviene considerarla como parámetro $y' = p$

Sea $y = f(x, y') = f(x, p)$ Derivando respecto a x : $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$ ecuación de primer grado que tal vez por eso sea más fácil de resolver (en general seguirá complicada)

Si la solución de esta ecuación es $\phi(x, p, C) = 0$ la solución de la inicial la obtenemos eliminando p entre las dos ecuaciones $\begin{cases} y = f(x, p) \\ \phi(x, p, C) = 0 \end{cases}$, o tenemos su

expresión paramétrica expresando y y x separadamente en función del parámetro p (lo que no será tampoco fácil).

(Obrévese que para resolver la ecuación realmente tenemos una derivada).

Alternativamente si $x = f(y, y') = f(y, p)$, $1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy} \cdot p$ y como antes

si su solución es $\psi(y, p, C) = 0$ podemos eliminar p o expresar x e y paramétricamente en función de p obteniendo la solución de la ecuación.

Por ejemplo: $x = 4(y')^3 + 2y' = 4p^3 + 2p$; derivamos respecto a x :

$1 = (12p^2 + 2) \frac{dp}{dy} \cdot p$; resolvemos $\int (12p^3 + 2p) dp = \int dx + C$, $3p^4 + p^2 = x + C$,

la solución viene dada paramétricamente por:

$\begin{cases} x = 4p^3 + 2p \\ y = \dots \end{cases}$ (podamos despejar la p pero sería peor)

2.1. $x' = f(t, x)$. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Presenciamos el problema de valores iniciales que consideramos

Sea la función $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, D subconjunto de $\mathbb{R}^2$, f continua en D y sea $(t_0, x_0) \in D$.

Consideramos el problema de valores iniciales:

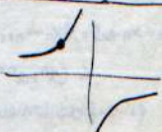
$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Una solución de (P) es una función $x(t)$ definida en un intervalo I que contiene a t_0 , derivable en ese intervalo, tal que $x(t_0) = x_0$ y tal que $\forall t \in I$ se cumple que $(t, x(t)) \in D$ y $x'(t) = f(t, x(t))$.

(Precisamos nuevas: f definida solo en D (lo que ocurre en general)

$x(t)$ debe estar definida en un intervalo (que puede ser no acotado); por ejemplo $\begin{cases} x' = x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$ ($D = \mathbb{R}^2$).

Sol. general: $x(t) = \frac{-1}{t+c}$, sol. de (P) $x(t) = -\frac{1}{t}$; no es solución en $\mathbb{R}$ porque no está definida en $t=0$; sí lo es en $(-\infty, 0)$.



Estudiamos en que condiciones (P) posee solución y a que condiciones esta solución es única, a la vista de las propiedades de f , sin resolver la ecuación (para que una ecuación nos describa un problema físico necesitamos que esté determinada la solución (unicidad), desde luego, que exista).

Convertimos el problema en un problema de puntos fijos para un operador entre espacios de Banach:

Lema: $x(t)$ es solución de (P) si y solo si $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$

(en ecuación integral, la x no está despejada).

$\Rightarrow$ si $x(t)$ solución $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$.

$\Leftarrow$ si $x(t)$ satisface la ecuación integral es evidente que $x(t_0) = x_0$. Como $f(s, x(s))$ es continua el primer teorema fundamental del cálculo garantiza que $x(t)$ es derivable y que $x'(t) = f(t, x(t))$.

Definimos el operador $x \mapsto Tx$ mediante: $Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$

Si x es continua en $[t_0, t_1]$ y si $(t, x(t)) \in D$ está claro que Tx también es continua en $[t_0, t_1]$ (e incluso derivable). Es decir, $\mathcal{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}) = \{f: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$, el operador:

$$T: \mathcal{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([t_0, t_1], \mathbb{R})$$

Si existe x tal que $Tx = x$, esta x es solución de (P) (por el lema). Así que:

Lema: x es solución de (P) si y solo si x es un punto fijo para el operador T .

Recordamos que $([t_0, t_1], \mathbb{R})$ es un espacio de Banach (normado y completo) con la norma

$$\|x\| = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|$$

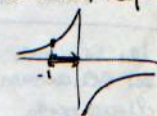
Demostremos el teorema sobre puntos fijos que utilizaremos:

2.2. PROLONGABILIDAD DE SOLUCIONES

Sea (P) $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ suponemos que hay solución única local a la derecha $[t_0, t_0 + d]$. Si f sigue regular en un entorno de $[t_0 + d, x(t_0 + d)]$ podemos volver a aplicar el teorema, y así sucesivamente. Pero ¿hasta donde podemos prolongarla? ¿Cuál es el máximo intervalo en que la solución está definida?

¿Qué puede impedir que $x(t)$ esté definida para todo t ? Un hecho que puede hacerlo es que f deje de estar definida. Pero incluso si $D = \mathbb{R}^2$ puede haber soluciones definidas solo en intervalos acotados. Por ejemplo $\begin{cases} x' = x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$, $x(t) = \frac{1}{1-t}$

Solo puede prolongarse hacia la derecha hasta 0.



Usaremos solución maximal α aquella que no admite ninguna prolongación (si está definida en I , no existe $I' \supsetneq I$ en el que la función esté definida). Por ejemplo $x(t) = \frac{1}{t}$ con $t \in (-\infty, 0)$ es solución maximal (con $t \in [0, 1, 0]$ es solución maximal a la derecha).

Teor: Sean $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ continuas en todo el plano. Si $x(t)$ es una solución maximal cuyo intervalo de definición tiene un extremo α , entonces $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \alpha$.

(y por tanto, si para cualquier real α , $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \alpha$, $x(t)$ está definida en todo $\mathbb{R}$).

Sea α extremo derecho (i.e. no, cualquier). Reducción al absurdo. Neguemos que:

$\forall k > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\alpha - \delta < t < \alpha \Rightarrow |x(t)| \geq k$. Es decir, suponemos: $\exists k > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, $(\alpha - \delta, \alpha)$ contiene al menos un t para el que $|x(t)| \geq k$.

Escogamos un η sea $Q = [\alpha - \eta, \alpha + \eta] \times [-2k, 2k]$.

Sean $|f(t, x)| \leq M$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq L$ $\forall (t, x) \in Q$.

Sea $d = \min \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{1}{2L}, \frac{k}{M} \right\}$ tomamos $t_0 \in (\alpha - d, \alpha)$ con $|x(t_0)| < k$.

Sea $Q' = [t_0 - d, t_0 + d] \times [x(t_0) - k, x(t_0) + k]$. Se ve que $Q' \subset Q$. Sabemos que existe solución en $[t_0, t_0 + d]$ y $t_0 + d > \alpha$ con lo que tenemos solución prolongada hasta un punto a la derecha de α y $x(t)$ no sería maximal.

(en la demostración podríamos haber exigido que f fuese globalmente Lipschitziana, en vez de $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua en $\mathbb{R}^2$).

No preocupamos sobre todo de las soluciones a la derecha, de lo que va a su orden. Para que (P) esté definida en $[t_0, \infty)$ basta ver que $|x(t)|$ no se va a infinito para t infinito. Pero esto en principio no podemos saberlo sin calcular $x(t)$ (y es en ese caso cuando nos interesa el teorema). Para ver si $|x(t)|$ permanece acotada en t infinito comparando con ecuaciones conocidas.

Lema: Sean (P1) $\begin{cases} x' = f_1(t, x) \\ x(t_0) = x_{01} \end{cases}$ (P2) $\begin{cases} x' = f_2(t, x) \\ x(t_0) = x_{02} \end{cases}$ y sean $x_1(t), x_2(t)$ soluciones respec-

PUNTOS Y SOLUCIONES SINGULARES DE $x' = f(t, x)$

Para dar una exigencia unidad para estudiar puntualidad (entidad local), no preocupamos ahora de los puntos singulares, donde los teoremas no se cumplen.

Dada $x' = f(t, x)$, decimos que (t_0, x_0) es punto singular de la ecuación si el problema $(P) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ no tiene solución o tiene más de una. Solución singular es aquella formada por puntos singulares.

Para encontrar los puntos y curvas singulares hay que encontrar ante todo el conjunto de puntos en que no se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad local: puntos ~~para los~~ que no exista un entorno $\square$ en que f sea continua y satisfaga una condición de Lipschitz. Estos puntos no son necesariamente singulares (los teoremas son condiciones necesarias) pero son los candidatos.

Empecemos considerando los puntos en que f no es continua (si f está definida por una expresión en funciones elementales, estos puntos serán en general aquellos en que f no está definida). Una f puede no ser continua en puntos aislados ($x' = \frac{1}{t+x^2}$, $(0,0)$) o en los puntos de una curva ($x' = \frac{1}{x}$, $x=0$) o una región del plano ($x' = \ln x$, $x \leq 0$).

Si hablamos de ~~curvas singulares~~ curvas integrales y podemos considerar equivalentes $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ y $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t, x)}$ algunos de los puntos singulares de una de las ecuaciones dependen de serlo de considerar la segunda, por ejemplo

$x' = \frac{1}{x}$, se $x = \sqrt{2t+C}$

En $x=0$, las soluciones no son derivables (pendiente infinita); $x = \sqrt{2t}$ está definida en $(0, \infty)$ pero no en $[0, \infty)$.

Su embargo los puntos de $x=0$ dejan de ser singulares si consideramos la ecuación $\frac{dt}{dx} = x$, $t = \frac{x^2}{2} + C$ en este caso ya son soluciones.

Uso si x, t son "equivalentes" buscaremos los puntos singulares entre los puntos en que $f(t, x)$ y $\frac{1}{f(t, x)}$ sean discontinuos.

Consideremos los posibles puntos sin unicidad la condición que se utiliza en la práctica en los teoremas es que $\frac{df}{dx}$ exista y esté acotada. Esto no ocurre, por ejemplo, en los puntos en que $\frac{df}{dx}$ se hace infinito (si la f está definida con funciones elementales, es casi lo único que se presenta en funciones definidas y no derivables - raras -; las veces se comparan si hay valores absolutos o funciones definidas por regiones del plano).

En general $\frac{1}{f(x)} = 0$ define una curva en cuyos puntos puede fallar la unicidad. Si en todos ellos falla y además esta curva es integral, tendríamos una curva integral

2.2. DEPENDENCIA CONTINUA DE VALORES INICIALES Y PARÁMETROS. ESTABILIDAD

Supongamos que $(P) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ tiene solución única en un entorno y consideremos $(P^*) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0^* \end{cases}$ con $|x_0^* - x_0|$ pequeño (la solución seguirá existiendo). ¿Serán las soluciones de (P^*) cercanas a las de (P) ? No es solo problema técnico. Al estudiar un problema físico, por causas de medición, nos planteamos el problema (P^*) cuando realmente (P) es el que describe nuestro sistema. Necesitamos que la solución técnica se parezca a la real.

Asimismo, podemos encontrar un problema físico que nos lleve a $(P_\lambda) \begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ donde la f depende de t, x y un parámetro físico λ . Si el valor real es μ y λ es próximo a μ , ¿serán próximas las soluciones obtenidas a la situación real?

La respuesta en ambos casos (si la f es suficientemente regular) es afirmativa.

Valores iniciales: Sean (P) y (P^*) supongamos f continua y lip. respecto de la x , de tal forma que las soluciones $x(t)$ y $x^*(t)$ están definidas en $[t_0, t_0+d]$.

(Lema Grönwall simplificado)

Sea $y: [t_0, t_0+d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\forall t \in [t_0, t_0+d] \quad y(t) \leq K + L \int_{t_0}^t y(s) ds$ con $K \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}^+$. Entonces $y(t) \leq K e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_0+d]$.

($y(t) = K + L \int_{t_0}^t y(s) ds$ equivale a $y'(t) = Ly$ que tiene solución $y = K e^{L(t-t_0)}$, se mantienen las desigualdades).

Sea $z(t) = \int_{t_0}^t |g(s)| ds$, $z'(t) \leq K + Lz(t)$; luego $z(t)$ será $\leq$ que la solución de $x'(t) = K + Lx(t)$ que es $x(t) = 0$.

Es $x(t) = e^{Lt} \int_{t_0}^t e^{-Ls} K ds = -\frac{K}{L} [1 - e^{L(t-t_0)}] \geq z(t)$, por tanto:

$$y(t) \leq K + Lz(t) = K - K[1 - e^{L(t-t_0)}] = K e^{L(t-t_0)}$$

Teor: Si $|x(t_0) - x^*(t_0)| \leq \delta$, entonces $|x(t) - x^*(t)| \leq \delta e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_0+d]$

Sea $g(t) = x(t) - x^*(t)$, $|g(t_0)| \leq \delta$, $|g'(t)| = |x'(t) - x^{*'}(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, x^*(t))| \leq L|g(t)|$

Integrando $|g(t)| = |g(t_0) + \int_{t_0}^t g'(s) ds| \leq \delta + \int_{t_0}^t |g'(s)| ds \leq \delta + L \int_{t_0}^t |g(s)| ds$.

Lema Grönwall: $|g(t)| \leq \delta e^{L(t-t_0)}$.

El teorema nos dice que si $x(t_0) \rightarrow x_0$, la solución correspondiente converge uniformemente hacia $x(t)$ en $[t_0, t_0+d]$. Con otras palabras:

Dado $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $|x_0 - x_0^*| < \delta$ entonces $|x(t) - x^*(t)| < \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0+\delta]$ (si partimos de $\mathbb{R}$ no nos salimos de la banda de radio ϵ).

En intervalos finitos las soluciones están próximas; ¿en infinitos?

$\begin{cases} x' = x \\ x(t_0) = 0 \end{cases}, x=0 \quad \begin{cases} x' = x \\ x(t_0) = x_0^* \end{cases}, x = x_0^* e^t$

En $[0, d]$ estamos cerca si el error es pequeño;

sin embargo en un intervalo infinito las soluciones se alejan de la ~~curva~~ por muy cerca de 0 que partamos. La solución determinada por las condiciones iniciales dadas no tiene valor práctico ya que no nos dice nada del tiempo al salir del tiempo.

ECUACIONES LINEALES: ESTABILIDAD Y SOLUCIONES PERIÓDICAS

Estabilidad:

$$(P) \begin{cases} x' = a(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sabemos que si a, f son continuas en $[t_0, \infty)$ (en $\mathbb{R}$) hay solución única definida en $[t_0, \infty)$ (en $\mathbb{R}$).

Def: La solución $x(t)$ de (P) es estable (asintóticamente estable) si y sólo si la solución $x=0$ de $x' = a(t)x$ es estable (asintóticamente estable).

(En una líneaal tiene sentido hablar de estabilidad de la ecuación pues o todas las soluciones son estables, o todas asintóticamente estables, o todas inestables. Notemos también que la $f(t)$ no influye en la estabilidad los dos resultados se podrían esperar, las soluciones son suma de solución particular más solución general de la homogénea y es esta la que nos dice si las soluciones se alejan o se acercan).

$$\begin{aligned} |x(t) - x^*(t)| &= |x(t_0) - x^*(t_0)| e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \\ |x(t) - 0| &= |x^*(t_0)| e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \end{aligned}$$

En los dos hay estabilidad si $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$ está acotado y estabilidad asintótica si $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$.

Para ver la estabilidad de una ecuación lineal basta pues analizar el $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$.

Cor: $x' = a(t)x + f(t)$ es estable si y sólo si $\exists M$ tal que $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} < M \forall t \geq t_0$ es asintóticamente estable si y sólo si $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$.

Por ejemplo $x' = \frac{x}{1+t} + e^{cot}$; sólo usamos $e^{\int_{t_0}^t \frac{ds}{1+s}} = e^{\ln(1+t)} = 1+t$ no acotado en $[0, \infty)$ luego es inestable.

Para el caso de coeficientes constantes: $x' = ax + f(t)$

Cor: La ecuación $x' = ax + f(t)$ es asintóticamente estable si $a < 0$ estable si $a = 0$ inestable si $a > 0$.

(no nos sorprende, las exponenciales e^{at} tienen ese comportamiento).

Def: e^{at} tiende a 0, está acotado y no está acotado si $a < 0, a = 0, a > 0$ respectivamente.

Aí, a simple vista: $x' = -3x + t \sec^2 t$ es asintóticamente estable.

$$x' = \frac{x}{10.000} + 2t \text{ es inestable.}$$

ECUACIONES AUTÓNOMAS

$x' = f(x)$ (1) El tiempo no aparece explícitamente.

Es de variables separables. Sin embargo las características importantes de las soluciones se deducen del estudio de la propia f .

Suponemos f continua $\forall x$ con lo que habrá solución única para cualquier condición inicial.

El campo de direcciones es independiente de t . Por lo tanto si trasladamos una curva solución paralelamente al eje t obtenemos otra solución:

Def: Sea x solución de (1) y sea $c \in \mathbb{R}$. La función $y(t) = x(t+c)$ es también solución $y'(t) = x'(t+c) = f(x(t+c)) = f(y(t))$.

Cor: Si $a \in \mathbb{R}$ en tal que $f(a) = 0$, entonces $x(t) = a$ es solución de (1) $0 = f(a) = 0$.

A estas soluciones constantes se las llama también soluciones de equilibrio.

Def: Toda solución de (1) es constante, o estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Sea x solución y exista t_0 para el que $x'(t_0) = 0$; probemos que x es constante: $f(x(t_0)) = 0$, $x(t_0) = x(t_0)$ es solución y es la única. Ninguna solución puede tener máximos o mínimos a no ser que sea constante.

(Estrictamente: las soluciones representan un proceso de aumento/disminución, o un equilibrio; en particular una ecuación autónoma de primer orden no tiene sol. periódicas, pero).

Def: Sea x solución tal que $|x(t)| \leq c$ para $t \geq t_0$. Entonces $x(t)$ está definida en $[t_0, \infty)$ y existe $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a$ y es $f(a) = 0$.

(una solución acotada por la derecha se acerca a una solución constante).

Si x es constante, ya está. Sea x creciente o decreciente. $x(t)$ está definida en $[t_0, \infty)$ por el teorema de prolongación. Como x está acotada debe tender a un límite a .

Como f es continua $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = f(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t)$. Sea $f(a) > 0$.

Para $t \geq T$, $x'(t) > \frac{f(a)}{2}$, $\int_T^t x'(u) du = x(t) - x(T) > \frac{f(a)}{2}(t-T)$, $x(t) > x(T) + \frac{f(a)}{2}(t-T) \rightarrow \infty$ como $t \rightarrow \infty$ y $x(t)$ no sería acotada. Igual se veía si $f(a) < 0$.

Análogamente: una solución acotada por la izquierda se acerca a una solución constante $t \rightarrow \infty$.

Condiciones inmediatas:

Si existen soluciones de equilibrio todas las soluciones tienen intervalos de definición no acotados (se acercan indefinidamente a aquellas que no pueden existir en tiempo finito por la unicidad).

Si existen soluciones constantes, las soluciones comprendidas entre ellas están definidas para todo t si no hay soluciones de equilibrio, cada solución toma todos los valores reales.

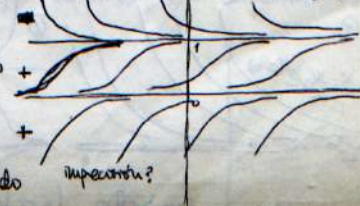
(ninguna solución está acotada por a derecha o izquierda y las soluciones son monótonas).

$$x' = x^2 - x^3 = x^2(1-x). \text{ Sol. otras } x=0$$

Analizando el signo de x' se ve donde son crecientes o decrecientes, y por tanto hacia que solución de equilibrio tienden:

$$x^2(1-x) > 0 \text{ si } x < 1$$

Hacia los puntos de equilibrio no tenemos ningún resultado. Pero una idea se dan las soluciones o no dependen de...



3. SISTEMAS DE ECUACIONES Y ECUACIONES DE ORDEN n

3.1. PLANTAMIENTO Y PROPIEDADES GENERALES

Sean $f_1, \dots, f_n: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y sea el sistema de ED de primer orden
 $(t, x_1, \dots, x_n) \rightarrow f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i=1, \dots, n$

$$(E) \begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Una solución del sistema es un conjunto de n funciones $x_1(t), \dots, x_n(t)$ definidas y derivables en un intervalo común I tales que $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D \quad \forall t \in I$
 $x'_i = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad \forall t \in I$.

Dados n condiciones iniciales $(CI) \quad x_1(t_0) = x_{01}, \dots, x_n(t_0) = x_{0n}$ con $(t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$
 una solución de (E) que las satisfaga se dice que es solución del problema de valores iniciales (P.V.I.)

Sea $g: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea la ecuación de orden n : $(E_n) \quad x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$
 Una solución de (E_n) es una función $x(t)$ definida y n veces derivable en un intervalo I tal que $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in D \quad \forall t \in I$ y tal que $x^{(n)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I$.

Una ecuación de orden n se puede convertir en un sistema: llamemos $x = x_1, x' = x_2, \dots, x^{(n-1)} = x_n$
 sea $(E_n^*) \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = g(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ Entonces $x(t)$ es solución de (E_n) si y solo si $x_1(t), \dots, x_n(t)$ son soluciones de (E_n^*) (inmediato)

Con n condiciones iniciales se obtiene este caso particular los valores de $x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$.
 Por ejemplo: $x'' + ax' + bx = f(t)$, $x = x_1, x' = x_2$ y queda $x'_2 = -ax_2 - bx_1 + f(t)$

Por brevedad muchas veces utilizaremos notación vectorial (columnas y mayúsculas):

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. El problema queda (P) $\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$
 la solución $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ es una función vectorial de I en $\mathbb{R}^n$.

Definimos la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ con la distancia asociada y la topología asociada.

$$\|X\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - A\| < r\}$$

Estudiamos los sistemas e intentamos sacarnos conclusiones sobre las ecuaciones de orden n . Aquí es más difícil resolver explícitamente (prácticamente sólo las lineales con coeficientes constantes). Las propiedades generales se pueden establecer así directamente desde las ecuaciones de primer orden:

Teor: Sean f_i y $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j=1, \dots, n$ continuas en $A = [t_0, t_0 + h] \times B(X_0, r)$. Entonces (P) tiene

3.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$ con $a_{ij}, f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas f_i , con las condiciones iniciales $x_1(t_0) = x_{01}, \dots, x_n(t_0) = x_{0n}$ con notación vectorial

$$(P) \begin{cases} X' = A(t)X + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \text{ donde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ y } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)) = a_{1j}(t) \text{ continua (de } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ (t, x}_1, \dots, x_n) \rightarrow a_{1j}(t) \text{)}$$

Hay por tanto solución única local a la derecha para cualquier (t_0, X_0) . De hecho se puede probar que la solución está definida para todo t (si a_{ij}, f_i son cont. en todo $\mathbb{R}$ y si lo son en (t_0, ∞) hay sol. en (t_0, ∞)).

Teor: Sea (1) $X' = A(t)X$, ecuación homogénea. Entonces:

- El conjunto de todas las soluciones de (1) es un espacio vectorial de dimensión n .
- Sean $H = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ soluciones de (1). Entonces H es una base de V si y solo si la matriz $W(t)$ de columnas $X_1(t), \dots, X_n(t)$ es no singular para algún $t \in \mathbb{R}$. En ese caso $W(t)$ es no singular $\forall t \in \mathbb{R}$ y se le denomina matriz fundamental de la ecuación.

Para encontrar todas las soluciones de (1) hay que encontrar, pues, n soluciones linealmente independientes $X_1(t), \dots, X_n(t)$.

Para que para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, el determinante $|W(t_0)| = \begin{vmatrix} x_{11}(t_0) & \dots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \dots & x_{nn}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$

En ese caso si $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la solución general de (1) será $X(t) = W(t)C = c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t)$

Para tener la solución particular $X(t_0) = X_0$ determinaremos las constantes resolviendo $W(t_0)C = X_0$ sistema soluble de n ecuaciones y n incógnitas ($|W(t_0)| \neq 0$).

a. Sean $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ y sea $X_j(t)$ la solución única de $\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = e_j \end{cases} \quad j=1, \dots, n$

No es difícil probar que las $X_j(t)$ así definidas constituyen una base de V :

$\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j(t_0) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. independientes. Y generan todo el espacio.

Si $X(t)$ es sol. de $\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} = X_0 \end{cases}$, $\bar{X}(t) = \sum_{j=1}^n x_{0j} X_j(t)$ también lo es y por la unicidad $X(t) = \bar{X}(t)$, y cualquier sol. se puede escribir como combinación lineal de las $X_j(t)$.

b. Supongamos $|W(t_0)| = 0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces las columnas de $W(t_0)$ serán lin. dependientes:

$\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j(t_0) = 0$ con algún $\alpha_j \neq 0$. Entonces $X(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j(t)$ es solución del problema

$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$ del que también es solución $\bar{X}(t) = 0$; por unicidad $\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (los sol. son lin. dependientes)

Por tanto $|W(t)| = 0 \quad \forall t$. Luego: o bien $|W(t)| = 0 \quad \forall t$ o bien $|W(t)| \neq 0 \quad \forall t$ (en ese caso $|W(t)| \neq 0 \quad \forall t$ y se llama matriz fundamental no singular).

3.3. ECUACIONES LINEALES DE ORDEN n

Aplicamos el capítulo anterior a una ecuación lineal de orden n:

$$(3) \quad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad \text{en forma matricial:}$$

$$x = x_1 \dots x^{(n-1)} = x_n \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n(t) & \dots & a_2(t) & a_1(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Sabemos que si a_i y f son cont. en $\mathbb{R}$ hay sol. única en todo $\mathbb{R}$.

Resolver el sistema sabemos que equivale a encontrar una m.f., o sea, a encontrar n funciones vectoriales que sean soluciones y sean independientes. En nuestro caso:

Resolver el sistema equivale a encontrar n soluciones linealmente independientes de la homogénea y una solución particular de la no homogénea (además en soluciones son funciones escalares).

la m.f. adopta aquí la forma $\begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ cada fila derivada de la anterior. y sabemos:

$x_1(t), x_2(t)$ soluciones de la homogénea son linealmente independientes si y solo si para algunos

$$|W(x_1, \dots, x_n)(s)| = \begin{vmatrix} x_1(s) & \dots & x_n(s) \\ x_1^{(1)}(s) & \dots & x_n^{(1)}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{entonces } W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0 \quad \forall t)$$

(monstramos de las funciones $x_1, \dots, x_n$)

(observemos que si las x_i no son soluciones de una ecuación lineal esto no sucede: por ejemplo t, t^2 son lin. ind. y sin embargo $\begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2$ su monostromo es 0 en $t=0$ y no en los demás puntos).

El problema es como siempre encontrar las soluciones de la homogénea y una de la no homogénea. Conocer alguna solución siempre nos permite reducir el orden de la ecuación. Contémoslo en el caso $n=2$ por sencillez y porque es la que más aparece:

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t)$$

Conociendo una solución particular x_1 de la homogénea se transforma la ecuación en una lineal de primer orden con el cambio $x = x_1 \int u dt$ (basta pues encontrar solo una).

$$x'_1 = x'_1 \int u dt + x_1 u; \quad x'' = x''_1 \int u dt + 2x'_1 u + x_1 u'; \quad x'' + a(t)x' + b(t)x = \int u dt [x''_1 + a(t)x'_1 + b(t)x_1] + a(t)x_1 u' + (2x'_1 a(t) + x_1 b(t))u = f(t).$$

Ejemplo. $tx'' - tx' + x = 1$ (a y b no son cont. en $\mathbb{R}$ pero si en $[t_0, \infty)$ si $t_0 > 0$).

$x_1 = t$ sol. particular de la homogénea, $x_2 = 1$ solución particular de la no homogénea

Resolvemos $tx'' - tx' + x = 0$ con el cambio $x = t \int u dt$, $x' = \int u dt + tu$, $x'' = u + tu'$, $2tu + t^2 u' - t \int u dt - t^2 u + t \int u dt = 0$; $t^2 u' = (t^2 - 2t)u$; $\frac{u'}{u} = 1 - \frac{2}{t}$; $\ln u = t - 2 \ln t + C_1$;

$u = \frac{C_1 e^t}{t^2}$; luego la general de la homogénea $x_H = C_1 t \int \frac{e^t}{t^2} dt + C_2$. Sol. general de la ecuación inicial $x = 1 + C_1 + C_2 t \int \frac{e^t}{t^2} dt$

3.4. SISTEMAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$\text{Sean } (3) \quad x' = Ax, \quad (4) \quad x' = Ax + F(t) \quad \text{con } A \text{ matriz } n \times n \text{ de } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Recordamos (y si no es de álgebra) que la exponencial de una matriz se define

$e^B = I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots$, que es no singular, que para toda matriz B esta serie matricial es convergente (sus elementos son series numéricas convergentes) y que si $BC = CB$ entonces $e^{B+C} = e^B e^C$ y que $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Teor: a. $W(t) = e^{A(t-t_0)}$ es la matriz fundamental de (3) que satisface $W(t_0) = I$
b. la solución de $\begin{cases} x' = Ax + F(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ viene dada por $x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} F(s) ds$

a. Supongamos por comodidad que $t_0 = 0$ (si no, igual).
 $\frac{d}{dt} [e^{At}] = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[\frac{A^k t^k}{k!} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k k t^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At}$
una matriz para cada t, $\frac{d}{dt} [e^{At}] = A e^{At}$

Es matriz solución, como es no singular, es matriz fundamental.

b. Es la fórmula de derivación de las constantes en este caso.

El problema de resolver una sistema lineal con coeficientes constantes se reduce al del cálculo de la exponencial de una matriz.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los autovalores de A (raíces de $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$). Sabemos que existe una matriz no singular P tal que $A = PJP^{-1}$ donde J tiene la forma de Jordan: $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{pmatrix}$ con $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$, λ_i autovalores.

$$\text{Entonces: } e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P J^k P^{-1} t^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} \right) P^{-1} = P e^{Jt} P^{-1}.$$

$\downarrow$ $A^k = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) \dots (PJP^{-1}) = P J^k P^{-1}$

Y la exponencial de e^{Jt} es de sencilla cálculo: $J_i t = \lambda_i t I + H_i t$, $H_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t I} e^{H_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$(H_i)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (H_i)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (H_i)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, e^{H_i t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\lambda_i t I} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_i t} I$$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

5. ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Empecemos con el caso $n=2$ generalizaremos.

$$\begin{cases} x'' + ax' + bx = p(x) \end{cases} \text{ es decir } x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ p(x) \end{pmatrix}.$$

Resolvamos la homogénea (calculamos una matriz fundamental):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{la ecuación característica es semejante a la ecuación.}$$

Se podría haber obtenido buscando soluciones de la forma $e^{\lambda t}$ (forma más clásica de resolver estas ecuaciones).

Los autovalores pueden ser reales, distintos; raíz doble y complejos conjugados.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ reales: he personal $x(t) = e^{At} c^* = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} D_1 e^{\lambda_1 t} \\ D_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \end{pmatrix}$

luego $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

no necesito derivada de la de arriba

λ raíz doble: $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$; luego:

Se ve fácil que esta es la forma de Jordan

$$x(t) = P e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} P \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 + t D_1 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ \dots \end{pmatrix}; \text{ luego } x(t) = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t}$$

$\lambda = p + qi, \bar{\lambda} = p - qi$

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{pt} e^{qti} & 0 \\ 0 & e^{pt} e^{-qti} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = e^{pt} P \begin{pmatrix} D_1 e^{qti} \\ D_2 e^{-qti} \end{pmatrix} = e^{pt} \begin{pmatrix} D_1^* e^{qti} + D_2^* e^{-qti} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{pt} \left[(D_1^* + D_2^*) \cos qt + i(D_1^* - D_2^*) \sin qt \right] = e^{pt} [C_1 \cos qt + C_2 \sin qt]$$

donde c_1, c_2 tienen que ser reales.

Observemos que $\begin{pmatrix} \cos qt \\ \sin qt \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} e^{-it} \cos qt \\ e^{-it} \sin qt \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \end{pmatrix}$ pero en 0 vale la identidad, $\cos qt$ y $\frac{1}{2} \sin qt$ son soluciones y la segunda fila es derivada de la primera.

Resolver la homogénea se reduce a buscar una solución particular (la fórmula de la var. de las const. es sólo el último recurso). Para ello es útil:

Si $p(x)$ es un polinomio y $b \neq 0$ se busca una solución particular que sea otro polinomio del mismo grado (si $b=0$ es el caso $x' = p$)

Si $p(x) = e^{rt} p_0(x)$ con $p_0(x)$ polinomio de grados s

i) r no es autovalor: se busca $x_p = e^{rt} Q_s(x)$ con $Q_s(x)$ pol. de grados s

ii) r es autovalor de mult α : $x_p = t^\alpha e^{rt} Q_s(x)$

Si $p(x) = e^{rt} [p_0(x) \cos qt + p_1(x) \sin qt]$, con $p_0(x), p_1(x)$ polinomios uno de grado s y otro el grado no mayor y

i) $p \pm qi$ no son autovalores: se busca $x_p = e^{rt} [P_s^*(x) \cos qt + Q_s^*(x) \sin qt]$, P_s^*, Q_s^*

3.6. SISTEMAS AUTÓNOMOS DE SEGUNDO ORDEN

Estudiamos sistemas de la forma $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$ ó $x' = F(x)$ con $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que incluyen en particular las ecuaciones de segundo orden:

$$x'' = g(x, x') \text{ es decir } \begin{cases} x' = y \\ y' = g(x, y) \end{cases} \text{ Suponemos } f, g \text{ continuas en } \mathbb{R}^2.$$

Teor: Si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es tal que $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ entonces $X(t) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es una solución de (1) (solución de equilibrio; a $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ se le llama también punto singular)

Teor: Dado $(t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})$ existe una única solución $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ de (1) tal que $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Si el intervalo de definición de X tiene extremo a entonces $\|X(t)\| \rightarrow \infty$ como $t \rightarrow a$.

Teor: Sea X sol de (1) y sea $c \in \mathbb{R}$; entonces $X^*(t) = X(t+c)$ es también solución de (1) (los tres inmediatos).

En primer orden si una ecuación autónoma tuviera dos veces el mismo valor era constante. Aquí.

Teor: Sea X sol de (1) y suponemos que existen t_1, t_2 tales que $X(t_1) = X(t_2)$. Entonces X es periódica de período $T = t_2 - t_1$. $X^*(t) = X(t+T)$ es también solución y cumple $X^*(t_1) = X(t_2) = X(t_1)$; por la unicidad $X(t) = X^*(t) = X(t+T)$.

Gran información sobre (1) se obtendrá de la representación. Podríamos utilizar tres dimensiones:

Por ejemplo $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$ tiene por solución $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, o sea $x(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

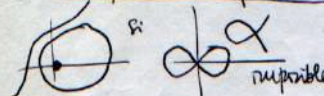


En cualquier caso para las ecuaciones autónomas es preferible dibujar sólo la proyección sobre el plano xy . Así las dos curvas solución anteriores las representaríamos en el



Plano de fases por una circunferencia y un punto. la proyección de una curva solución sobre el plano de fases se llama órbita de esa solución. Está claro que $\begin{cases} x = x(t+c) \\ y = y(t+c) \end{cases}$ son curvas parameétricas de dicha órbita (y que $x = x(t+c)$ para cada c es otra) las revoluciones de una curva solución tienen la misma órbita.

Teor: Por cada punto del plano xy pasa una órbita que puede ser un punto, una curva simple cerrada o un arco simple (que corresponde a una solución constante, periódica o no periódica respectivamente)



Intuitivamente creto (ver O.Plat.E.D.O.).

Se trata de obtener la mayor información posible sobre la forma de las órbitas en el plano de fases (el mapa de fases); sobre todo cerca de los puntos singulares o de las soluciones periódicas.

Comenzamos con la generalización de la idea de campo de direcciones: dibujemos en cada (x, y) el vector $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$. Si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es singular $\vec{V}(x_0, y_0)$ es un vector nulo.

Si las coordenadas de un punto móvil P en el instante t están dadas por una solución $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces el vector velocidad de P en cada instante $\vec{V}(x(t), y(t))$ coincide con $\vec{V}(x, y)$ en $(x(t), y(t))$.



3.7. SOLUCIONES PERIÓDICAS DE ECUACIONES LINEALES - SOLUCIONES PERIÓDICAS DE ECUACIONES

Estudiamos las soluciones periódicas de:

$$(1) x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad \text{y} \quad (2) x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) \text{ con } f \in P_T$$

la situación se parece al caso $n=1$. Como allí empezamos por la homogénea.

Teor: (1) tiene solución T-periódica no trivial $\Leftrightarrow$ existe algún autovalor $\lambda = i \frac{2\pi n}{T}$ para algún entero

(aparecen entonces soluciones constantes (si $n=0$) o soluciones de la forma $\cos \frac{2\pi n}{T}$, $\sin \frac{2\pi n}{T}$ que son funciones de periodo T_n por tanto también de periodo T).

A diferencia del caso $n=1$ (en que o "todas" o "ninguna") aquí pueden aparecer "algunas" soluciones linealmente independientes y "otras" que no lo sean.

Por ejemplo: $x''' + x'' + x' + x = 0$, $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$, autovalores: $-1, i, -i$.

Solución general $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t$; solo para determinadas condiciones iniciales (las que me dan $C=0$) hay soluciones periódicas.

Si no aparecen estas soluciones periódicas la situación es sencilla:

Teor: (2) tiene una única solución T-periódica $\Leftrightarrow$ (1) tiene la única solución T-periódica $x=0$

Por ejemplo (3) $x''' + x'' + x' + x = f(t)$; si f es de periodo $T=5$ el teorema nos asegura que solo hay una solución de periodo $T=5$ (pues la homogénea, aunque tiene soluciones periódicas, no las tiene de periodo 5).

Si (2) tiene más soluciones T-periódicas la cosa se complica. Se puede probar:

Si (1) tiene T sol. T-per en md $\Rightarrow$ (2) tiene o bien T sol. T-per en md. o bien ninguna

(hay teoría para distinguir entre las dos posibilidades pero no nos meteremos con ella. Solo para un caso muy particular).

Si en (3) f tiene periodo 2π sabemos que (2) puede tener 2 soluciones $x_1(t), x_2(t)$ en md y T-periódicas (con lo que $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ serían todas las soluciones 2π -periódicas) o no tener ninguna.

Completemos el teorema para el caso muy particular: (4) $x'' + \omega_0^2 x = f(t)$ $\omega_0 \neq 0, f \in P_T$
(masa-muelle sin amortiguamiento sometido a fuerza externa T-periódica)
 $x'' + \omega_0^2 x$ tiene 2 soluciones en md periódicas $\cos \omega_0 t$ y $\sin \omega_0 t$ de periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Teor: Si $T \neq T_0$ (la homogénea no tiene soluciones de periodo T)

$\Rightarrow$ (4) tiene una única solución de periodo T .

Si $T = n T_0$ (la homogénea tiene 2 sol. en md de periodo T). Entonces:

Es: $\int_0^T f(t) \sin \omega_0 t dt = 0$ $\Rightarrow$ (4) tiene todas sus soluciones de periodo T
 $\int_0^T f(t) \cos \omega_0 t dt = 0$

Si alguna de las dos integrales es $\neq 0 \Rightarrow$ (4) no tiene soluciones T-periódicas

3.8. TRANSFORMADA DE LAPLACE. APLICACIÓN A SISTEMAS LINEALES

Sea f continua en $[0, \infty)$. Se llama transformada de Laplace Lf a la función F definida por $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ para todos los valores de s para los que la integral impropia converge.

El operador $L: f \rightarrow F$ es claramente un operador lineal.

El operador $L^{-1}: F \rightarrow f$ se llama transformada inversa ($L^{-1}(F) = f$ si $L(f) = F$)

Esta es la clave que L^{-1} también es lineal. (puede no existir, pero si existe una f , existe una única que sea continua).

Calculemos algunas transformadas de funciones básicas:

$$\left\{ \begin{array}{l} L(1) = \frac{1}{s}, s > 0 \quad ; \quad L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, s > a \quad , \quad L(t) = \frac{1}{s^2}, s > 0 \\ L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0 \quad ; \quad L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0 \quad , \quad L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0 \end{array} \right.$$

$$\int_0^\infty t e^{-st} dt = \left[-\frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}, s > 0$$

$$\int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}, s > a$$

Dos propiedades útiles:

$$\text{Si } L(f) = F \text{ entonces: } L(e^{at} f(t)) = F(s-a), \quad L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Para ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sea } x(t) \text{ una función de } C^n \text{ en } [0, \infty) \text{ y sea } L(x) = X. \text{ Entonces:} \\ L(x^{(n)}(t)) = s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0) \end{array} \right.$$

$$\text{Para } n=1 \text{ lo probamos: } L(x'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} x'(t) dt = \left[e^{-st} x(t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt = -x(0) + s X(s).$$

Se llama convolución de f y g a la función $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du$

$$\text{Es fácil ver que } f * g = g * f, \quad L(f * g) = L(f) L(g) \quad (\text{o sea } L^{-1}(FG) = L^{-1}(f) * L^{-1}(g))$$

Aplicamos a sistemas. Es un camino más corto en muchos casos pero que, al no darnos una forma general de las soluciones, no nos permite sacar conclusiones generales sobre las soluciones (a diferencia de fórmulas derivadas de las constantes autovalores).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_2 \quad x_1(0) = 1 \\ x_2' = -x_1 + x_3 \quad x_2(0) = 0 \\ x_3' = x_1 \quad x_3(0) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -1 + s x_1 - x_2 \\ s x_2 = -x_1 + x_3 \\ s x_3 = x_1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} s^2 x_3 = x_2 + 1, \quad -s^2 x_1 = x_2 + 1; \quad x_2 = \frac{1}{1+s^2} \\ (s-1) x_3 = x_3(1-s), \quad x_3 = -x_2, \quad x_3 = \frac{-1}{1+s^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{not} \\ \text{sent} \end{array}$$

$$\text{ luego } x_1 = L^{-1}(X_1) = \cos(t) - \sin(t); \quad x_2 = L^{-1}(X_2) = \sin(t); \quad x_3 = L^{-1}(X_3) = \sin(t) - \cos(t).$$

Los sistemas de segundo orden y las ecuaciones con coeficientes constantes están muy extendidos y son fáciles de resolver. Sobre todo nos sirve la transformada para sistemas de orden mayor que 2 y para los no homogéneos con $f(t)$ de transformada conocida.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR MEDIO DE SERIES

(notación nueva en 4-5: $y(t)$ como función - nota)

4.1 ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES ANALÍTICOS

Consideremos la ecuación lineal (1) $y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$ donde $a_1(t), a_2(t)$ son funciones

analíticas en un entorno de t_0 (es decir pueden desarrollarse en series de potencias de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-t_0)^k$, convergente en $|t-t_0| < r$ con $r > 0$). Por ahora sabemos que la solución general de (1) es $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ con y_1, y_2 sol. lin. independientes, pero si a_1, a_2 no son constante no sabemos encontrarlas. En este tema buscaremos soluciones en forma de series de potencias. El siguiente teorema (que aceptamos) nos asegura que existen:

Teor: Si a_1, a_2 son analíticas en (t_0-r, t_0+r) entonces (1) tiene dos soluciones independientes $y_1(t), y_2(t)$ que son analíticas en el mismo intervalo (todas las soluciones lo son, pues).

El método para encontrarlas será suponer $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k$; como las series de potencias se pueden derivar término a término dentro del intervalo de convergencia: $y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k(t-t_0)^{k-1}$; $y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(t-t_0)^{k-2}$. Sustituimos estas series en la ecuación, donde a_1, a_2 estarán también desarrolladas en serie y hacemos iguales a 0 los coeficientes que obtenemos para cada potencia de $(t-t_0)$. Obtenemos un sistema numerable de ecuaciones a partir de los cuales determinaremos los c_k de la serie solución. Luego determinaremos el intervalo de convergencia. Aprendamos con ejemplos:

Ecuación de Legendre: $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$, α real.

En este caso $a_1(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$, $a_2(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2}$ son analíticas en un entorno de $t=0$ (son infinitamente derivables)

Probamos solución $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$ $y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots$
 $y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} = 2c_2 + 3 \cdot 2 c_3 t + 4 \cdot 3 c_4 t^2 + \dots$

$(1-t^2)y'' = \sum_{k=2}^{\infty} (k(k-1)c_k t^{k-2} - k(k-1)c_k t^k) = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k] t^k$; $-2ty' = \sum_{k=1}^{\infty} -2k c_k t^k$

Sustituyendo en la ecuación y agrupando los coeficientes de cada t^k :

$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k - 2k c_k + \alpha(\alpha+1)c_k] t^k = 0$ $\Rightarrow [2c_2 + \alpha(\alpha+1)c_0] + [3 \cdot 2 c_3 - 2c_1 + \alpha(\alpha+1)c_1] t + \dots$

Debe ser $(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\alpha^2 - k^2 - k)c_k = 0$ para $k=0, 1, \dots$

Luego $c_{k+2} = -\frac{(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+2)(k+1)} c_k$ (fórmula recurrente que nos da c_{k+2} en función de c_k ya conocida)

Para $k=0$, $c_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} c_0$; $k=1$, $c_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3 \cdot 2} c_1$ sería interesante (aunque no siempre se queda) encontrar exponentes de los c_k

$k=2$, $c_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4 \cdot 3} c_2 = -\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} c_0$, $k=3$, $c_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5 \cdot 4} c_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!} c_1$

4.2 PUNTOS SINGULARES REGULARES, MÉTODO DE FROBENIUS

Consideremos una ecuación más general $a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$ (2) con a_0, a_1, a_2 analíticas, que podríamos escribir $y'' + \frac{a_1(t)}{a_0(t)} y' + \frac{a_2(t)}{a_0(t)} y = 0$ como tenemos. El teorema de 4.1 lo podríamos aplicar en los puntos en que $\frac{a_1}{a_0}$ y $\frac{a_2}{a_0}$ son analíticas. En todos ellos el apartado anterior nos vale. Ahora queremos estudiar las soluciones en las proximidades de ciertos t_0 en los que $a_0(t_0) = 0$. Un punto t_0 tal que $a_0(t_0) = 0$ se llama punto singular de (2) (los demás serán puntos regulares).

En particular estudiaremos puntos singulares más "débiles":

t_0 es punto singular regular de (2) si la ecuación puede escribirse:
 $(t-t_0)^2 y'' + (t-t_0)b_1(t)y' + b_2(t)y = 0$ (3)
 donde b_1, b_2 son funciones analíticas en t_0

Por ejemplo, en una ecuación de Euler $t^2 x'' + b_1 t x' + b_2 x = 0$, t_0 es p.s. regular.

Pero, por ejemplo, $(t-1)^3 y'' + 2(t-1)^2 y' - 5ty = 0$; o sea $(t-1)^2 y'' + 2(t-1)y' - 5\frac{t}{t-1}y = 0$. $t=1$ es punto singular no regular ($\frac{5t}{t-1}$ no es ni continuo en ese punto).

Para simplificar empezemos con un sencillo cambio de variable: $t = s + t_0$; (2), expresada en función de la nueva variable s , toma la forma:

$s^2 \bar{y}'' + s \bar{b}_1(s) \bar{y}' + \bar{b}_2(s) \bar{y} = 0$ con $\bar{b}_1(s) = b_1(t_0+s)$, $\bar{b}_2(s) = b_2(t_0+s)$ pues $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy(s+t_0)}{ds}$; $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d^2 y(s+t_0)}{ds^2}$, $\bar{y}(s) = y(t_0+s)$

en la que $s=0$ es punto singular. Tenemos entonces el problema:

Estudiar las soluciones en las proximidades de t_0 de la ecuación.
 (3) $t^2 y'' + t b_1(t) y' + b_2(t) y = 0$, donde b_1, b_2 son analíticas en $t=0$

Para estas ecuaciones no existen (en general) soluciones de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Si $b_1(t), b_2(t)$ fuesen constantes sería una ecuación de Euler y habría soluciones de la forma $c t^\lambda$. No puede suponer, variando constantes, la búsqueda de una solución $c t^\lambda = t^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ (esto es mucho suponer; se supone que esta conclusión se dedujo tras años de trabajo matemático hasta que Frobenius lo formalizó). Pues, en esencia, esto resulta. Un ejemplo:

$2ty'' + y' + ty = 0$ 0 es p.s.r. $t^2 y'' + \frac{1}{2} y' + \frac{1}{2} y = 0$ - $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ analíticas en $t=0$

Como las Euler suponemos inicialmente $t > 0$. Probamos $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\lambda+k} = c_0 t^\lambda + c_1 t^{\lambda+1} + \dots$ con

$\frac{1}{2} y = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\lambda+k+2} = \frac{1}{2} [c_0 t^{\lambda+2} + c_1 t^{\lambda+3} + \dots]$

$\frac{1}{2} y' = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\lambda+k) t^{\lambda+k-1} = \frac{1}{2} [c_0 \lambda t^{\lambda-1} + c_1 (\lambda+1) t^{\lambda} + \dots]$

$2ty'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\lambda+k)(\lambda+k-1) t^{\lambda+k} = [c_1 (\lambda-1) c_0 t^\lambda + (\lambda+1) \lambda c_1 t^{\lambda+1} + \dots]$

$2ty'' + \frac{1}{2} y' + \frac{1}{2} y = t^\lambda [c_1 (\lambda-1) c_0 + \frac{c_0 \lambda}{2}] + t^{\lambda+1} [c_1 (\lambda+1) \lambda + \frac{c_1 (\lambda+1)}{2}] + t^{\lambda+2} [c_2 (\lambda+2)(\lambda+1) + \frac{c_2 (\lambda+2)}{2} + \frac{c_2}{2}] + \dots + t^{\lambda+k} [c_k (\lambda+k)(\lambda+k-1) + c_k \frac{(\lambda+k)}{2} + \frac{c_k-2}{2}] + \dots$

4.3 ECUACIÓN Y FUNCIONES DE BESSEL

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \alpha^2)y = 0, \alpha \geq 0$$

Es un p.s.r. El polinomio indicial: $q(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \lambda - \alpha^2 = \lambda^2 - \alpha^2$; raíces $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$.
Aplicaremos el teorema. Sabemos que hay una solución de la forma:

$$y_1(t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, c_0 \neq 0, t > 0; y_1'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\alpha+k) t^{\alpha+k-1}, y_1''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\alpha+k)(\alpha+k-1) t^{\alpha+k-2}$$

$$\text{luego: } t^\alpha [c_0 [\alpha(\alpha-1) + \alpha - \alpha^2] + c_1 [(\alpha+1)\alpha + \alpha + 1 - (\alpha+1)^2] + \sum_{k=2}^{\infty} [p(\alpha+k)c_k + c_{k-2}] t^k] = 0.$$

luego $c_0 = 0$

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(\alpha+k)} = -\frac{c_{k-2}}{k(\alpha+k)}, k=2,3,\dots \text{ Por tanto } c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(\alpha+1)}, c_4 = -\frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 2(\alpha+1)(\alpha+2)}, c_6 = -\frac{c_0}{2^6 3! (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

$$\text{Así que } y_1(t) = t^\alpha \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{2^{2m} m! (\alpha+1) \dots (\alpha+m)} \right]$$

caso: la función gamma: $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, s > 0$, siempre convergente
(extensión del factorial)

Propiedades: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ (por partes) y entonces $\Gamma(s+n) = (s+n-1) \dots (s+1)s\Gamma(s)$, n

Como $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$, Podemos definir para s negativos ahora:

$$-n < s < -n+1; \Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1) \dots s} \text{ (en } 0, -1, -2, \dots \text{ no podemos)}$$

Escribiendo $c_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$ obtenemos una solución:

$$J_\alpha(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\alpha+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

llamada función de Bessel de primera especie

orden α

Si α es un número natural n,

$$J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

la representación de $J_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$

$$J_1 = \frac{t}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

(análisis de la serie aunque la E.D. no tiene solución)

funciones que están tabuladas. las calcula a partir de

$$J_{\alpha+1}(t) \approx \frac{2\alpha}{t} J_\alpha(t) - J_{\alpha-1}(t)$$

Veremos en problemas que $J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$, $J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$, $t > 0$.

Otras propiedades útiles para otros problemas de contorno son análogos a los de las J_α (también tabuladas).

Como $J_\alpha(t)$ tiene un número infinito de ceros en $(0, \infty)$.

Entre dos ceros de $J_\alpha(t)$ existe un cero de $J_{\alpha+1}(t)$ y viceversa.

También interesa saber cuáles son decréscitos en el origen: J_α con $\alpha > 0$ lo es. Además como $J_n(t) = (-1)^n J_{-n}(t)$ $J_{-n}(t)$ en enteros también lo es (pero no interesa mucho). Si α no es entero, $J_{-\alpha}(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$ por delante.

3. PROBLEMAS DE CONTORNO (para ecuaciones ordinarias)

(aplicación en deformación de vigas, conducción del calor, oscilación de ondas en las cuerdas...)

5.1. PROBLEMAS DE CONTORNO PARA LA ECUACIÓN $y'' + \lambda y = 0$

Hasta ahora problemas de valores iniciales. Las ecuaciones lineales con coeficiente continuo tienen siempre solución única. Ahora, las condiciones se establecen en dos puntos diferentes (contorno de un intervalo). Por ejemplo

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \gamma = c \cos t + c_2 \sin t; \quad \gamma(0) = c_1 = 0 \\ \gamma(L) = c_2 \sin L = 0 \end{cases}; \text{ por ejemplo, si } L=1,$$

$c_2 \sin L = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ con lo que $\gamma = 0$ es la solución única del problema.

sin embargo, si $L = \pi$, $c_2 \sin \pi = c_2 \cdot 0 = 0$ cualquiera que sea c_2 , así que hay infinitas soluciones de un problema tan sencillo y regular como ese $\gamma = c \sin t$.

Muchos problemas de EDP (separación de variables) conducen a problemas de contorno en los que aparece un parámetro λ e interesa saber si existen otras soluciones distintas de la trivial. En esta sección estudiaremos $y'' + \lambda y = 0$ c. continuo y luego generalizaremos.

Varios ejemplos:

$$(P) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ \gamma(0) = \gamma(1) = 0 \end{cases}$$

(Observemos que esta ecuación puede describir el "pandeo" de una viga fija sometida a una fuerza $F: y'' + k y = 0$ con k constante)



Buscamos si existen valores de λ para los que haya otras soluciones distintas de la $y=0$.

si $\lambda > 0$ la solución general es $y = c_1 \cos \sqrt{\lambda} t + c_2 \sin \sqrt{\lambda} t$. CC: $\gamma(0) = c_1 = 0$
 $\gamma(1) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \text{ o bien} \\ \sqrt{\lambda} = n\pi \end{cases}$

luego si $\lambda = n^2 \pi^2$, $n = 1, 2, \dots$ hay infinitas soluciones no triviales $\gamma = c_2 \sin n\pi t$

(las CC. se cumplen para cualquier c_2).

si $\lambda = 0$, $y = c_1 + c_2 t$; $\gamma(0) = c_1 = 0$
 $\gamma(1) = c_2 = 0$ no hay solución no trivial.

si $\lambda < 0$, $\gamma = c_1 e^{\sqrt{\lambda} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} t}$, $\gamma = (-\lambda)^{-1/2}$ $\gamma(0) = c_1 + c_2 = 0$ ($c_2 = -c_1$)
 $\gamma(1) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \Rightarrow c_1 (e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0$
 $\Rightarrow c_1 = 0$ pues $e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} \neq 0$



la viga: existen infinitas soluciones no triviales para $\lambda = n^2 \pi^2$



los valores del parámetro λ para los que existen soluciones no triviales de un problema de contorno se llaman autovalores de dicho problema. las soluciones correspondientes a cada valor propio λ se llaman autofunciones asociadas a λ .

Observemos que autofunciones asociadas a distintos λ_n son ortogonales en $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \sin n\pi t \sin m\pi t dt = 0, \quad \int_0^1 \sin^2 n\pi t dt \neq 0, \quad m \neq n$$

5.2. PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE (ideas que allen)

Consideremos la ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y + \lambda y = 0$, con $a_1, a_2 \in C[a, b]$. Multiplicamos por $e^{\int a_1(x) dx}$: $(y e^{\int a_1(x) dx})' + a_2(x) e^{\int a_1(x) dx} y + \lambda e^{\int a_1(x) dx} y = 0$ que podemos notar así: $(y' p(x))' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0$ donde $p \in C^1[a, b]$, $q \in C[a, b]$, $r(x) > 0$.

Esta ecuación es un caso particular de las que venimos en esta sección cuyas propiedades son muy similares a las de los problemas vistos en 5.1:

Se llaman problemas de Sturm-Liouville a los constituidos por:

$$(P) \begin{cases} (p(x)y')' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0, & p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p(x), r(x) > 0, \forall x \in [a, b] \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0; & \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \text{ (condiciones de contorno separadas)}$$

(Podríamos también imponer cc. periódicas: $y(a) = y(b)$; $y'(a) = y'(b)$; en ese caso, existiendo $p(a) = p(b)$ las conclusiones y teoremas serían los mismos).

Teor: los autovalores de un problema de S-L forman una sucesión λ_n que tiende a $+\infty$. las autofunciones correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales respecto al peso $r(x)$ (es decir $\int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0$ si y_n, y_m son autofunciones correspondientes a autovalores $\lambda_n \neq \lambda_m$)

Si las condiciones de contorno son separadas las autofunciones constituyen un espacio vectorial de dimensión ∞

(los problemas de S-L son autoadjuntos en el sentido de que si $L y = -(p y')' + q y$ se cumple $\langle L u, v \rangle = \langle u, L v \rangle$ para todo par de funciones de $C^1[a, b]$ que satisficieran la cc. Estos problemas son los generalizados de los vistos en 5.1).

(la ortogonalidad permite desarrollar en serie de Fourier, relativa al sistema de autofunciones cualquier función que cumpla las cc. y ciertas condiciones muy amplias de regularidad).

ejemplo $y' + (\lambda - \frac{1}{x})y = 0$ es un problema S-L. Aunque no sabemos resolverlo podemos afirmar que tiene infinitos autovalores y que tienen autofunciones asociadas ortogonales.

No sabemos nada sobre el valor de estos infinitos autovalores y sobre las autofunciones correspondientes. Hay teoría que nos da algunas propiedades. Por ejemplo:

Teor: aumentando p o q , o disminuyendo r aumentan todos los autovalores de (P)

$$\text{es decir } \begin{cases} (p(x)y')' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \\ \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p(x)y')' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \\ \text{c.c.} \end{cases} \text{ con } \lambda_n^* \geq \lambda_n$$

no permite conocer otros de los autovalores comparando con otros que sí sabemos resolver.

$$\text{ejemplo podemos compararlo con } (P) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ \gamma(0) = \gamma(1) = 0 \end{cases} \text{ con } \begin{cases} y'' + (\lambda - 1)y = 0 \\ \gamma(0) = \gamma(1) = 0 \end{cases} \text{ luego } n^2 \pi^2 \leq \lambda_n \leq (n^2 \pi^2 + 1)$$

sobre las autofunciones también se puede decir algo:

5.3. FUNCION DE GREEN

No preocupamos ahora de resolver la ecuación no homogénea $[(p(t)y)']' + q(t)y = f(t)$ con condiciones de contorno separadas $\alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0; \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0$

En ciertos casos no necesitaremos ningún resultado nuevo, por ejemplo:
 $y' + y = t$ resolvemos $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + t$; $y(0) = c_1 = 0$; $y(1) = -c_2 + 1 = 0$; $c_2 = 1$; $y = e^t + t$
 $y(0) = 0, y(1) = 0$; $y = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t + t$; $y(0) = -c_1 = 0$; $y(1) = c_2 + 1 = 0$; $c_2 = -1$; $y = -e^{-t} + t$

Nuestra intención es encontrar una fórmula que nos de la solución del problema para cualquier función $f(t)$, conocidas las soluciones de la homogénea (algo análogo a la fórmula de variación de las constantes para los problemas de valores iniciales).

En 5.1 vimos un ejemplo para el que si la homogénea solo tenía la solución $y=0$ entonces podíamos determinar c_1, c_2 y por tanto la no homogénea tenía solución única. Esto es cierto en general:

El problema (P) tiene solución única si y solo si el problema homogéneo (Ph) tiene solo la solución $y=0$.
 Si (Ph) tiene soluciones no triviales, (P) puede tener infinitas soluciones o no tener ninguna.

Buscamos una fórmula para el primer caso. Un ejemplo:
 (P) $y'' = f(t)$; el problema homogéneo correspondiente $y'' = 0$; $y = c_1 t + c_2$; $c_1 = 0$; $c_2 = 0$;
 $y(0) = y(1) = 0$; solo tiene la solución trivial. (P) tiene, pues, solución única; la buscamos:

Matriz fundamental $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; luego una solución particular del sistema equivalente es:

$$X_p = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds ; X_p = \int_0^t f(s) \begin{pmatrix} t-s \\ 1 \end{pmatrix} ds$$

Solución general de la ecuación $y'' = f(t)$ es : $y = c_1 + c_2 t + \int_0^t f(s)(t-s) ds$.

Condiciones de contorno : $c_1 = 0$; $c_2 + \int_0^1 f(s)(1-s) ds = 0$; $c_2 = - \int_0^1 f(s)(1-s) ds$

Luego la solución : $y = \int_0^1 f(s)t(1-s) ds + \int_0^t f(s)(t-s) ds$ que podemos escribir:

$$y = \int_0^t f(s) [t(1-s) + t(s-1)] ds + \int_t^1 f(s) t(s-1) ds = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds$$

donde $G(t,s) = \begin{cases} s(t-1) & 0 \leq s \leq t \\ t(s-1) & t \leq s \leq 1 \end{cases}$

La solución nos queda expresada como una integral. Para una $f(t)$ concreta, encontrar la solución equivale a hacer un par de integraciones:

Por ejemplo $y'' = 1$; $y(0) = y(1) = 0$ tiene por solución $\int_0^1 G(t,s) ds = \int_0^t s(t-1) ds + \int_t^1 t(s-1) ds =$
 $= (t-1) \frac{t^2}{2} + t \left[\frac{s^2}{2} - s \right]_t^1 = \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - t = \frac{t^3}{2} - t^2 + \frac{t(1-t)}{2}$

(Podemos comprobar en este caso: